« Mélange de cartes et probabilités »
Deuxième partie

Situation Exemple de Mathématiques
Filière « Formation Active en Sciences »

22 Septembre 2006

Résumé

Cette situation exemple aborde les probabilités par les cartes, plus précisément par le mélange des cartes. La première partie est consacrée à l'introduction au problème et à la recherche bibliographique, la seconde à des expérimentations/simulations.

Note : on considère que la machine à mélanger fait de *bons mélanges* américains.

1 Un modèle mathématique du mélange américain

Le mélange américain est divisé en deux étapes : la coupe, puis le mélange (l'imbrication des deux parties), figure 1.

En général, quand on bat un paquet, après la coupe les deux parties ne sont qu'approximativement égales et lors du mélange les deux paquets n'alternent pas exactement. Heureusement d'ailleurs, car le but de l'opération est que l'on ne puisse pas deviner la position des cartes une fois le paquet battu, même si on la connaissait avant.

Pour répondre formellement aux questions que l'on se pose sur le mélange, il faut disposer d'un modèle mathématique qui décrive la façon dont on bat les cartes, puis arriver à en faire une analyse assez précise. Le modèle dont il sera question ici a été proposé par les mathématiciens Gilbert et Shannon en 1955, et indépendamment par Reeds en 1981, et il a été testé par P. Diaconis qui a vérifié qu'il décrivait de façon réaliste le battage des cartes pratiqué par exemple dans les casinos.

1.1 La coupe

La première étape du mélange à modéliser est celle de la coupe du paquet de cartes en deux parties *à peu près égales*. Nous allons voir ce qu'est cet *à peu près* d'un point de vue probabiliste.

On dispose d'un paquet de n cartes, que l'on commence par le *couper* en deux paquets de j et $n-j$ cartes, le nombre j étant choisi entre 0 et n, avec la *loi binomiale* c'est à dire que l'on a une probabilité $\frac{1}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$ que j soit égal à k.

La *formule du binôme* nous dit que $\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} = 2^n$ donc la somme des probabilités fait bien 1. Si on trace le graphe de cette probabilité en fonction de k, on observe *une courbe*

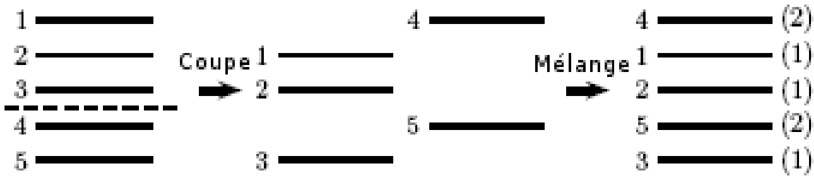

FIG. 1 – Schématisation du mélange américain

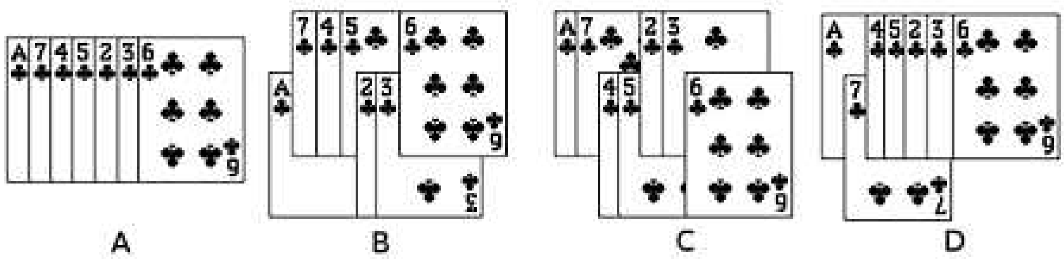

FIG. 2 – Suites montantes dans la séquence A745236

en cloche, dont le maximum se situe en $n/2$, et dont la plus grande partie se trouve concentrée entre $n/2 - \sqrt{n}$ et $n/2 + \sqrt{n}$.

Cela modélise de façon raisonnable ce que peut faire un batteur de carte d'une adresse moyenne en essayant de couper le paquet en deux parties égales.

1.2 L'imbrication

Ensuite, une fois que le paquet a été coupé, *on mélange* les deux parties de la façon suivante : supposons qu'il reste a_1 cartes dans le premier paquet et a_2 dans le second, alors on choisit la carte du dessous du premier paquet avec probabilité $\frac{a_1}{a_1 + a_2}$, ou bien celle du second avec probabilité $\frac{a_2}{a_1 + a_2}$, et on continue ainsi, avec $a_1 - 1$ cartes dans le premier et a_2 dans le second, ou bien a_1 dans le premier et $a_2 - 1$ dans le second suivant les cas, jusqu'à épuisement des deux paquets.

Là encore ce choix semble raisonnable, car *plus l'un des paquets est gros* par rapport à l'autre, *plus on a de chance de choisir* la carte de ce paquet.

Exemple : au départ, les deux tas contiennent respectivement $a_1 = j$ et $a_2 = n - j$ cartes. La probabilité de choisir la carte du premier tas est donc $\frac{j}{n}$, celle de prendre la carte du deuxième tas $\frac{n-j}{n}$. Supposons que nous ayons pris une carte du premier tas au premier coup. Les tas contiennent alors $j-1$ et $n-j$ cartes. La probabilité de reprendre la carte du dessous du premier tas est alors $\frac{j-1}{n-1}$, celle de prendre la carte du deuxième tas $\frac{n-j}{n-1}$. Et ainsi de suite.

