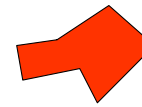


Chapitre II

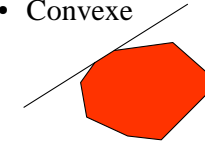
Introduction à la géométrie algorithmique euclidienne

Rappel

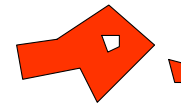
- Polygone connexe



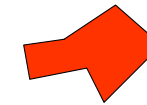
- Convexe



- Polygone non connexe



- Concave



Géométrie algorithmique euclidienne

- 1 – Systèmes de coordonnées - clipping
- 2 – Transformations élémentaires 2D
- 3 – Eléments de géométrie algorithmique
- 4 – Modélisation des objets spatiaux
- 5 – Relations topologiques
- 6 – Conclusions

1 – Systèmes de coordonnées

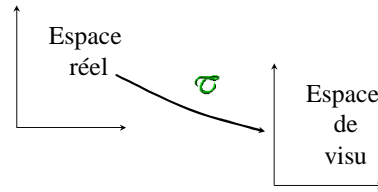
- Deux systèmes de coordonnées
 - espace réel
 - généralement continu
 - unités : km, m, millimètre, Euro, litres, etc.
 - espace de visualisation (périphérique, écran)
 - généralement discret
 - unités : pixels + couleurs

Nécessité de transformations

- espace réel \rightarrow espace de visualisation
 - transformations linéaires

- Notions clés :

- fenêtre
- clipping
- aliasing



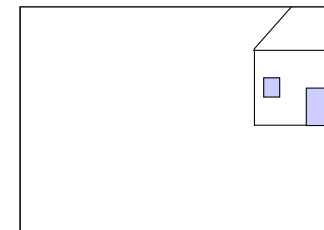
Fenêtres et clôtures

- Définitions normalisées
 - Fenêtre (monde réel) : window
 - Clôture (monde de visualisation) : viewport
- Usage majoritaire de la notion de fenêtre

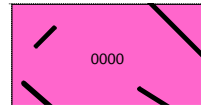
Clipping

- **Clipping** : parmi les objets du monde réel, ne garder que ceux (entiers ou en partie) que l'on peut voir depuis cette fenêtre

Clipping d'un objet par une fenêtre rectangulaire



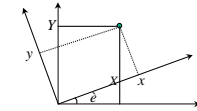
Clipping d'un segment avec l'algorithme de COHEN-SUTHERLAND



2 – Transformations linéaires 2D

- Point : x_p, y_p

- Translation $X = x + a$
 $Y = y + b$



- Rotation $X = x \times \cos(\theta) + y \times \sin(\theta)$
 $Y = -x \times \sin(\theta) + y \times \cos(\theta)$

- Changement d'échelle $X = ax$
 $Y = by$

Présentation générale

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \end{bmatrix}$$

Cette matrice intègre :

- rotation
- symétrie
- changement d'échelle

Translation

Remarques générales

- Les transformations géométriques sont toutes traitées par des combinaisons d'additions et de multiplications de matrices
- Serait-il possible de n'avoir que des multiplications ? Oui si l'on parle en coordonnées homogènes

3 – Éléments de géométrie algorithmique

- 3.1. Opérations sur les points, les lignes et les segments
- 3.2. Opérations sur les polygones
- 3.3. Enveloppe convexe
- 3.4. Triangulation de Delaunay
- 3.5. Courbes de Bézier

3.1. Opérations sur les points, les lignes et les segments

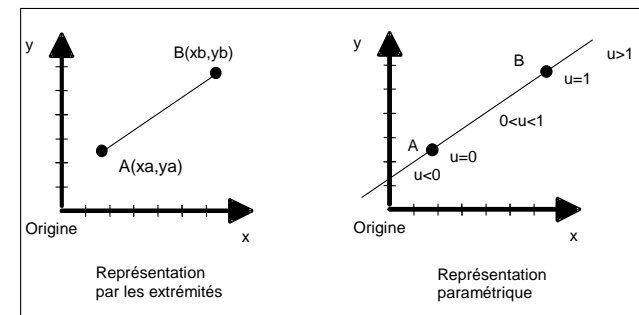
- Intersection de lignes et de segments
- Généralisation de polygones.

Représentation

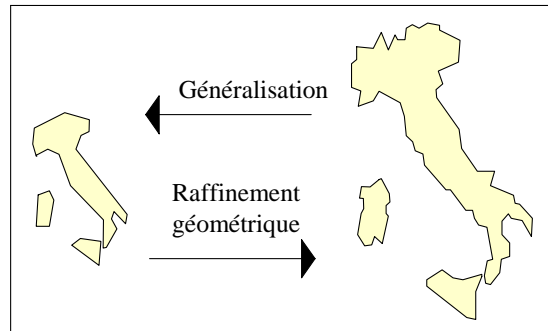
- **Point** : x, y ou bien x, y, z , parfois, x, y, z, t
- **Segment** : ensemble des points situés sur une ligne et limités par deux extrémités
 \implies représentation en intension
 équation paramétrique (u) :

$$\left. \begin{array}{l} x = x_a + u \times (x_b - x_a) \\ y = y_a + u \times (y_b - y_a) \end{array} \right\} \text{ Avec } 0 \leq u \leq 1$$

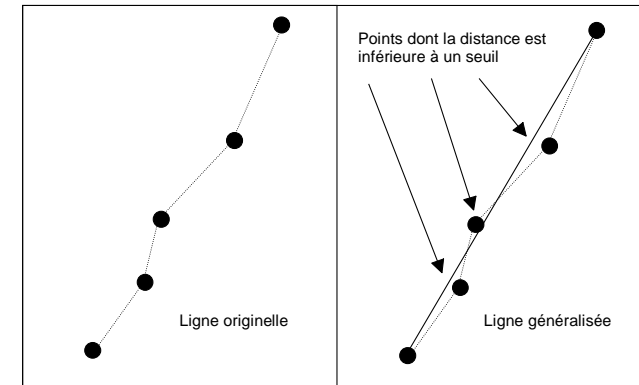
Représentation des segments



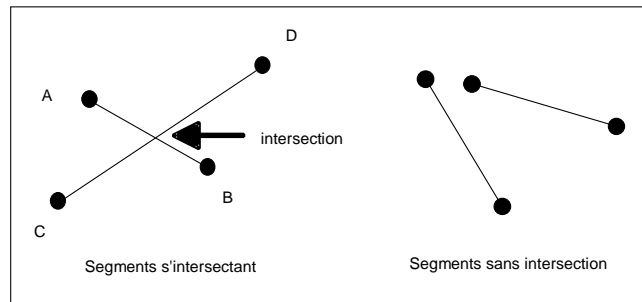
Généralisation et raffinement



Généralisation d'une polygône

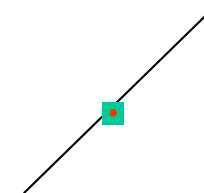


Intersection de deux segments

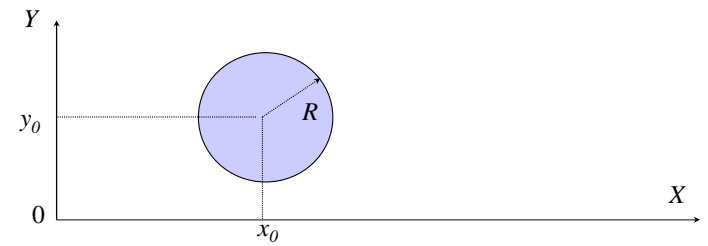


Appartenance

- exacte :
 - $D: y = 3x+2$
 - $(x=0, y=5) \in D$
- approchée
 - $(x=0,00001, y = 4,9999999)$
 - $(x_0, y_0 \in D) \text{ si } |y-3x-2| < \epsilon$



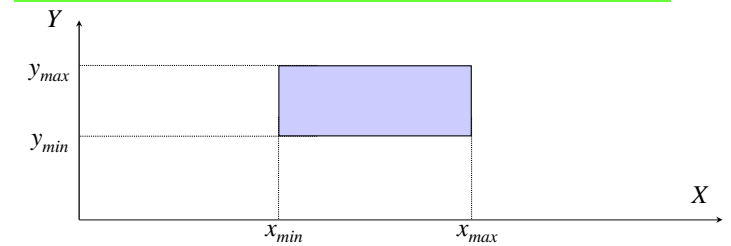
Appartenance de point à un cercle



Cercle :

Si $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 = 0$ alors sur cercle (informatiquement presque impossible)
 Si $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 > 0$ alors extérieur
 Si $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 < 0$ alors intérieur

