

TD 1 – Rappels mathématiques et expressions rationnelles

A. Notions mathématiques de base

1. Prouvez la première loi de De Morgan : $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

2. Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture.

- L'ensemble des entiers naturels pour l'addition.
- L'ensemble des entiers naturels pour la soustraction.
- L'ensemble des entiers relatifs pour la soustraction.
- L'ensemble des entiers impairs pour la multiplication.
- L'ensemble des entiers négatifs pour la soustraction.
- L'ensemble des entiers négatifs pour la multiplication.
- L'ensemble des intervalles de \mathbf{N} pour \cup .
- L'ensemble des intervalles de \mathbf{N} pour \cap .

3. Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).

- la fermeture réflexive transitive d'une relation R , notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité,
- la fermeture transitive de R est notée R^+

Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation $R = \{(a, a), (a, c), (a, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, e)\}$

4. Soit un ensemble E . On définit sur $P(E)$ la relation binaire $R : X R Y \Leftrightarrow X$ et Y ont le même nombre d'éléments. Montrez que R est une relation d'équivalence.

5. Soient R_1 et R_2 deux ordres partiels sur un même ensemble E . Montrez que $R_1 \cap R_2$ est également un ordre partiel.

6. Montrez que l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels est infini dénombrable.

7. Montrez par induction le théorème suivant :

Soit A un ensemble fini. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

8. Montrez par l'absurde le théorème suivant :

Soit R une relation binaire définie sur un ensemble fini A , et soient a et b deux éléments de A . S'il existe un chemin de a vers b dans R , alors il existe un chemin de longueur au plus $|A|$.

B. Expressions rationnelles

Les expressions rationnelles sur un alphabet Σ sont tous les mots construits sur l'alphabet

$\Sigma \cup \{ (,), e, \cup, * \}$:

- (1) e et chaque élément de Σ est une expression rationnelle,
- (2) si α et β sont des expressions rationnelles, alors $(\alpha\beta)$ est aussi une expression rationnelle,
- (3) si α et β sont des expressions rationnelles, alors $(\alpha \cup \beta)$ est aussi une expression rationnelle,
- (4) si α est une expression rationnelle, alors α^* est aussi une expression rationnelle,
- (5) rien d'autre n'est une expression rationnelle hormis les points (1) à (4).

On dit que deux expressions rationnelles sont équivalentes si elles définissent le même langage.

Soient u et v deux expressions rationnelles. Les égalités suivantes peuvent être démontrées :

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $e^* = e$ | 7. $u^*u^* = u^*$ | 13. $(u \cup v)^* = u^*(u \cup v)^*$ |
| 2. $eu = ue = u$ | 8. $(u^*)^* = u^*$ | 14. $(u \cup v)^* = (u \cup vu^*)^*$ |
| 3. $uu^* = u^*u$ | 9. $u(v \cup w) = uv \cup uw$ | 15. $(u \cup v)^* = (u^*v^*)^*$ |
| 4. $uu^* \cup e = u^*$ | 10. $(u \cup v)w = uw \cup vw$ | 16. $(u \cup v)^* = u^*(vu^*)^*$ |
| 5. $u \cup v = v \cup u$ | 11. $(uv)^*u = u(vu)^*$ | 17. $(u \cup v)^* = (u^*vu^*)^* \cup u^*$ |
| 6. $u \cup u = u$ | 12. $(u \cup v)^* = (u^* \cup v^*)^*$ | 18. $(u \cup v)^* = (u^*v)^*u^*$ |

9. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Expliquez pourquoi :

- a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$
- b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$
- c) $a^*b^* \cap c^*d^* = \emptyset$
- d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

10. Montrez les égalités suivantes en utilisant les identités ci-dessus :

- a) $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^* = (a \cup b)^*$
- b) $(a^*b)^* \cup (b^*a)^* = (a \cup b)^*$
- c) $(a \cup b)^*a(a \cup b)^* = b^*a(a \cup b)^*$

11. Pour chacun des langages suivants, donnez une expression régulière représentant son complément.

- a) $(a \cup b)^*b$
- b) $((a \cup b)(a \cup b))^*$

12. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On souhaite décrire par une expression rationnelle le langage L comme suit :

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } abba, \text{ et la sous-chaîne } bb \text{ ne figure pas dans } w \text{ en dehors de la sous-chaîne } abba\}$

En justifiant vos réponses, indiquez pour chacune des expressions suivantes si elle décrit effectivement L ou non.

