

Chapitre III

Des grammaires de formes à la géométrie fractale

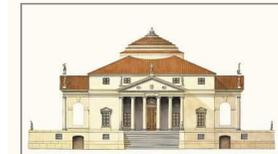
3.1 – Grammaires de formes

- Définitions
- Exemples
- Conclusions

Exemple



Andrea PALLADIO



Villa Capra, detta La Rotonda a Vicenza (1550-61).



Grammaires de formes

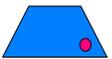
- Grammaire (ensemble de règles) pour décrire les formes géométriques
- Vocabulaire
 - formes terminales
 - marqueur
 - forme initiale
- Exemple:



Forme terminale



Marqueur



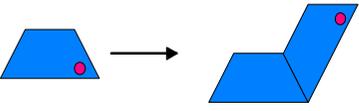
Forme initiale

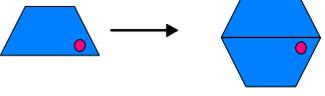
Règles et Programmes

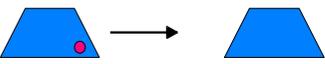
- Règles de production
 - Forme A \longrightarrow Forme B
 - Formes éventuellement marquées
 - Les marqueurs permettent la répétition
- Programme
 - Suite de règles
 - Codage

Exemple de grammaire de formes

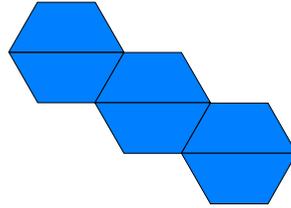
Règle 1 

Règle 2 

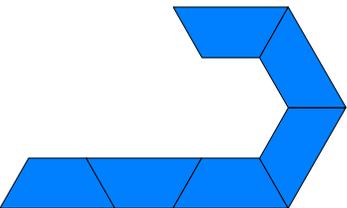
Règle 3 

Règle 4 

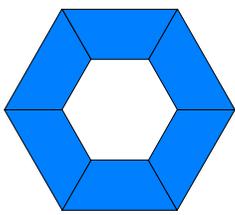
Programme: {3, 3, 3, 4}



Programme: {1, 1, 2, 2, 2, 4}



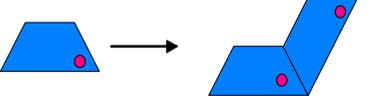
Programme: {2, 2, 2, 2, 2, 4}



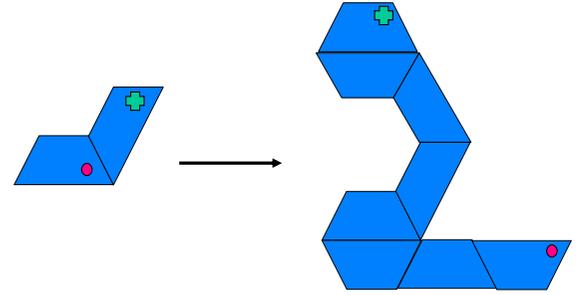
Exemples de formes
générées par la
grammaire précédente

Autre exemple

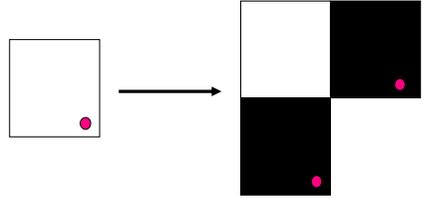
Règle 5 

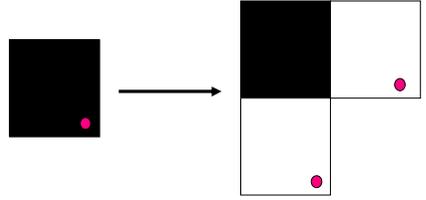
Règle 6 

Exemple avec deux marqueurs

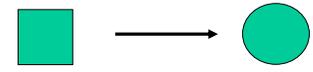
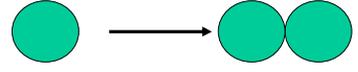
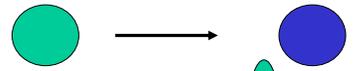
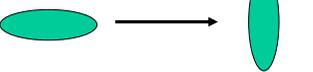
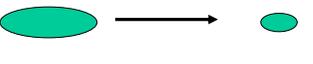