1.3 Les suites montantes

> Une suite montante est une sous-suite maximale constituée de valeur faciale successives croissantes. Tout classement d'une jeu de carte peut être identifié de façon unique par ses sous-suites montantes.
> Bayer et Diaconis

Pour trouver les sous-suites montantes d'un jeu de cartes, on procède ainsi :

1. on repère la carte 1,
2. si la carte 2 est avant la carte 1, alors (1) est une sous-suite montante, sinon on cherche 3,
3. si 3 est avant 2, alors $(1, 2)$ est une sous-suite montante, sinon on cherche 4,
4. et ainsi de suite jusqu'à épuisement du paquet.

Par exemple, avec 7 cartes à Trèfles (figure 2-A), on identifie 3 suites montantes :

1. (As,2,3), figure 2-B,
2. (4,5,6), figure 2-C,
3. (7), figure 2-D.

En général, au début, chaque battage multiplie par deux le nombre de suites montantes dans le paquet, au bout de 3 battages on a donc $2^3 = 8$ suites montantes qui contiennent en moyenne $52/8 = 6,5$ cartes. Trouver les suites montantes est un moyen assez facile d'identifier l'arrangement des cartes dans le paquet : *plus leur nombre est grand, plus le paquet est mélangé.*

Pour vous convaincre de ce résultat effectuez l'expérience suivante :

1. classer un jeu de carte de l'As au Roi à Trèfles, puis Carreaux, Coeurs et enfin Piques (l'ordre croissant des couleurs au bridge),
2. couper le jeu en deux, à peu près au milieu,
3. mélanger les deux parties du jeu à l'aide de la machine à mélanger (ou à la main au mélange américain),
4. compter le nombre de suites montantes (il y en a deux),
5. mélanger encore une fois, compter le nombre de suites montantes (il y en a quatre),
6. mélanger encore une fois, compter le nombre de suites montantes (il y en a huit).

2 Deuxième partie : expérimentation et simulation

Dans cette seconde partie de la situation exemple vous allez utiliser une applet Java qui simule 9 mélanges consécutifs (à partir d'un jeu classé) selon le modèle GSR : `http://www.davidson.edu/math/chartier/Shuffle/simulation.html` et affiche le nombre de sous-suite montantes à chaque mélange.

Avant de commencer les questions, il est conseillé de se familiariser avec l'applet.

1. Ordonner le jeu dans le même ordre initial que l'applet (de l'As au Roi à Trèfles, Carreaux, Coeurs et Piques). Simuler les mélanges avec l'applet, effectuer les mélanges avec la machine. La modélisation GSR vous parait-elle proche de ce que fait la machine ?
2. Peut on n'avoir encore *qu'une seule* sous-suite montante après un seul mélange ? Essayer de voir si cela arrive en mélangeant un grand nombre de fois, plusieurs milliers. Quelle est la probabilité qu'un tel événement arrive ?
3. Quel est l'ordre utilisé dans l'applet pour faire correspondre à chaque carte un entier de 1 à 52 ?
4. Si on a en moyenne R_{moy} sous-suite montantes dans un jeu, alors leur taille est en moyenne de $52/R_{moy}$ cartes. Vous attendez-vous à ce que la plupart des sous-suite montantes soient assez proches de ce nombre ou attendez vous une à une disparité ? Vérifier expérimentalement.
5. A partir de quel mélange devient-il difficile de prédire si au prochain le nombre de sous-suite montantes va augmenter ou diminuer ? Par exemple, si le jeu à déjà été battu 3 fois, au prochain mélange, aura-t-on plus ou moins de sous-suite montantes ?
6. On a déjà entendu « Battre le jeu 7 fois ? Mais c'est pas assez ! Moi je le bat chaque fois 12 fois ! ». Commenter cette affirmation.
7. Lancer un grand nombre de simulations (500). Quel est en moyenne le nombre de sous-suite montantes après 7, 8 ou 9 mélanges ? Cliquer sur l'histogramme du 7ème mélange, que signifie-t-il ? La courbe verte correspond-elle aux prévisions ?
8. Mettre 1 comme nombre de simulation et relancer là jusqu'à avoir un nombre de sous-suite montantes supérieur ou égal à 29. Le prochain mélange va-t-il augmenter ou diminuer ce nombre ?

Illustration de la situation exemple

Ordonner le jeu, mélanger, prendre une carte du jeu puis la remettre à un autre endroit du paquet, mélanger à nouveau. Combien de suites montantes obtient-on ainsi ? Que remarque-t-on ?

Proposez un tour de magie basé sur cette observation.

Sources

Ce sujet a été proposé par Romuald Thion dans le cadre de la semaine Situation Exemple de la filière FAS de l'INSA de Lyon.

La majeure partie de l'information provient d'une traduction par Philippe Biane *« Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ? »* d'un article de Dave Bayer et Persi Diaconis *« Trailing the dovetail shuffle to its lair »*.

Les illustrations de suites montantes ainsi que l'applet proviennent du site de Timothy P. Chartier et Reuben K. Fries *« Rising to the occasion of modeling card shuffling - Card shuffling, mathematical modeling, and Markov chains »*.

Enfin, les illustrations des mélanges et l'annexe sur le mélange à la queue d'aronde sont extraits du *« Cours de cartomagie moderne »* de Roberto Giobbi.