Appartenance de point à un rectangle



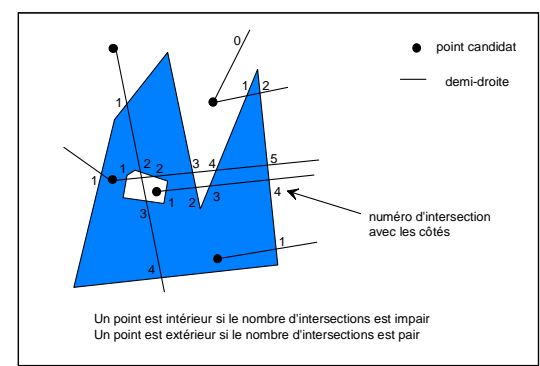
Rectangle :

Si $(x_{min} < x < x_{max})$ and $(y_{min} < y < y_{max})$ alors intérieur
 Si $(x < x_{min})$ or $(x > x_{max})$ or $(y < y_{min})$ or $(y > y_{max})$ alors extérieur

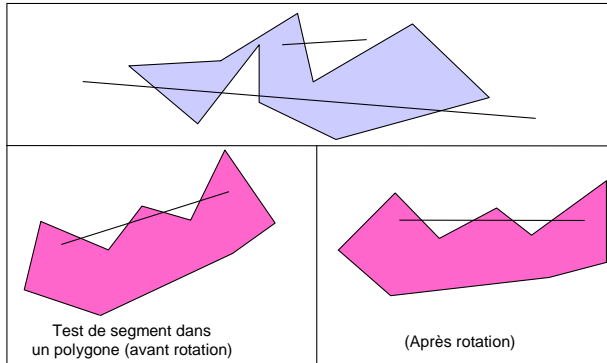
Appartenance d'un point à un polygone quelconque

- Cas simple
 - rectangles avec cotés parallèles aux axes
- Cas courant $P=\{x, y\}$
 - polygone connexe
- Cas général
 - polygone avec trous et îles
 - solution : théorème de la demi-droite de Jordan

Solution du problème de point dans un polygone avec le théorème de la demi-droite (Jordan)



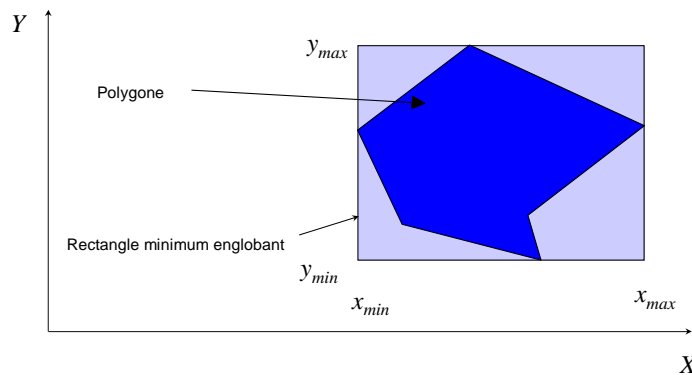
Intersections d'un segment avec un polygone



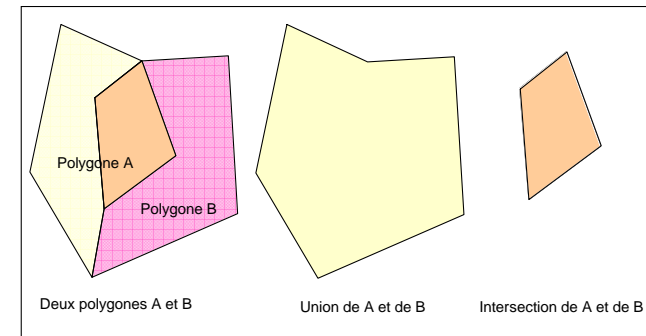
3.2. Opérations sur les polygones

- Intersection segment et polygone
- Test d'appartenance d'un point à un polygone
- Union, intersection, différence de polygones
- Détermination de centroïde
- Calcul de surface
- Clipping de polygone
- Rubber-sheeting

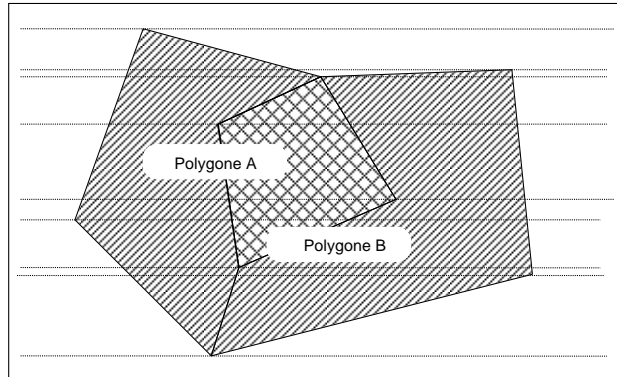
Rectangle minimum englobant un polygone



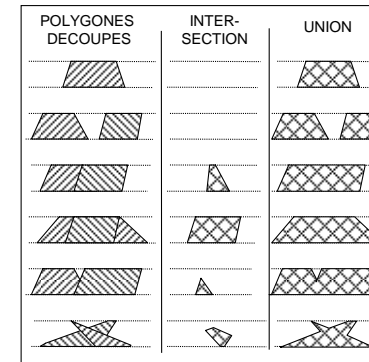
Union et intersection de deux polygones



Découpage de deux polygones en tranches parallèles

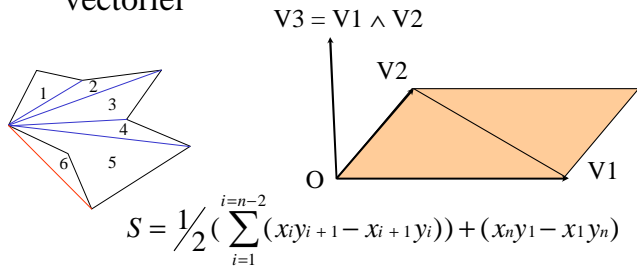


Méthode des tranches pour déterminer l'union et l'intersection de deux polygones

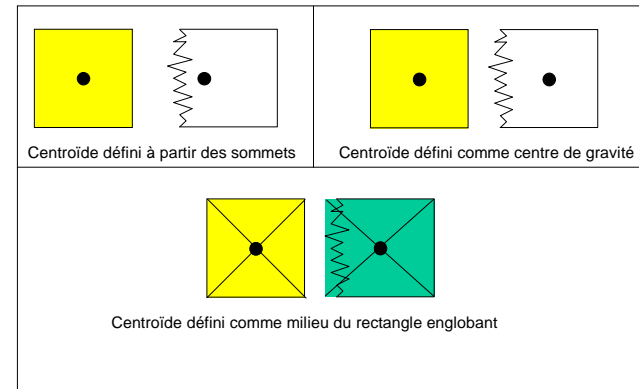


Calcul de la surface d'un polygone quelconque

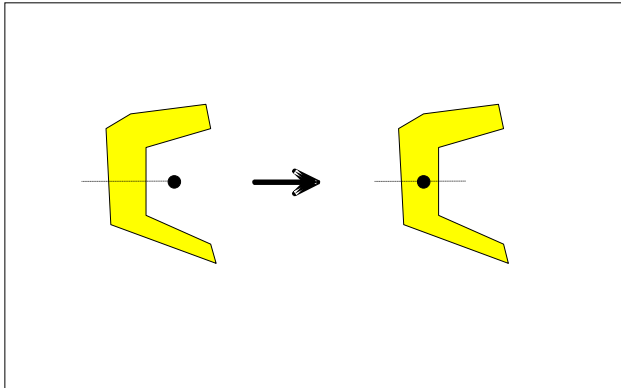
- Découpage en triangles
- Surface d'un triangle à partir du produit vectoriel



Différents types de centroïdes



Déplacement de centroïde



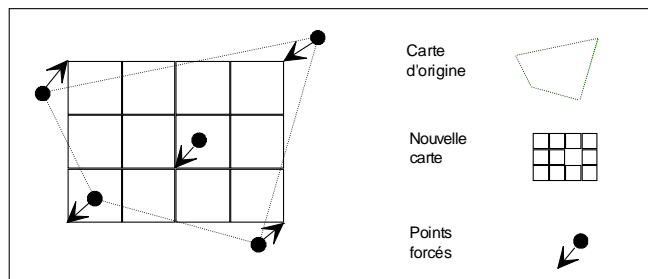
Calcul du barycentre

- Centroïde x_c, y_c
 - Comme centre de gravité des sommets

$$x_c = \frac{1}{2} \sum_i x_i \text{ et } y_c = \frac{1}{2} \sum_i y_i$$
 - Comme centre de gravité des surfaces (barycentre)
 - découpage du polygone en triangles
 - calcul du barycentre de chaque triangle
 - calcul du barycentre global
 - Comme milieu du rectangle englobant

$$x_c = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min}) \text{ et } y_c = \frac{1}{2}(y_{\max} - y_{\min})$$