Damier

Règle 1 

Règle 2 

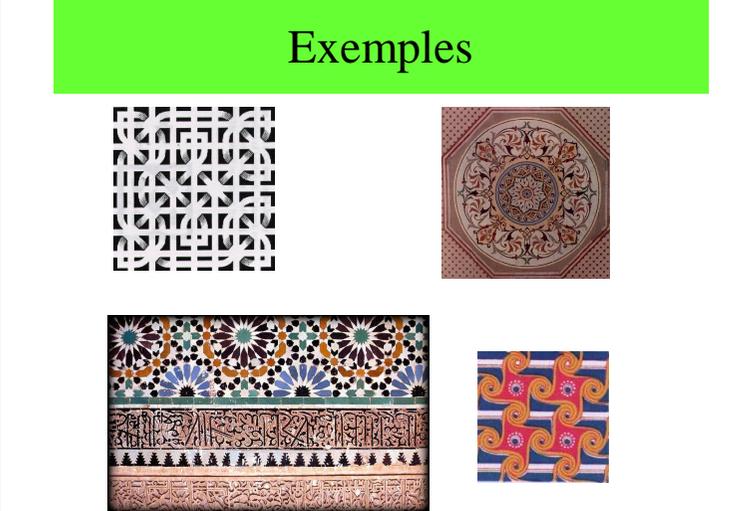
Exemples de règles

- Changement de forme 
- Répétition 
- Changement de couleur 
- Rotation 
- Changement de taille 

Exemples

- Construction
- Architecture
- Urbanisme
- Mosaïque
- Décoration, mobiliers

Exemples



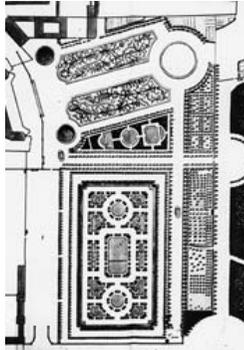
Tartans




Façades



Jardins



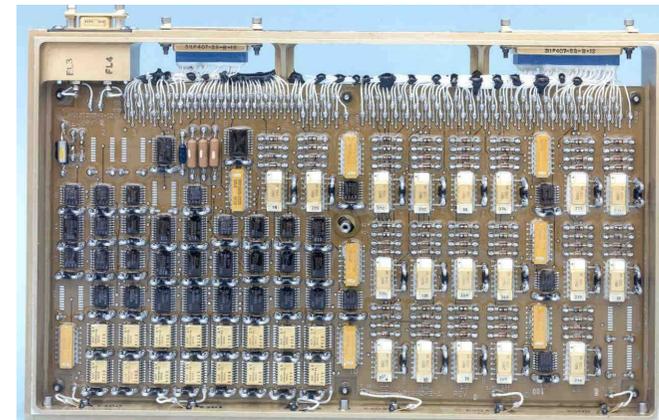
Lotissement (terrace houses)



Divers



En électronique



Autre Exemple

Ice-ray grammar

Exemples

Portail organisé en grammaire

Conclusions sur les grammaires de formes

- Beaucoup d'objets fabriqués par l'homme sont susceptibles d'être (re)produits par des grammaires de formes
- Nombreux exemples en informatique
- "Portails bien pensés"

3.2 – Introduction à la Géométrie Fractale

- 3.2.1 - Géométrie euclidienne/géométrie fractale
- 3.2.2 - Présentations d'objets fractals
- 3.2.3 - Fractales stochastiques
- 3.2.4 - Courbes de Peano
- 3.2.5 - Courbes de Julia
- 3.2.6 - Systèmes de Lindenmeyer
- 3.2.7 - Conclusions

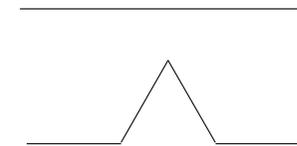
3.2.1 - De la géométrie euclidienne à la géométrie fractale

