Université Lyon 1
Licence informatique 3ème année

LIF15

Théorie des langages formels

Responsable de l'UE :

Sylvain Brandel sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

Exercices de TD

2015 – 2016

Progression pédagogique prévisionnelle :

- TD1 : Rappels mathématiques
- TD2 : Langages et expressions rationnelles
- TD3 : Automates à états finis déterministes et non déterministes
- TD4 : Déterminisation, passage automate – expression rationnelle
- TD5 : Minimisation d'automates, rationalité
- TD6 : Langages algébriques

http://liris.cnrs.fr/sylvain.brandel/wiki/doku.php?id=ens:lif15

Chapitre 1 – Notions mathématiques de base

A. Ensembles

Prouvez la première loi de De Morgan : $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

B. Relations

1. Vérifiez :
   - **N** est stable par addition ?
   - **N** est stable pour la soustraction ?
   - **Z** est stable pour la soustraction ?

2. Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture.
   - l'ensemble des entiers impairs pour la multiplication.
   - l'ensemble des entiers négatifs pour la soustraction (dans **Z**).
   - l'ensemble des entiers négatifs pour la multiplication.
   - l'ensemble des intervalles de **N** pour $\cup$.
   - l'ensemble des intervalles de **N** pour $\cap$.

3. Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).
   - la fermeture réflexive transitive d'une relation R, notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité
   - la fermeture transitive de R est notée R^+

Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation R = {(a, a), (a, c), (a, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, e)}

4. Soit un ensemble E. On définit sur P(E) la relation binaire R : X R Y $\Leftrightarrow$ X et Y ont le même nombre d'éléments. Montrez que R est une relation d'équivalence.

5. Soient R_1 et R_2 deux ordres partiels sur un même ensemble E. Montrez que $R_1 \cap R_2$ est également un ordre partiel.

6. Montrez que l'ensemble **Q** des nombres rationnels est infini dénombrable.

C. Principes de démonstration

1. Montrez par induction le théorème suivant :

   Soit A un ensemble fini. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

2. Montrez par l'absurde le théorème suivant :

   Soit R une relation binaire définie sur un ensemble fini A, et soient a et b deux éléments de A. S'il existe un chemin de a vers b dans R, alors il existe un chemin de longueur au plus |A|.

D. Expressions rationnelles

Les expressions rationnelles sur un alphabet Σ sont tous les mots construits sur l'alphabet $\Sigma \cup \{(,), e, \cup, *\}$:

(1) e et chaque élément de Σ est une expression rationnelle,
(2) si α et β sont des expressions rationnelles, alors $(\alpha\beta)$ est aussi une expression rationnelle,
(3) si α et β sont des expressions rationnelles, alors $(\alpha \cup \beta)$ est aussi une expression rationnelle,
(4) si α est une expression rationnelle, alors α^* est aussi une expression rationnelle,
(5) rien d'autre n'est une expression rationnelle hormis les points (1) à (4).

On dit que deux expressions rationnelles sont équivalentes, ou égales, si elles définissent le même langage.
Les "égalités" suivantes peuvent être démontrées :

1. $eu = ue = u$ pour toute expression rationnelle u
2. $e^* = e$
3. $bb^* = b^*b$
4. $bb^* \cup e = b^*$
5. $u \cup v = v \cup u$ pour tout couple d'expressions rationnelles (u, v)
6. $u \cup u = u$
7. $u^*u^* = u^*$
8. $(u^*)^* = u^*$
9. $u(v \cup w) = uv \cup uw$
10. $(u \cup v)w = uw \cup vw$
11. $(uv)^*u = u(vu)^*$
12. $(u \cup v)^* = (u^* \cup v)^*$
13. $(u \cup v)^* = u^*(u \cup v)^*$
14. $(u \cup v)^* = (u \cup vu^*)^*$
15. $(u \cup v)^* = (u^*v^*)^*$
16. $(u \cup v)^* = u^*(vu^*)^*$
17. $(u \cup v)^* = (u^*vu^*)^* \cup u^*$
18. $(u \cup v)^* = (u^*v)^*u^*$

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Expliquez pourquoi :
   - $baa \in a^*b^*a^*b^*$
   - $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$
   - $a^*b^* \cap c^*d^* = \varnothing$
   - $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

2. Montrez les égalités suivantes en utilisant les identités ci-dessus :
   - $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^* = (a \cup b)^*$
   - $(a^*b)^* \cup (b^*a)^* = (a \cup b)^*$
   - $(a \cup b)^*a(a \cup b)^* = b^*a(a \cup b)^*$