Rubber sheeting



Transformations élastiques

Formules de rubber-sheeting

- Rubber-sheeting linéaire

$$X = A \times x + B \times y + C$$

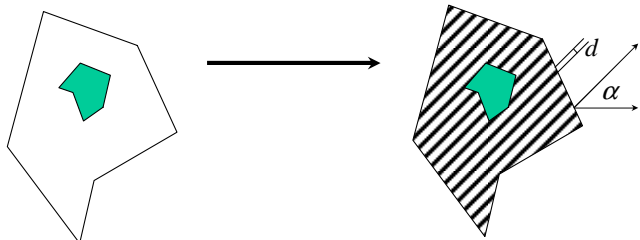
$$Y = D \times x + E \times y + F$$

- Rubber-sheeting bilinéaire

$$X = A \times xy + B \times x + C \times y + D$$

$$Y = E \times xy + F \times x + G \times y + H$$

Hachurage de polygone



Paramètres :

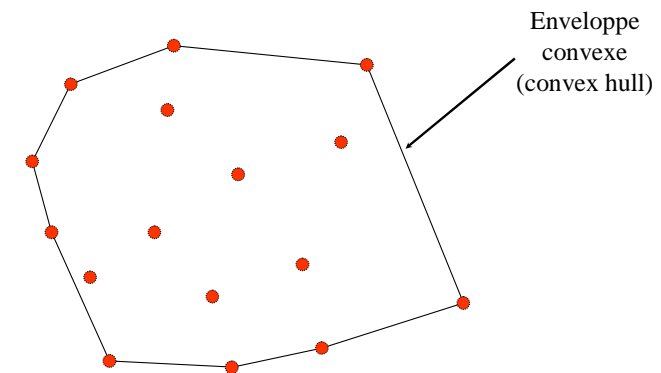
- d = distance entre deux hachures
- α = angle

Algorithme

- Rotation d'angle $-\alpha$ du polygone
- Calculer rectangle englobant - y_{min}
 - droite D $y := y_{min}$
- De y_{min} à y_{max} avec un pas d faire :
 - intersections de D avec côtés du polygone
 - tri des intersections
 - calcul des extrémités des hachures (rotation de $+\alpha$)
 - dessin de la hachure
 - $y := y + d$

3.3 Enveloppe convexe

- Problème :
- Soit un semis de points $P_i (x_i, y_i)$:
- Objectif : *déterminer le polygone convexe minimal tels que tous les points soient situés sur les bords ou à l'intérieur de ce polygone*



Algorithme de Jarvis

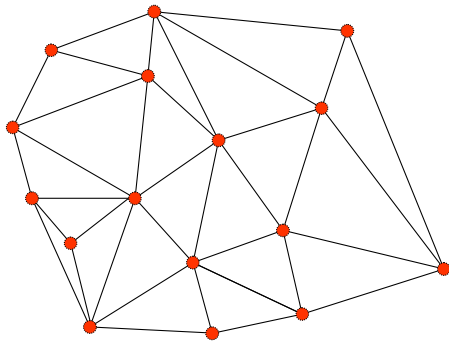
- L'algorithme de Jarvis, appelé aussi parcours de Jarvis, calcule l'enveloppe convexe d'un ensemble E de points par la technique du paquet cadeau. Celle-ci simule l'enroulement de l'ensemble E par une ficelle.
- On attache d'abord l'extrémité de la ficelle au point P_0 le plus bas de l'ensemble des points. Ce point est celui de plus petite ordonnée (et de plus grande abscisse si plusieurs points ont l'ordonnée minimale).
- On trouve ensuite les autres sommets en "tournant" autour des données. Plus précisément, si on a trouvé les sommets jusqu'à P_i , P_{i+1} est le point tel que la droite $P_i P_{i+1}$ laisse tous les autres points du même côté.

Voici l'algorithme de Jarvis en pseudo-langage:

```
trouver le point d'ordonnée minimale  $p_0$ 
list <- { $p_0$ }
répéter
  pour tout  $p_j \neq p_i$ 
    calculer l'angle  $(p_{i-1}p_i, p_i p_j)$ 
  soit  $p_k$  le point qui minimise cet angle
  list <- { $p_k$ }
   $p_{i-1} = p_i$ ;  $p_i = p_k$ ; jusqu'à  $p_k = p_0$ 
```

3.4 Triangulation de Delaunay

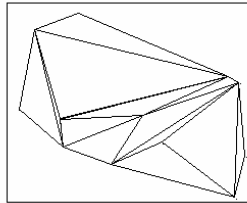
- Problème :
- Soit un semis de points $P_i (x_i, y_i)$:
- Objectif : *déterminer les triangles entre ces points de sorte qu'aucun ne soit situé dans un autre triangle*



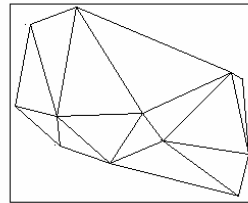
Autre définition

- Des triangles sont dits en triangulation de la surface qu'ils recouvrent:
 - 1- si l'intersection l'intérieur de deux triangles est vide quelque soit les deux triangles.
 - 2 - si l'intersection de deux triangles est soit vide, soit une coté, soit un sommet
 cas "interdits":

Bonne et mauvaise triangulations



semis mal triangulé
(les triangles sont allongés)



semis bien triangulé
(triangles compacts)

Exemple d'algorithme

- On maintient à jour une liste de triangles qui à tout instant forme une triangulation du rectangle. Celle-ci est formée au départ des 2 triangles obtenus en divisant le rectangle par une de ses diagonales.
- On prend les points un par un dans l'ordre de leur numéro. Deux cas possibles:
- Ou bien le nouveau point est interne à l'un des triangles T_k de la liste ou bien il est sur la frontière de 2 triangles T_i, T_j de la liste.
- Dans le premier cas, retirer T_k de la liste et rajouter à la liste les 3 triangles obtenus en divisant T_k par les droites joignant le point au 3 sommets de T_k .
- Dans le deuxième cas retirer T_i et T_j de la liste et rajouter les 4 triangles obtenus en divisant T_i par le nouveau point et le sommet opposé et de même pour T_j .

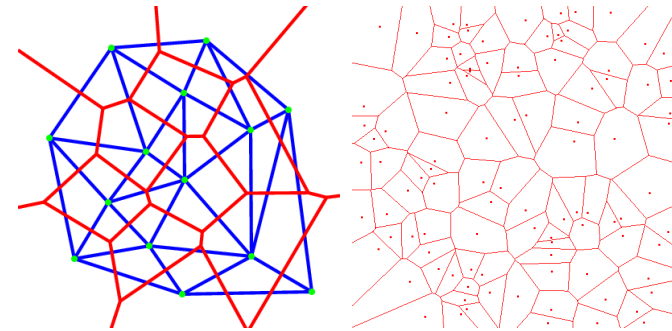
Tessellation de Voronoi

- On appelle polygone de Voronoï associé au site P_i la région $Vor(P_i)$ (chaque région étant l'ensemble de points (x,y) les plus proches à un point de P) telle que chaque point de P a pour plus proche site P_i .

$$Vor(P_i) = \{x \in R^2, d(x, P) \leq d(x, P_j), \forall P_j \in P - P_i\}$$

Une tessellation de Voronoi est le dual de la triangulation de Delaunay

Tessellation de Voronoi



3.5 Courbes de Bézier

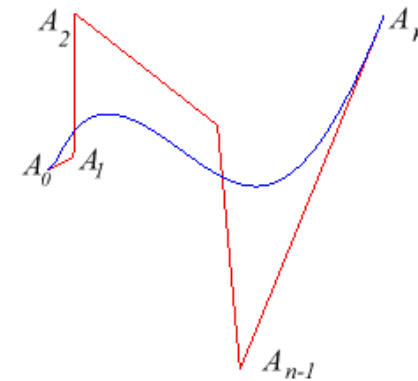
- Soit une ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ (appelée polygone de contrôle, les A_k étant les points de contrôle), la courbe de Bézier (polynomiale) associée est la courbe de paramétrisation ci-dessous

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_n^k(t) \overrightarrow{OA_k}$$

avec polynômes de Bernstein $B_n^k = C_n^k X^k (1-X)^{n-k}$

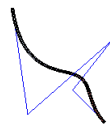
- la courbe passe par A_0 (pour $t = 0$) et A_n (pour $t = 1$), et la portion qui joint ces points est tracée dans l'enveloppe convexe des points de contrôle ; la tangente en A_0 est (A_0A_1) et celle en A_n $(A_{n-1}A_n)$.