- a) $(e \cup b)a^+bba(ba^*)^*$
- b) $(a \cup ba)^*abba(a \cup ba)^*$
- c) $(a^* \cup b \cup (ba)^*)abba(a^* \cup b \cup (ba)^*)$

13. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle définissant les langages sur Σ décrits par les définitions suivantes :

- a) le langage de tous les mots contenant au moins 2 a (i.e. 2 occurrences de la lettre a).
- b) le langage de tous les mots contenant au plus 2 a .
- c) le langage de tous les mots contenant un nombre de a divisible par 3.
- d) le langage de tous les mots ne contenant pas le facteur aa .

14. Donnez une expression rationnelle définissant le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa \text{ mais pas } abb\}$

Indication : un mot w du langage peut être décomposée en $w = b^*uv$ où u est une chaîne qui finit par a et ne contient pas abb et v est une chaîne qui commence par a et ne contient pas abb .

15. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle définissant le langage complémentaire du langage défini par $b^*aa^*b(a \cup b)^*$

TD 2 – Automates à états finis

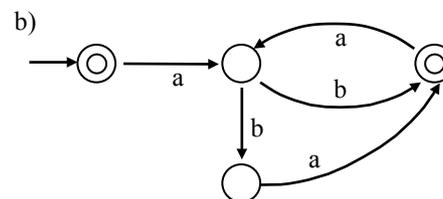
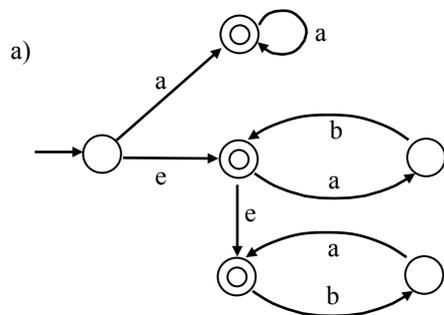
1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez un exemple d'automate M , déterministe ou non, dans les cas suivants :

- M n'accepte aucun mot.
- M accepte tous les mots sur l'alphabet Σ .
- M a n états et accepte tous les mots de Σ .
- M a n états et n'accepte que le mot vide.
- M n'accepte que les mots formés avec une seule lettre de Σ .
- L'expression rationnelle correspondante serait $a^* \cup b^*$.

2. Construisez des automates finis déterministes ou non acceptant les langages suivants :

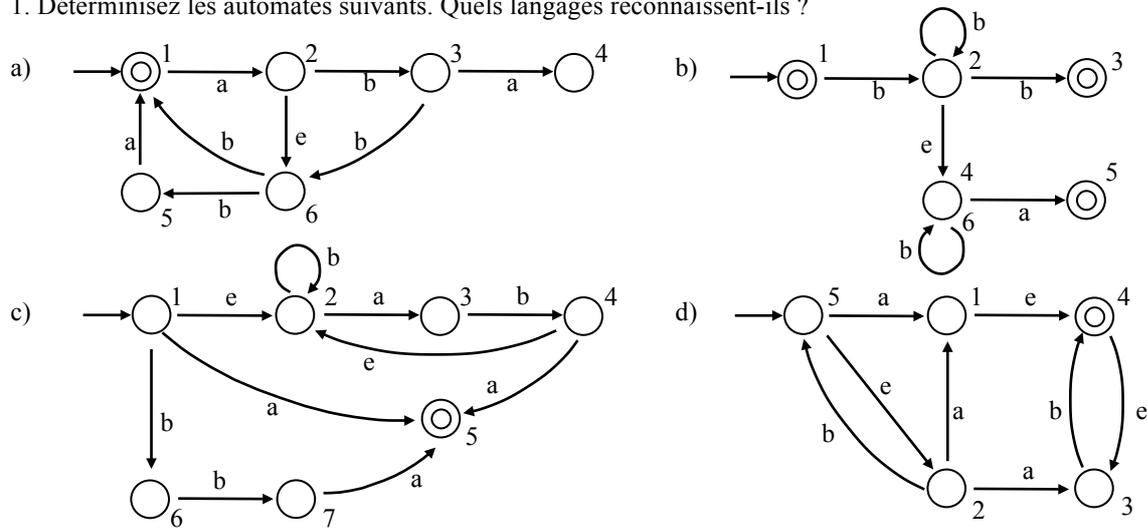
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{chaque } a \text{ de } w \text{ est immédiatement précédé et immédiatement suivi par un } b\}$. Noter que le mot babab doit être accepté.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ne contient ni } ab \text{ ni } ba\}$.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } ab \text{ ou } ba\}$.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient à la fois } ab \text{ et } ba\}$. Notez que les mots aba et bab doivent être acceptés.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ a un nombre impair de } a \text{ et un nombre impair de } b\}$.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa \text{ et la première occurrence de } aa \text{ ne doit pas être précédée de } abab\}$.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient une seule fois la sous-chaîne } abba, \text{ et la sous-chaîne } bb \text{ ne figure pas dans } w \text{ en dehors de } abba\}$.
- $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ ne contient pas } abc\}$.