E. Langages

1. Pour chacun des langages suivants, donnez une expression régulière représentant son complément.
   - $(a \cup b)^*b$
   - $((a \cup b)(a \cup b))^*$

2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On souhaite décrire par une expression rationnelle le langage L comme suit :
$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ w contient abba, et la sous-chaîne bb ne figure pas dans w en dehors de la sous-chaîne abba$\}$
En justifiant vos réponses, indiquez pour chacune des expressions suivantes si elle décrit effectivement L ou non.
   - $(\varepsilon \cup b)a^+bba(ba^*)^*$
   - $(a \cup ba)^*abba(a \cup ba)^*$
   - $(a^* \cup b \cup (ba)^*)abba(a^* \cup b \cup (ba)^*)$

3. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle définissant les langages sur Σ décrits par les définitions suivantes :

- le langage de tous les mots contenant au moins 2 a (i.e. 2 occurrences de la lettre a).
- le langage de tous les mots contenant au plus 2 a.
- le langage de tous les mots contenant un nombre de a divisible par 3.
- le langage de tous les mots ne contenant pas le facteur aa.

4. Donnez une expression rationnelle définissant le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contient aa mais pas abb$\}$
Indication : un mot w du langage peut être décomposée en $w = b^*uv$ où u est une chaîne qui finit par a et ne contient pas abb et v est une chaîne qui commence par a et ne contient pas abb.

5. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle définissant le langage complémentaire du langage défini par $b^*aa^*b(a \cup b)^*$

Chapitre 2 – Automates à états finis

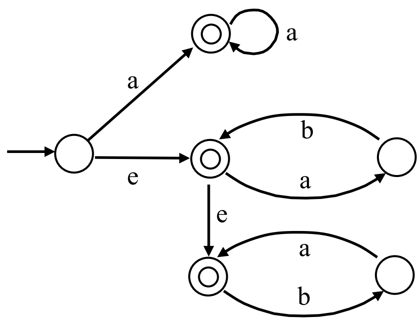
A. Automates à états finis déterministes

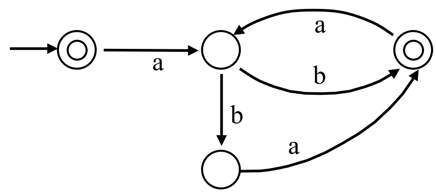
1. On considère l'alphabet Σ = {a, b}. Donnez un exemple d'automate M dans les cas suivants :
   a) M n'accepte aucun mot.
   b) M accepte tous les mots sur l'alphabet Σ.
   c) M a *n* états et accepte tous les mots de Σ.
   d) M a *n* états et n'accepte que le mot vide.
   e) M n'accepte que les mots formés avec une seule lettre de Σ.
   f) L'expression rationnelle correspondante serait a* ∪ b*.

2. Construisez des automates finis déterministes acceptant le langage décrit dans chacun des cas suivants :
   a) {w ∈ {a, b}* | chaque a de w est immédiatement précédé et immédiatement suivi par un b}. Noter que le mot babab doit être accepté.
   b) {w ∈ {a, b}* | w ne contient ni ab ni ba}.
   c) {w ∈ {a, b}* | w contient ab ou ba }.
   d) {w ∈ {a, b}* | w contient à la fois ab et ba }. Notez que les mots aba et bab doivent être acceptés.
   e) {w ∈ {a, b}* | w a un nombre impair de a et un nombre impair de b}.
   f) {w ∈ {a, b}* | w contient aa et la première occurrence de aa ne doit pas être précédée de abab}.
   g) {w ∈ {a, b}* | w contient une seule fois la sous-chaîne abba, et la sous-chaîne bb ne figure pas dans w en dehors de abba}.
   h) {w ∈ {a, b, c}* | w ne contient pas abc}.