Exemple de courbe de Bézier



Paul de Casteljau et Pierre Bézier

- En réalité, courbes inventées par de Paul de Casteljau (ingénieur chez Citroën), mais connues sous le nom de Pierre Bézier (ingénieur chez Renault)



Introduction aux splines

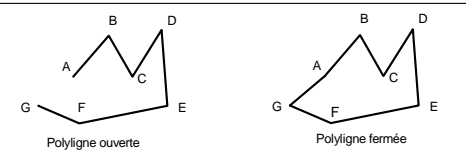
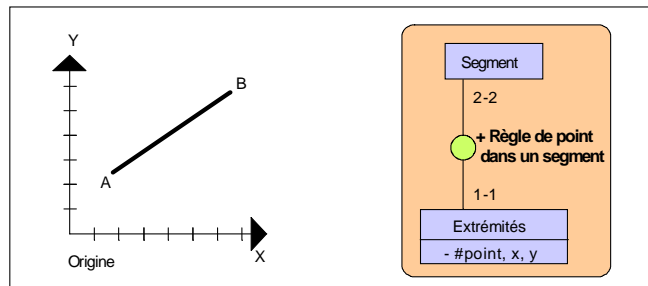
4 – Modélisation des objets spatiaux

- 4.1 Modélisation des segments, des polygones et des mixtilignes
- 4.2 Modélisation des polygones
- 4.3 Modélisation des graphes
- 4.4 Modélisation des terrains

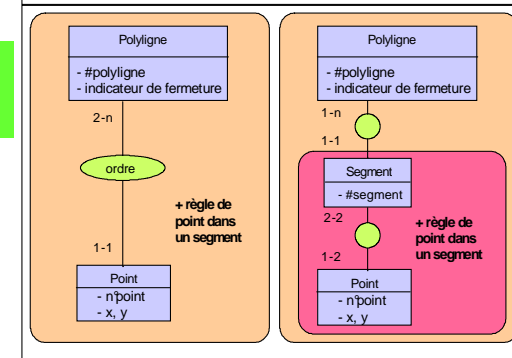
4.1 Modélisation des segments, des polygones et des mixtilignes

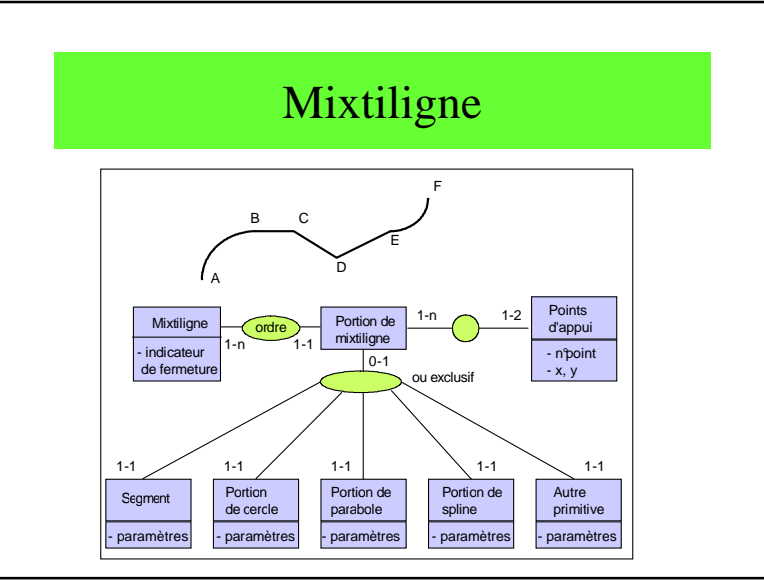
- Représentation des segments
- Représentation des polygones
- Représentation des mixtilignes

Modélisation d'un segment

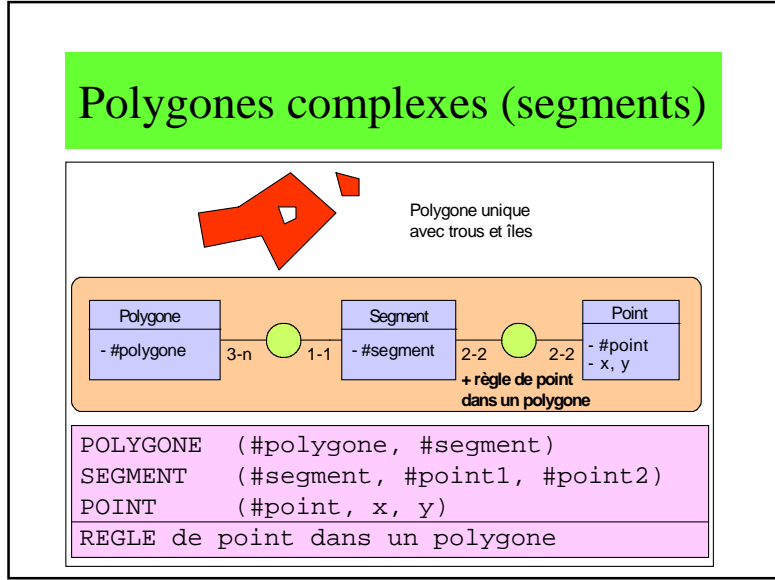
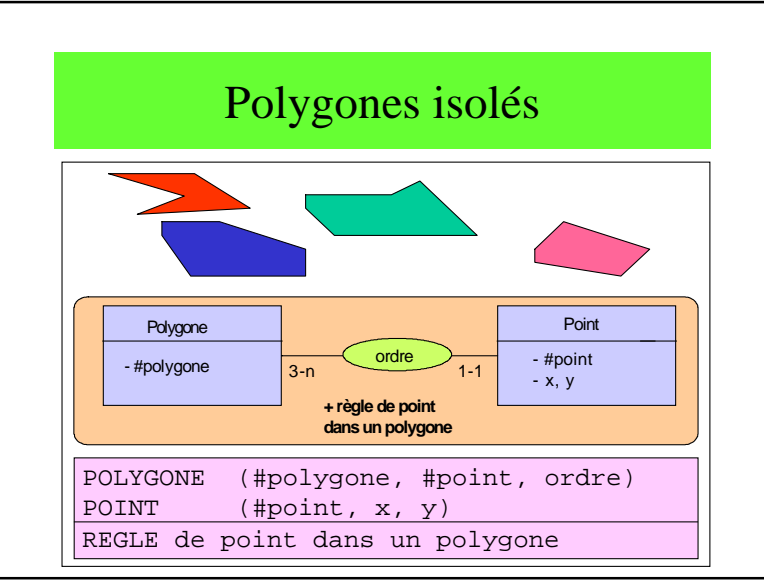


Polygone

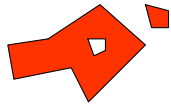




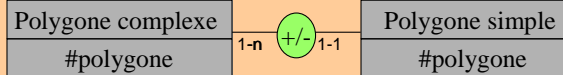
- ### 4.2 Modélisation des polygones
- Polygone simple isolé
 - Polygones complexes isolés
 - Tessellations irrégulières
 - Polygones bordés par des polygones
 - Tessellation limitée par des mixtilignes
 - Orientation des polygones dans une tessellation
 - Organisation hiérarchique des territoires



Polygones complexes (morceaux)



Polygone unique avec trous et îles



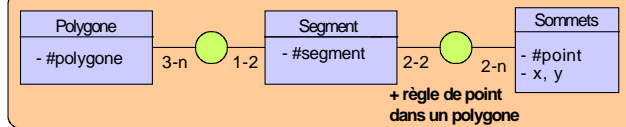
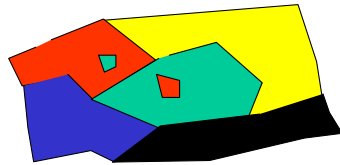
POLYGONE-NON-CONNEXE (#polygone-non-connexe, #polygone, connexité)
 POLYGONE (#polygone, etc...)