- Présentation de quelques objets fractals
- Benoît Mandelbrot
- Formes récursives (autosimilarité)

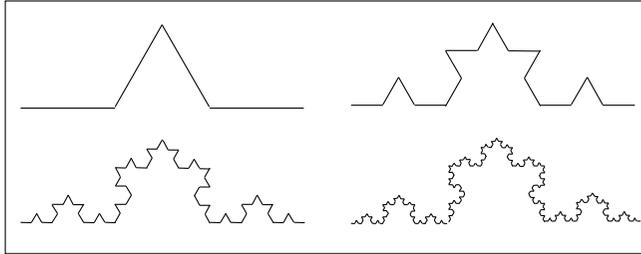


Définition

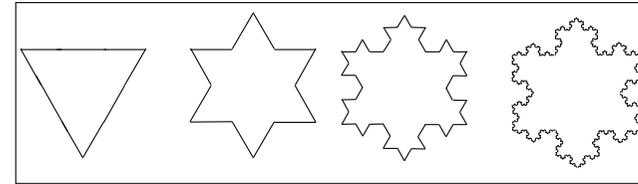
- Répétitions récursives
- Initiateur
- Répéteur



Courbe de Koch : étapes initiales



Le flocon de Koch



Périmètre du flocon

- Etape 1 : $l_1 = 3$
- Etape 2 : $l_2 = 3 \times (4/3) = 4$
- Etape n : $l_n = l_{n-1} \times (4/3) = 3 \times (4/3)^n$

Surface du flocon

- $S_1 = \sqrt{3}/4$ (posons $\alpha = \sqrt{3}/4$)
- $S_2 = 4 \alpha / 3$
- Suite convergente $S = \frac{8\alpha}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

Dimension fractale

- Dimension fractale (Hausdorff-Besicovitch)

$$D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)}$$

- D = dimension
- n = longueur du segment
- r = facteur d'autosimilarité

Dimension du flocon de Koch

$$D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)}$$

- $n = 4$
- $r = 1/3$
- $D = \ln(4)/\ln(3) = 1.2618$

Courbe de Lévy

Courbe du dragon d'Heighway

Générateur d'îles

point de départ première étape seconde étape

3.2.2 – Autres objets fractals

- Poussière de Cantor
- Tapis de Sierpinski

<http://www.mathcurve.com/fractals/fractals.shtml>

Poussière de Cantor et objets dérivés

Poussière de Cantor Peigne de Cantor

Collier de Cantor Ville de Cantor

Tapis de Sierpinski, etc.

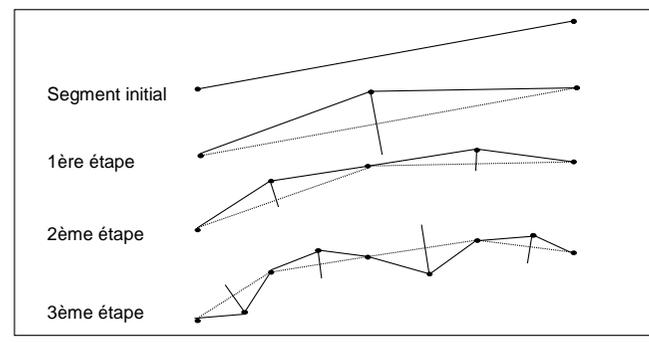
Tapis de Sierpinski Dentelle de Sierpinski

Octogone de Sierpinski Eponge de Menger

3.2.3 - Fractales stochastiques

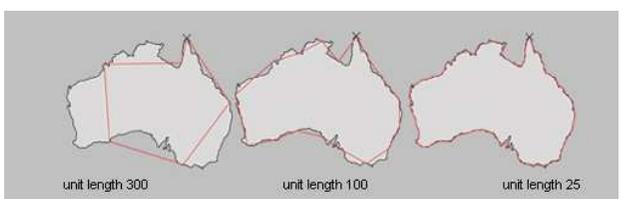
- Variations aléatoires
- Terrains
- Plantes
- etc.