B. Automates à états finis non déterministes

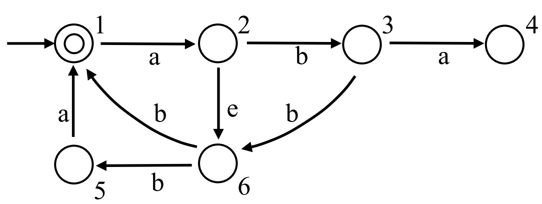
Caractérisez par une expression rationnelle le langage accepté par chacun des automates suivants :

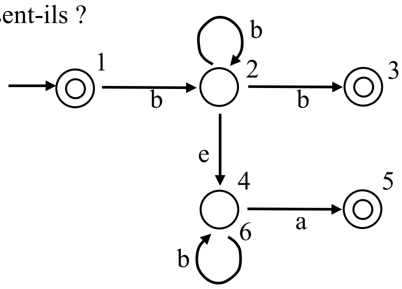


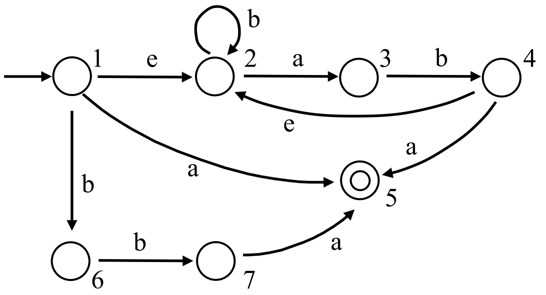


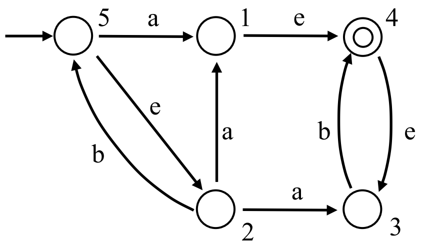
C. Elimination du non-déterminisme

1. Déterminisez les automates suivants. Quels langages reconnaissent-ils ?









2. Pour chacune des expressions rationnelles suivantes, construisez un automate non déterministe simple acceptant le langage correspondant. Déterminisez cet automate et décrivez comment fonctionne l'automate déterministe résultant.

a) $(ba \cup b)^* \cup (bb \cup a)^*$
b) $(ab \cup ba)^*(aa \cup bb)$

3. Construisez les deux automates déterministes acceptant respectivement les deux langages suivants :

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient aa}\}$
$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient un nombre pair de a}\}$

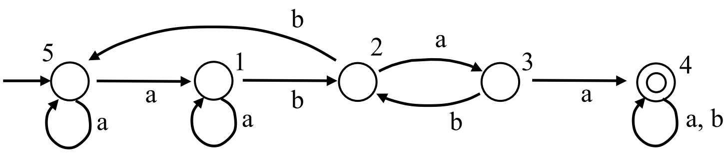
Montrez comment construire directement à partir des deux automates déterministes, l'automate déterministe acceptant

$L_3 = L_1 \cap L_2$ c-à-d $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient aa et un nombre pair de a}\}$
$L_4 = L_1 \cup L_2$ c-à-d $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient aa ou un nombre pair de a}\}$

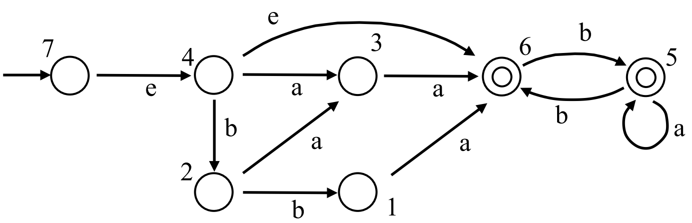
D. Passage automates – expressions rationnelles

Donnez une expression rationnelle décrivant le langage reconnu par les automates suivants.

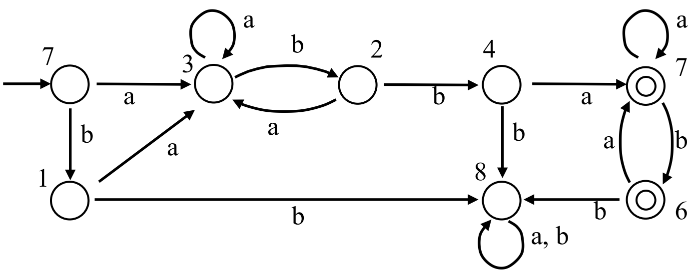
a)



b)



c)



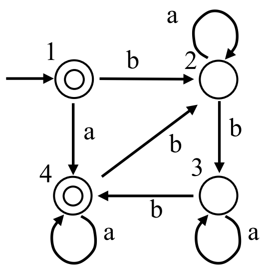
E. Minimisation d'un automate donné

Soit $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ un automate fini déterministe.
On note $M(q)$, pour $q \in K$, l'automate $(K, \Sigma, \delta, q, F)$.
On dit que p et q sont deux états équivalents de M, et on note $p \equiv q$, ssi $L(M(p)) = L(M(q))$.
Formellement, $p \equiv q$ ssi $\forall\ w \in \Sigma^*$ tel que $(p, w) \vdash_M^* (f_1, e)$ et $(q, w) \vdash_M^* (f_2, e)$, on a $f_1 \in F \Leftrightarrow f_2 \in F$.