REGLE de point dans un polygone

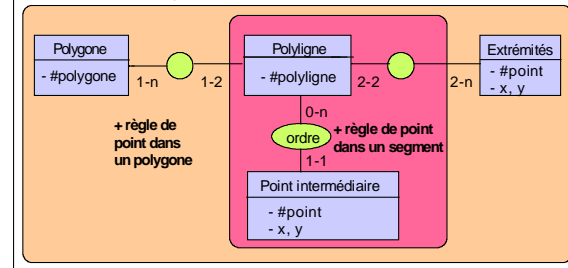
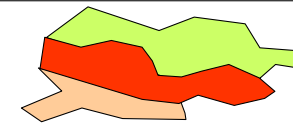
Orientation des polygones

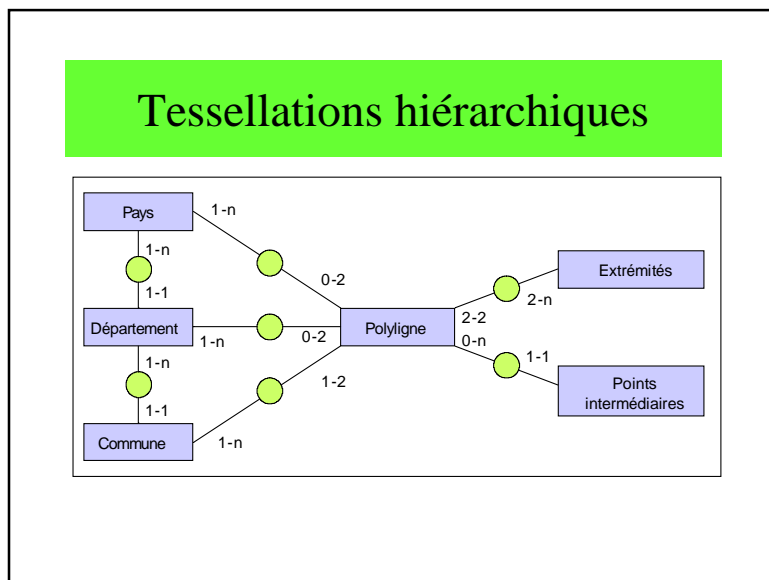
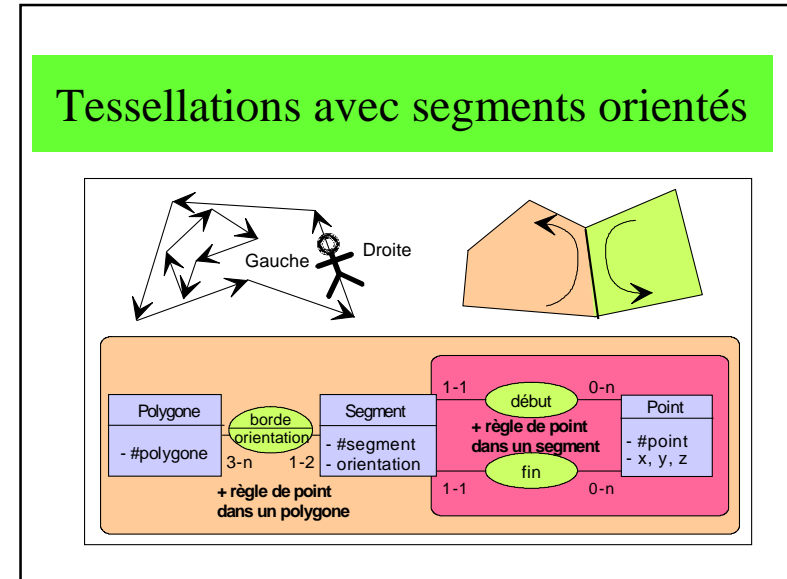
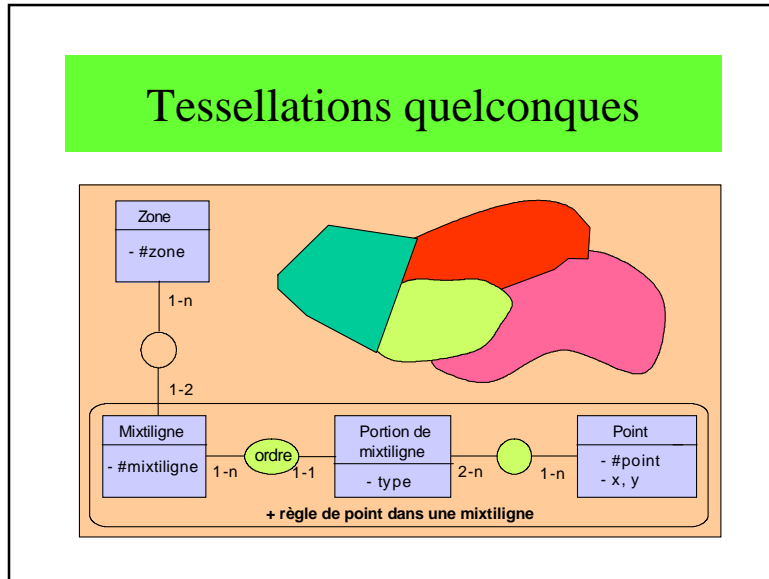
POLYGONE (#polygone, #segment, #segment-suivant)
 SEGMENT (#segment, #point1, #point2)
 POINT (#point, x, y)
 REGLE de point dans un polygone

Tessellations polygonales quelconques



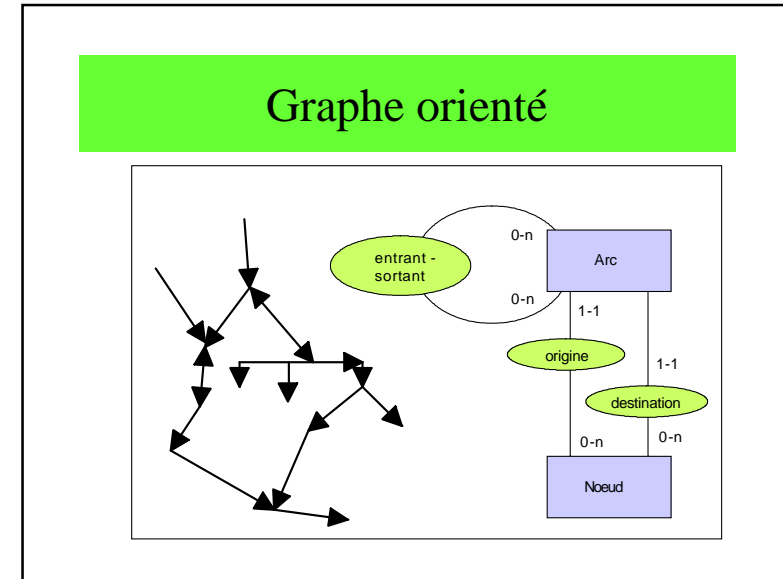
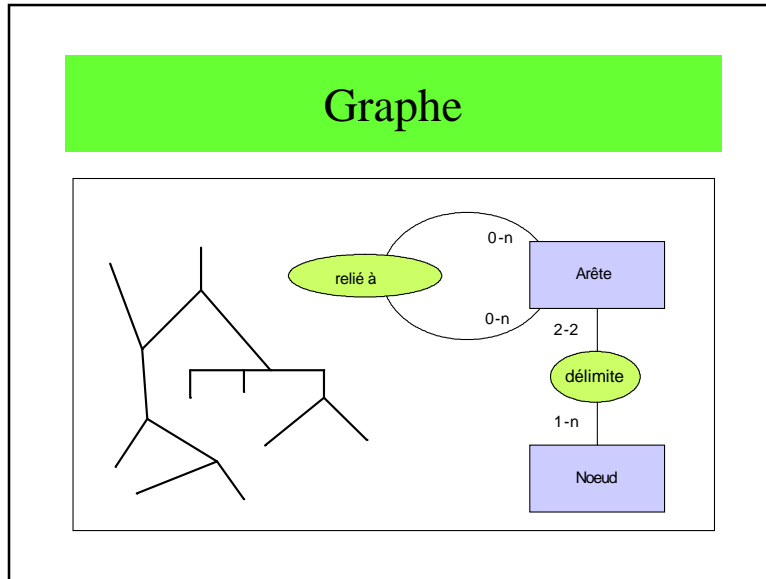
Tessellations avec polygones