Déplacement aléatoire du milieu d'un segment



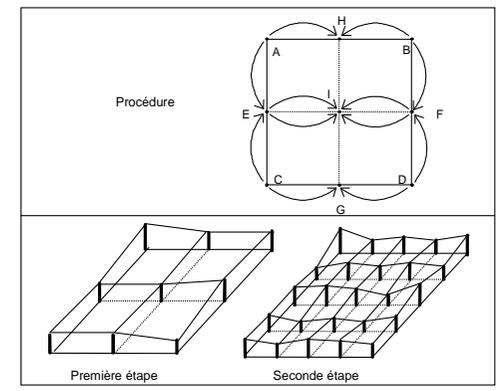
$D \approx 1.2$

Australie fractale



Coastline		
unit length [without scale]	total length	D=d+1
300	1,599.00	
200	1,740.00	1.2084
100	1,921.00	1.1428
50	2,031.00	1.0803
25	2,391.75	1.1581
fractal dimension [slope]		1.1505

Méthode d'interpolation stochastique des terrains



Formule de calcul

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + u\sigma_0 2^{-lh}$$

u : variable aléatoire : $Loi(u) = Gauss(0,1)$

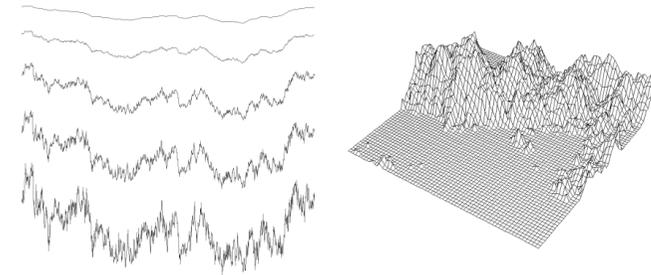
l : niveau de récursivité

h : paramètre fractal : $h = 3 - D$

σ_0 : variance initiale

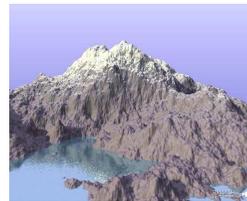
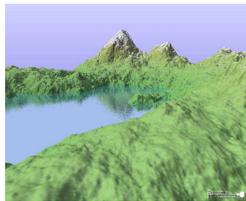
Pour terrain $D \approx 2.3$

Plusieurs étapes



Dan Connelly

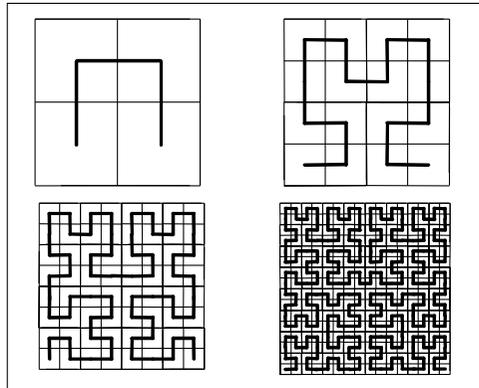
<http://www.flash.net/~djconnel/Vue/>



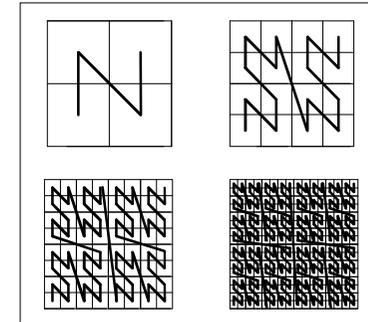
3.2.4 - Les courbes de Peano

- Définitions et propriétés élémentaires
- Courbe de Hilbert et courbe en N de Peano
- Codification des clés sur les courbes
- Remarque $D = 2$
- Bijection surface / ligne