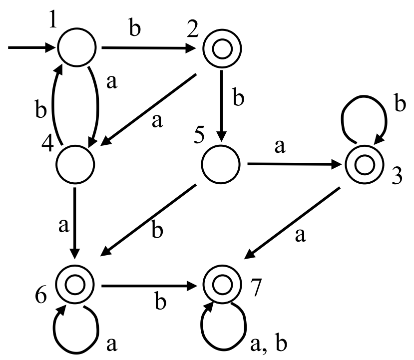
En pratique, on calcule les classes d'équivalence selon $\equiv$ puis on fait la fusion.
$\equiv$ est calculée comme la limite de $(\equiv_i)_{i \in \mathbf{N}}$.
$p \equiv_i q$ ssi $\forall\ w \in \Sigma^*\ |w| \leq i$ tel que $(p, w) \vdash_M^* (f_1, e)$ et $(q, w) \vdash_M^* (f_2, e)$, on a $f_1 \in F \Leftrightarrow f_2 \in F$.

1. Minimisez les automates suivants :

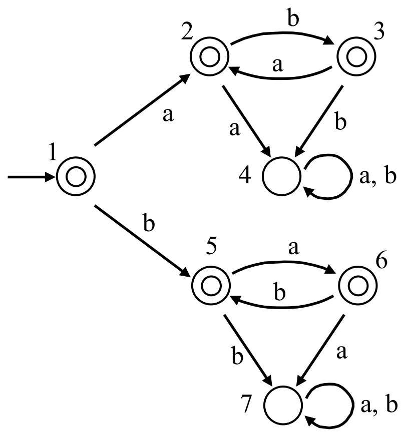
a)



b)



c)



F. Automate standard d'un langage

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage et $x, y \in \Sigma^*$ deux mots.
On dit que x et y sont équivalents suivant L, et on note $x \approx_L y$, si pour tout mot z de Σ^* :
$xz \in L$ ssi $yz \in L$

<u>Théorème de Myhill – Nerode</u>

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel. Il existe un automate déterministe ayant $\mid \Sigma^* / \approx_L \mid$ états acceptant L.

Pour un langage L, l'automate standard $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ est défini de la manière suivante :

$K = \{ [x], x \in \Sigma^* \}$ $F = \{ [x], x \in L \}$
$s = [e]$ δ : définie par $\delta([x], a) = [xa]$

1. Soit L_1 le langage défini par l'expression rationnelle $(a \cup b)^* \cup (b \cup c)^* \cup (c \cup a)^*$.
   a) Calculez les classes d'équivalence suivant L_1,
   b) Déterminez l'automate standard correspondant à L_1.

2. Mêmes questions pour $L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a$ est pair et w ne contient pas bb$\}$.

G. Rationalité

Pour montrer qu'un langage est rationnel, on peut :
- donner une expression rationnelle,
- construire un automate à états finis, déterministe ou non,
- utiliser les propriétés de stabilité.

Pour montrer qu'un langage est **non** rationnel, on peut :
- utiliser les propriétés de stabilité et un raisonnement par l'absurde,
- utiliser le lemme de l'étoile.

1) Stabilité

La classe des langages rationnels est stable pour l'union, la concaténation, l'étoile de Kleene, l'intersection et le complémentaire.
Pour montrer qu'un langage L est **non** rationnel, on fait le raisonnement par l'absurde suivant :
- supposer L rationnel ;
- déterminer L_1 rationnel tel que L_1 op L = L_2 (op $\in \{\cup, ., *, \cap,$ complémentaire$\}$), L_2 connu non rationnel ;
- L_1 op L rationnel par stabilité, L_2 connu non rationnel, donc contradiction.

2) Lemme de l'étoile

Caractérisation des langages rationnels :

Soit L un langage rationnel. L est donc reconnu par un automate M à k états.
$\forall$ z $\in$ L, $|z| \geq k$, $\exists$ u, v, w $\in \Sigma^*$ tels que z = uvw, $|uv| \leq k$, $|v| > 0$ et $\forall$ $i \geq 0$, $uv^iw \in L$.