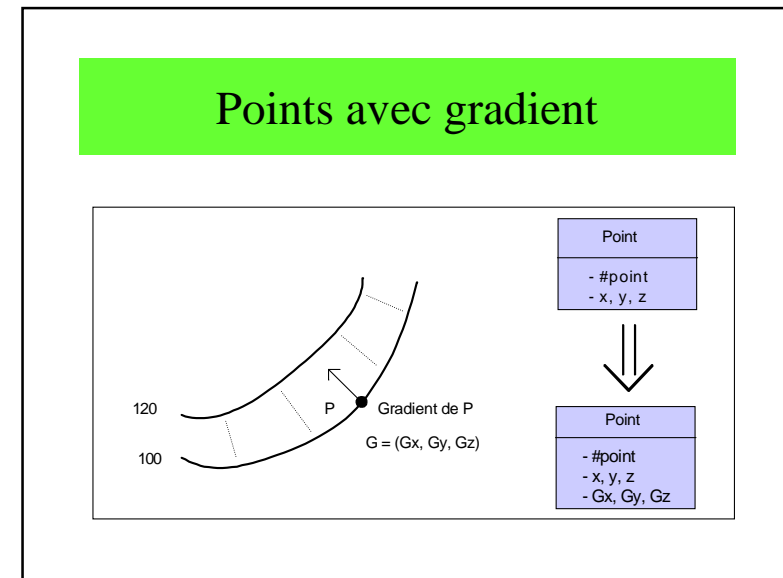


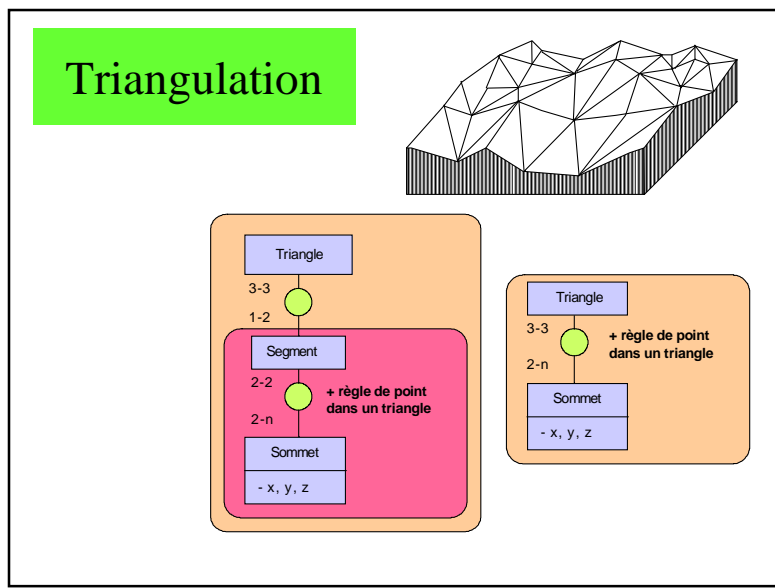
4.3 Modélisation des graphes

- Graphe non-orienté
- Graphe orienté



- ### 4.4 Modélisation des terrains
- Points avec gradients
 - Tessellations triangulaires
 - Grilles orthogonales (ou maillage)
 - Courbes de niveau





a/ représentation directe

```

TRIANGLE (#triangle, #somet1, #somet2, #somet3)
SOMMET (#somet, x, y, z)
et
REGLE de point dans un triangle
    
```

b/ représentation orientée segment

```

TRIANGLE (#triangle, #segment1, #segment2, #segment3)
SEGMENT (#segment, #point1, #point2)
SOMMET (#somet, x, y, z)
et
REGLE de point dans un triangle

en incluant davantage de topologie :

SEGMENT (#segment, #point1, #point2, #triangle-droit,
        #triangle-gauche)
    
```

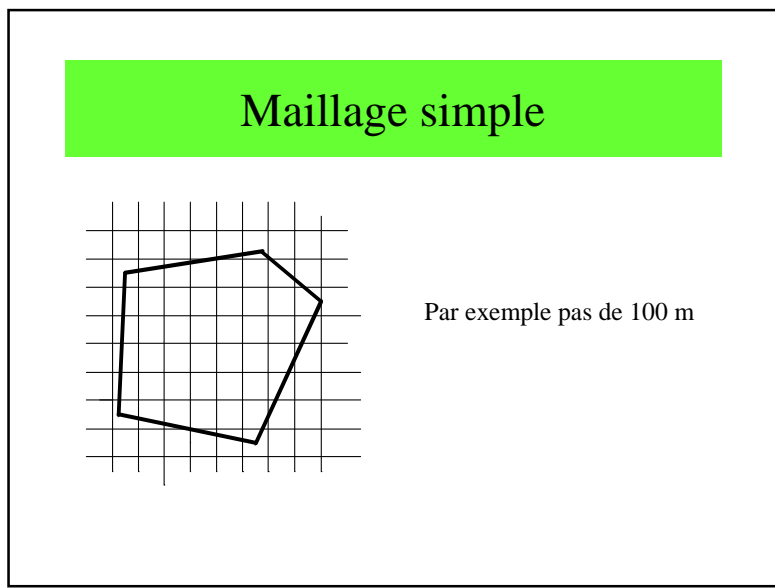
Interpolation planaire pour estimer z

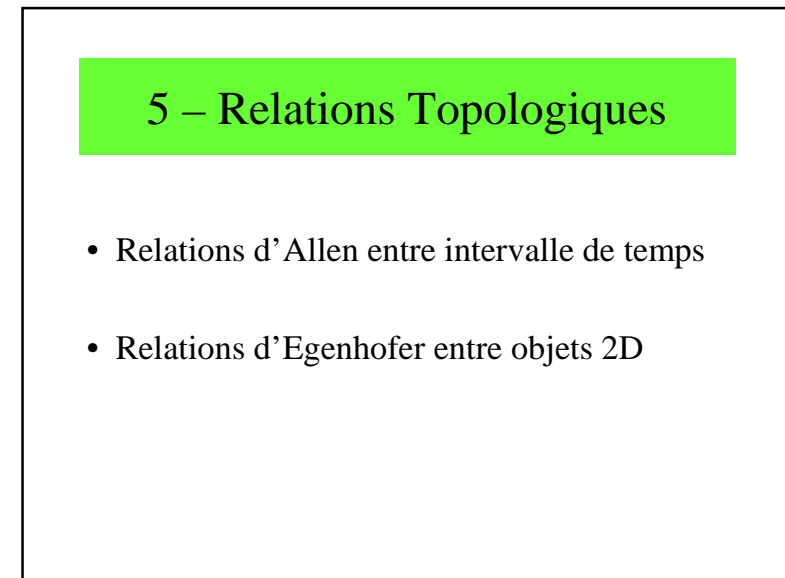
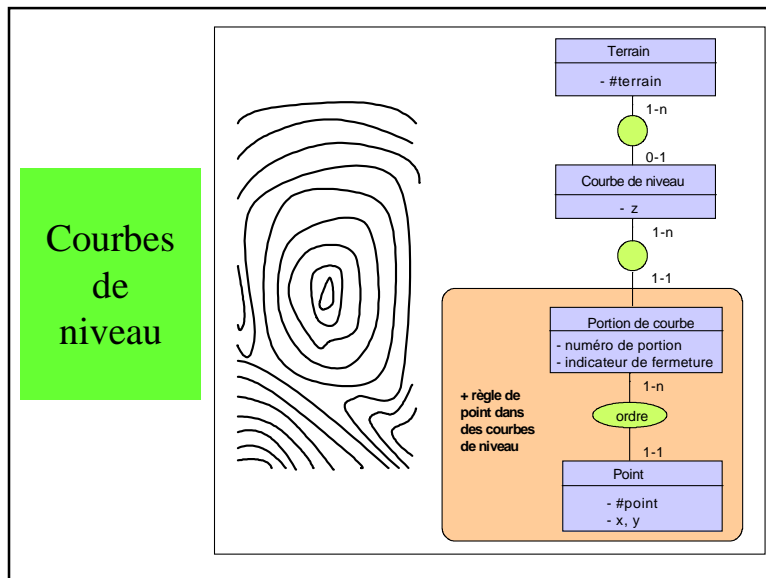
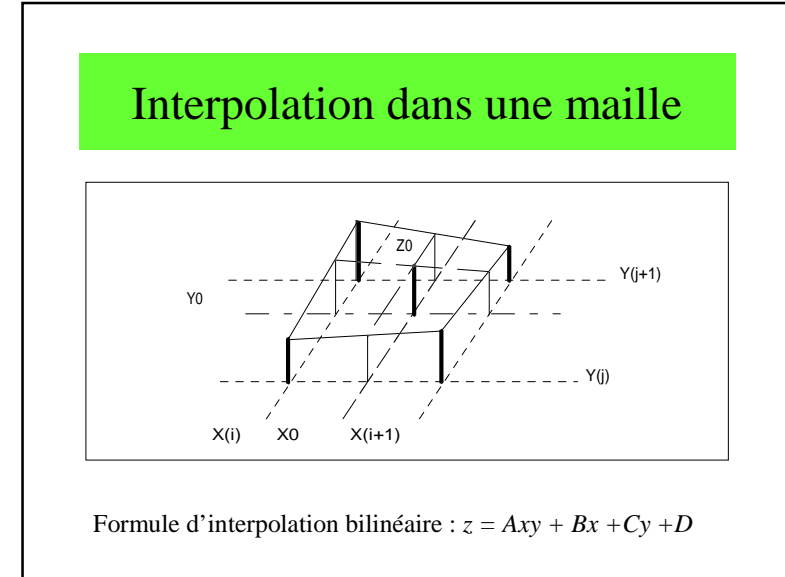
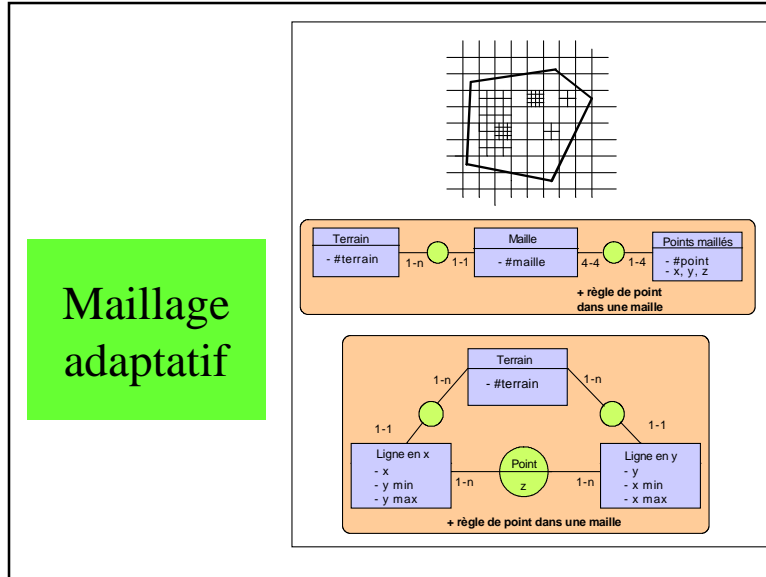
- Chaque triangle est situé dans un plan dont l'équation est :