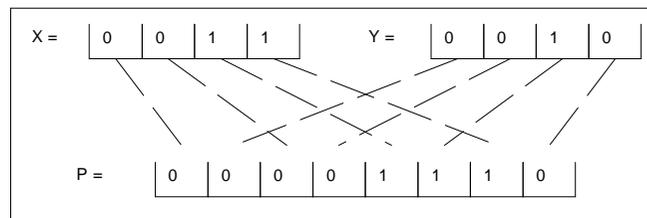
Etapas initiales de la courbe de Hilbert



Premières étapes de la courbe en N de Peano

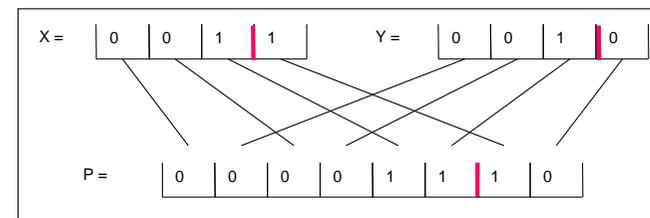


Obtention des clés de Peano par entrelacement de bits



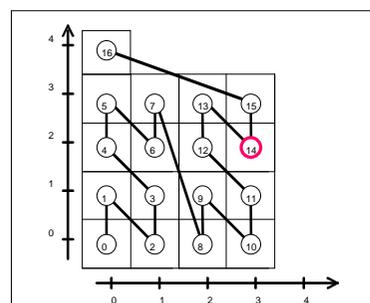
$(x = 3) \text{ et } (y = 2) \Rightarrow p = 14$

Chiffres après virgule

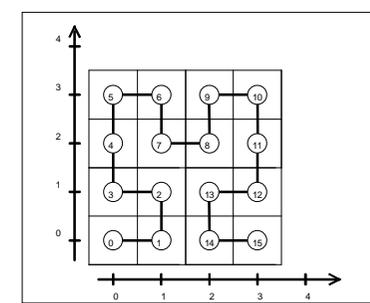


$(x = 1,5) \text{ et } (y = 1,0) \Rightarrow p = 3,5$

Ordre en N de Peano



Ordre de Hilbert



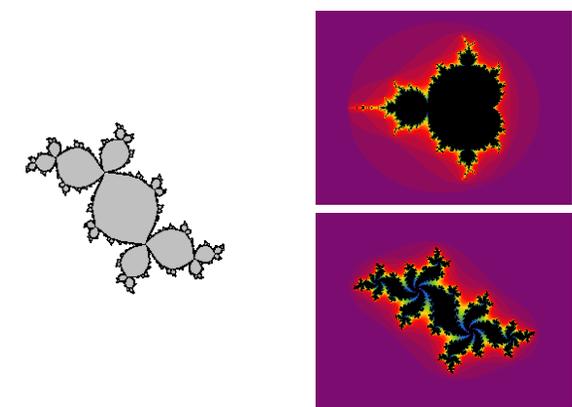
3.2.5 - Courbes de Julia

- Soit un nombre complexe z_0 de départ
- et une constante complexe c ,

$$z_{n+1} \leftarrow z_n^2 + c,$$

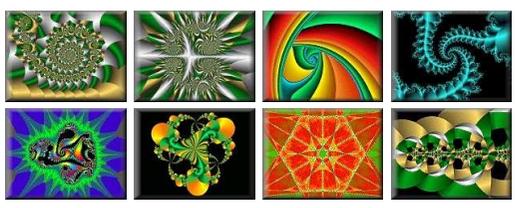
- Avec $|c|, |z| \in [0..1]^2$

Lapin de Julia et Ensemble de Mandelbrot



Jean-Pierre Loubet

<http://fractals.iut.u-bordeaux1.fr/jpl/jpl01a.html>



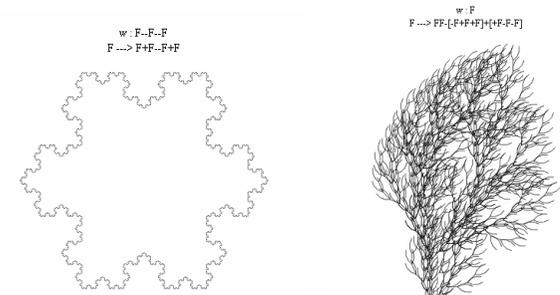
3.2.6 - Systèmes de Lindenmeyer

- Inventés par Aristid Lindenmeyer
- Ensemble de règles de ré-écritures (grammaire) pour engendrer des formes :
 - plantes
 - fleurs
 - etc.