1. Est-ce que le langage L = $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a$ pair et w ne contient pas bb$\}$ est rationnel ? Pourquoi ?

2. Complément et inclusion de langages.
   a) Montrez que le complémentaire d'un langage non rationnel est non rationnel.
   b) Si L est un langage rationnel et qu'on a L' $\subset$ L, est ce que cela implique que L' est rationnel ?
   c) Si L est un langage non rationnel et qu'on a L' $\subset$ L, est ce que cela implique que L' est non rationnel ?

3. Est-ce que la classe des langages non rationnels est stable par
   a) union ?
   b) intersection ?
   c) étoile de Kleene ?

4. À l'aide du lemme de l'étoile, montrez que les langages suivants sont non rationnels :
   a) $\{a^n \mid n$ premier$\}$
   b) Le langage des palindromes sur $\{a, b\}^*$
   c) $\{a^pb^q \mid p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}, q \leq p\}$

5. Les langages suivants sont-ils rationnels ?
   a) $\{abc^n \mid n > 3\}$
   b) $\{w \in a(ba)^*bb \mid |w| \leq 1000\}$
   c) $\{a^{[\sqrt{n}]} \mid n \in \mathbf{N}\}$ où [r] est la partie entière de r
   d) $\{w \in \{a, b\}^* \mid \exists\, v \in \{a, b\}^*, w = vv^T\}$ où v^T est le mot v dans lequel on a permuté les a et les b

6. Soit L un langage sur Σ. On note
   a) pref(L) = $\{w \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \Sigma^*, wy \in L\}$
   b) suff(L) = $\{w \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \Sigma^*, yw \in L\}$
   c) $L^R = \{w \in \Sigma^* \mid w^R \in L\}$.

Montrez que si L est rationnel, pref(L), suff(L) et L^R aussi.

Chapitre 3 – Langages algébriques

A. Grammaires algébriques

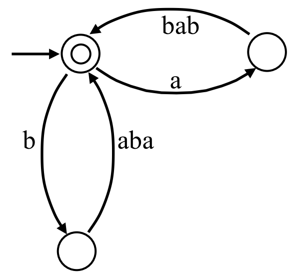
1. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Construisez les grammaires correspondant aux langages :
   a) a^*
   b) $(a \cup b) (a \cup b)^*$
   c) $(a \cup b)^*$
   d) $(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$

2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Construisez les grammaires régulières correspondant aux langages :
   a) $(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$

3. G = (V, Σ, R, S) une grammaire régulière avec :
   - $V = \{ S, X, Y \}$
   - $\Sigma = \{ a, b \}$
   - $R = \{ S \rightarrow aX \mid bY, X \rightarrow aS \mid a, Y \rightarrow bS \mid b \}$

Construisez l'automate à états finis correspondant au langage engendré par G.

4. Soit l'automate à états finis M :



Construisez la grammaire régulière engendrant le langage reconnu par M.

5. Montrez que les langages suivants sont algébriques :
   a) $L_1 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$
   b) $L_2 = \{a^m b^n c^p d^q \mid m + n = p + q\}$
   c) $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ w contient deux fois plus de b que de a$\}$
   d) $L_4 = \{uavb \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|\}$

B. Automates à pile

1. Soit l'automate à pile M = {K, Σ, Γ, Δ, s, F} avec
   - $K = \{s, f\}$
   - $F = \{f\}$
   - $\Sigma = \{a, b\}$
   - $\Gamma = \{a\}$
   - $\Delta = \{((s,a,e),(s,a)), ((s,b,e),(s,a)), ((s,a,e),(f,e)), ((f,a,a),(f,e)), ((f,b,a),(f,e))\}$

   a) Ecrivez toutes les suites de transitions possibles à partir de l'entrée aba.
   b) Vérifiez que baa, bab, baaaa $\in$ L(M), et que aba, aa, abb $\notin$ L(M).
   c) Quel est le langage L(M) ?

2. Construisez l'automate à pile acceptant les langages suivants :
   a) $L_1 = \{a^{2n}\, b^n\}$
   b) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ w contient deux fois plus de b que de a$\}$
   c) $L_3 = \{a^m b^n c^p \mid m > n + p$ et $m, n, p > 0\}$

C. Algébricité

1. Montrez que la classe des langages algébriques n'est pas stable par
   a) intersection,
   b) complémentation.

2. Montrez que les langages suivants ne sont pas algébriques :
   a) $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c \}$
   b) $L_2 = \{www \mid w \in \{a, b\}^*\}$