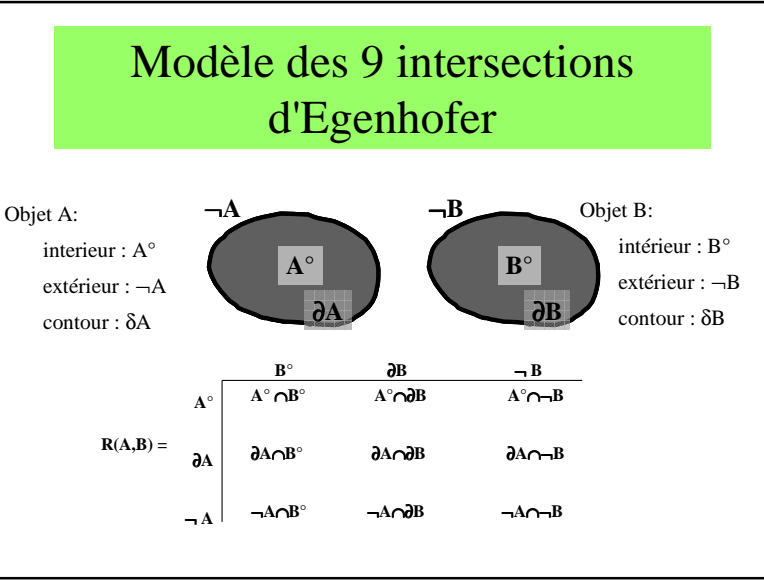
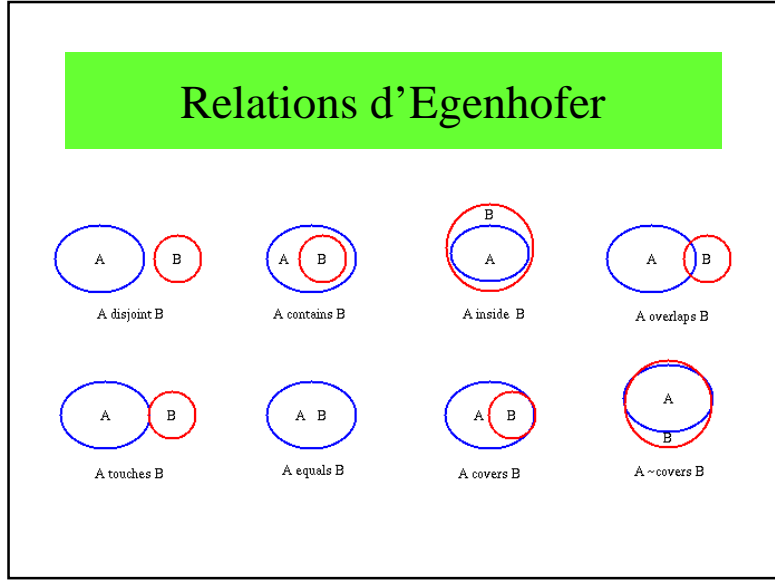
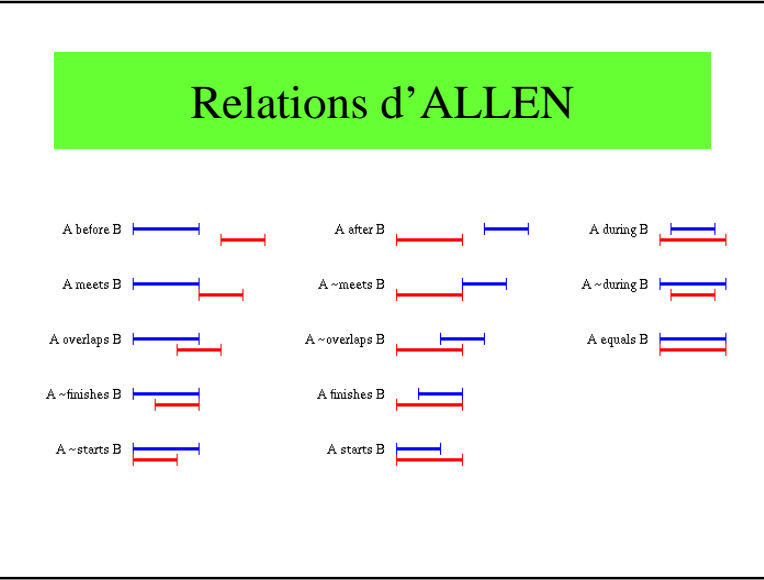
$$z = Ax + By + C$$
- Comment connaître les 3 paramètres A , B et C ?
- Nous avons trois sommets donc :
 - 3 équations à 3 inconnues
 - Détermination de A , B et C

```

TRIANGLE (#triangle, #segment1, #segment2, #segment3, A, B, C)
    
```



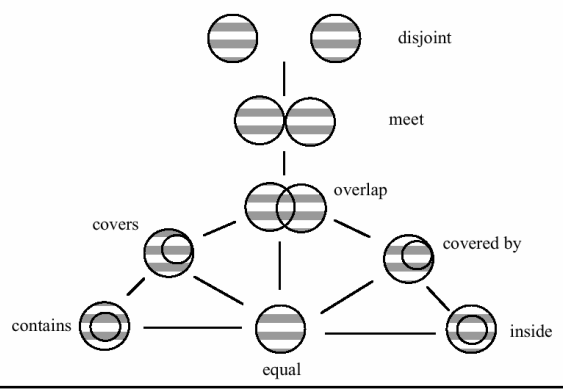




$$R(A, B) = \begin{pmatrix} A^\circ \cap B^\circ & A^\circ \cap \partial B & A^\circ \cap \neg B \\ \partial A \cap B^\circ & \partial A \cap \partial B & \partial A \cap \neg B \\ \neg A \cap B^\circ & \neg A \cap \partial B & \neg A \cap \neg B \end{pmatrix}$$

disjoint $\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \\ \neg \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \end{pmatrix}$	meet $\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \\ \neg \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \end{pmatrix}$	overlap $\begin{pmatrix} \neg \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \\ \neg \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \end{pmatrix}$	contains $\begin{pmatrix} \neg \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \end{pmatrix}$
equal $\begin{pmatrix} \neg \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \neg \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \end{pmatrix}$	coveredBy $\begin{pmatrix} \neg \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \neg \emptyset & \neg \emptyset & \emptyset \\ \neg \emptyset & \neg \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$	inside $\begin{pmatrix} \neg \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \neg \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \neg \emptyset & \neg \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$	covers $\begin{pmatrix} \neg \emptyset & \neg \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg \emptyset \end{pmatrix}$

Voisinage des relations topologiques



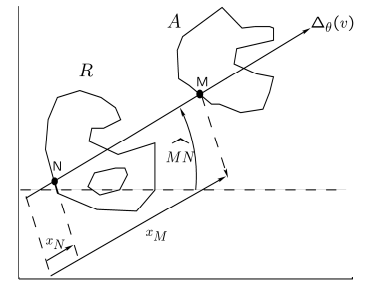
Traitement d'un couple de points

$$M \in A \cap \Delta_\theta(v)$$

$$N \in R \cap \Delta_\theta(v)$$

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

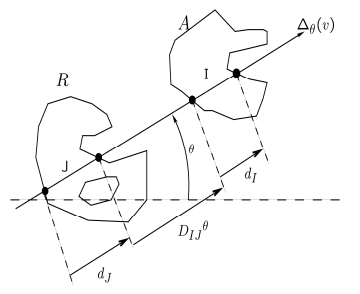
$$\overline{NM} \rightarrow \varphi(\overline{NM})$$