Définition

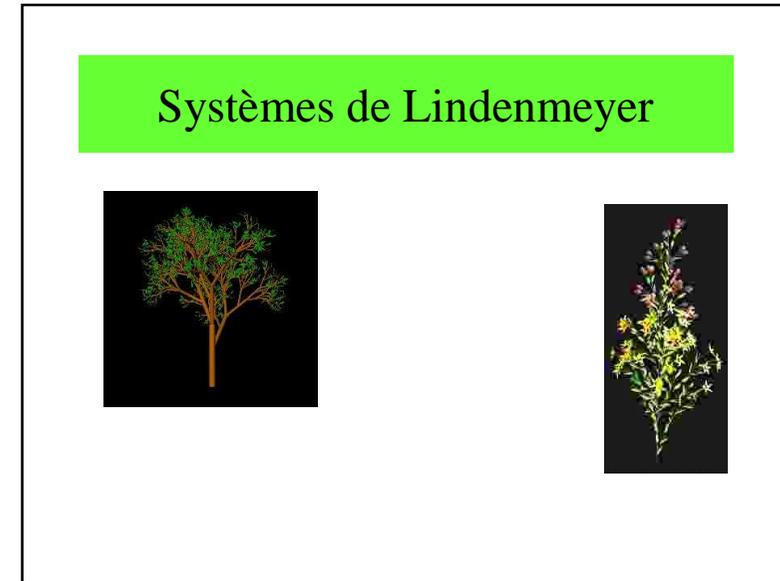
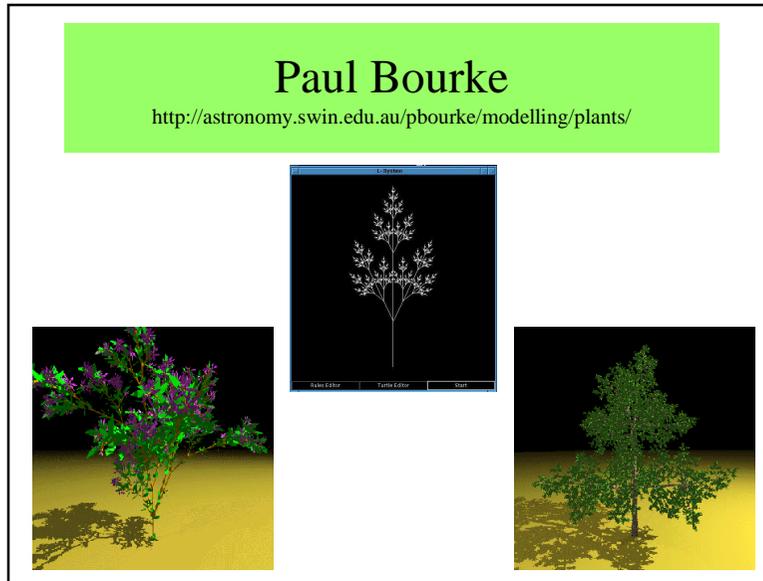
- Formellement, un L-system est composé de trois éléments :
 - un alphabet
 - un mot initial : w
 - un ensemble de règles de productions : P

Exemples



F : Forward
 + : tourner d'un certain angle fixé,
 - : tourner du même angle dans l'autre sens

4^{ème} génération
 $\alpha = 22,5^\circ$



3.2.7 – Conclusions (fractales)

- Périmètre de la Corse ?
- Embellissement cosmétique
- Réalité virtuelle

3.3 – Conclusion finale

- Principes de base pour la génération des images
- Usage
 - bases d'images
 - bases de données géographiques
 - bases d'objets tri-dimensionnels
 - conception des portails visuels