Traitement d'un couple de segments

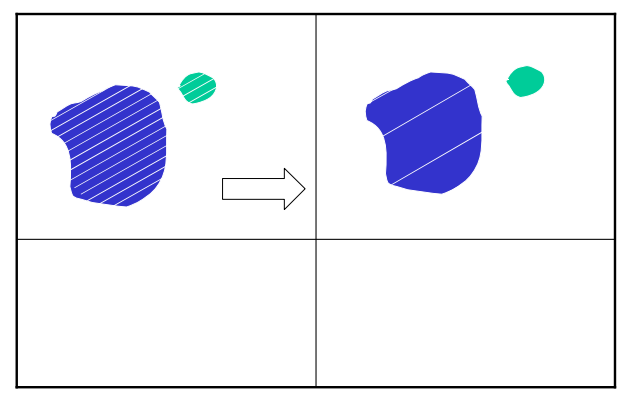
$$I \subseteq A \cap \Delta_\theta(v)$$

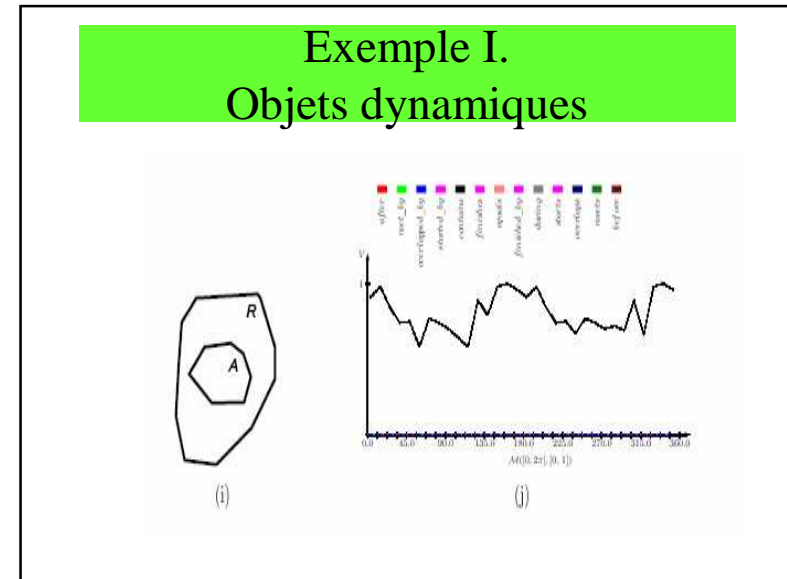
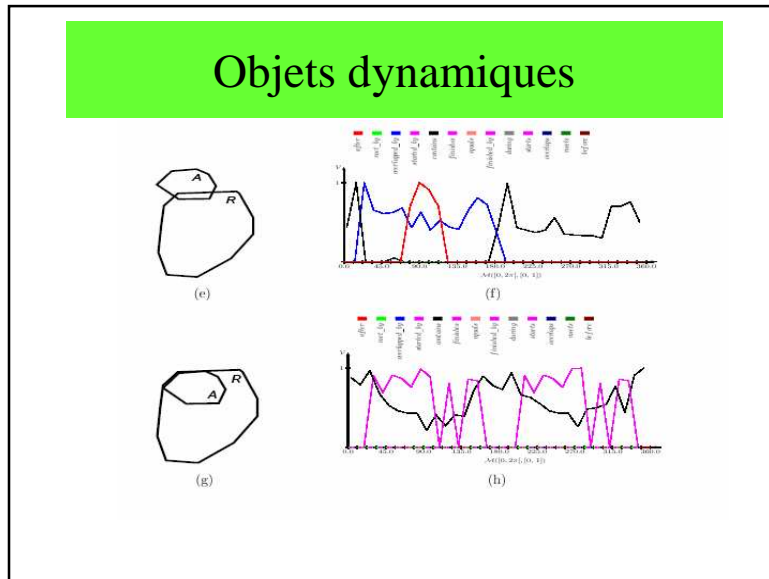
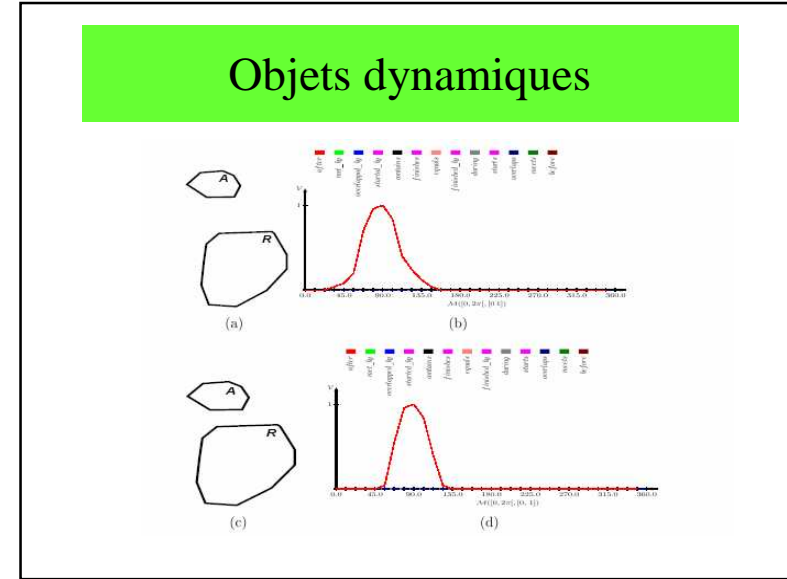
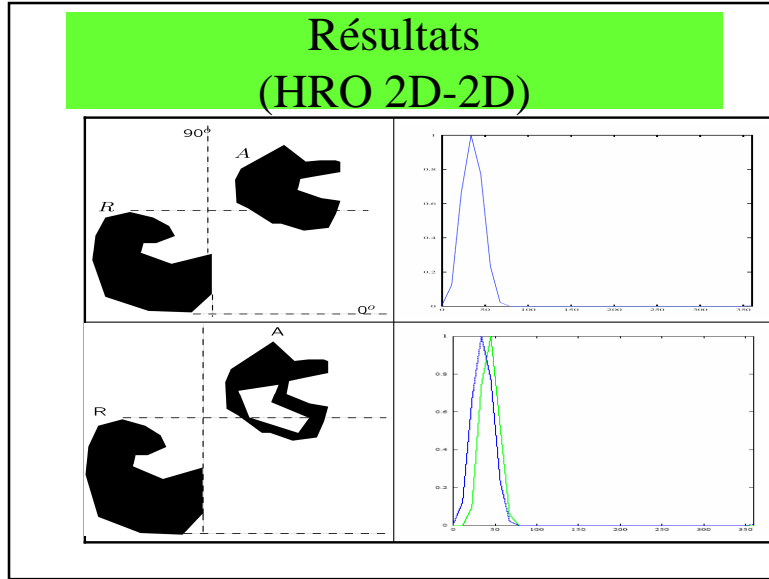
$$J \subseteq R \cap \Delta_\theta(v)$$



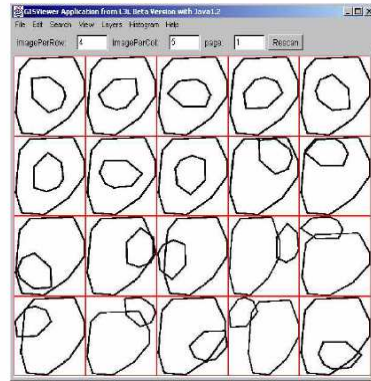
A se trouve dans la direction θ par rapport à **R**

Discrétisation des objets

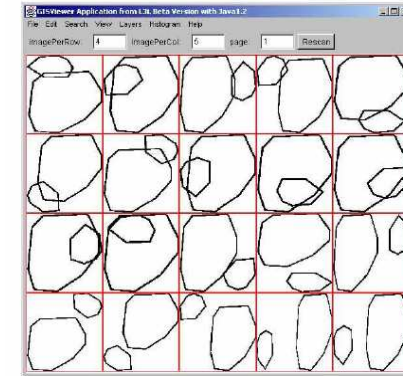




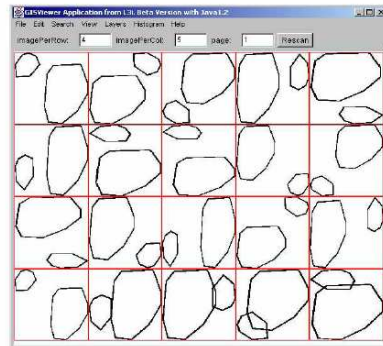
Recherche de configurations spatiales similaires (1/3)



Recherche de configurations spatiales similaires (2/3)



Recherche de configurations spatiales similaires (3/3)



6 - Conclusions

- Importance de la géométrie euclidienne
- Nécessité de revoir les algorithmes afin d'améliorer leur efficacité
- Problème des structures de données
- Importance de la topologie dans le raisonnement géométrique