3. Caractérissez par une expression rationnelle le langage accepté par chacun des automates suivants :



TD 3 – Détermination

1. Déterminez les automates suivants. Quels langages reconnaissent-ils ?



2. Pour chacune des expressions rationnelles suivantes, construisez un automate non déterministe simple acceptant le langage correspondant. Déterminez cet automate et décrivez comment fonctionne l'automate déterministe résultant.

- a) $(ba \cup b)^* \cup (bb \cup a)^*$
- b) $(ab \cup ba)^*(aa \cup bb)$

3. Construisez les deux automates déterministes acceptant respectivement les deux langages suivants :

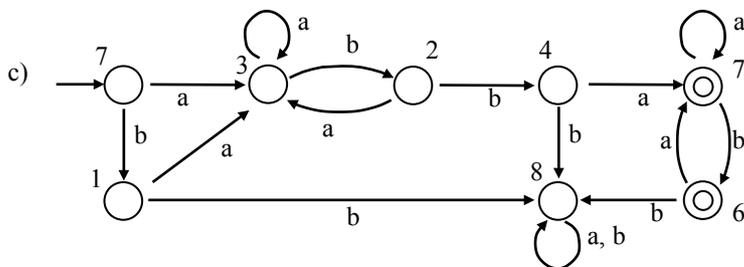
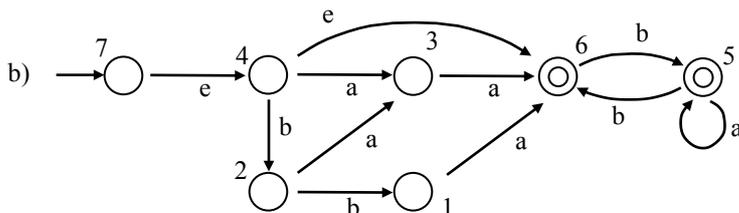
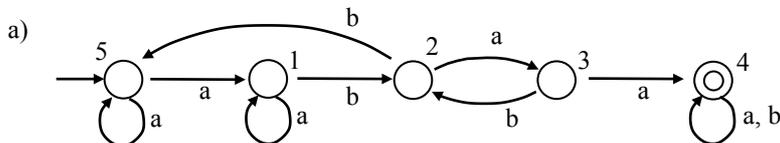
- a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa\}$
- b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient un nombre pair de } a\}$

Montrez comment construire directement à partir de ces deux automates déterministes, l'automate déterministe acceptant

- c) $L_3 = L_1 \cap L_2$ c-à-d $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa \text{ et un nombre pair de } a\}$
- d) $L_4 = L_1 \cup L_2$ c-à-d $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa \text{ ou un nombre pair de } a\}$

TD 4 – Caractérisation et minimisation

1. Donnez une expression rationnelle décrivant le langage reconnu par les automates suivants.



Soit $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ un automate fini déterministe.

On note $M(q)$, pour $q \in K$, l'automate $(K, \Sigma, \delta, q, F)$.

On dit que p et q sont deux états équivalents de M , et on note $p \equiv q$, ssi $L(M(p)) = L(M(q))$.

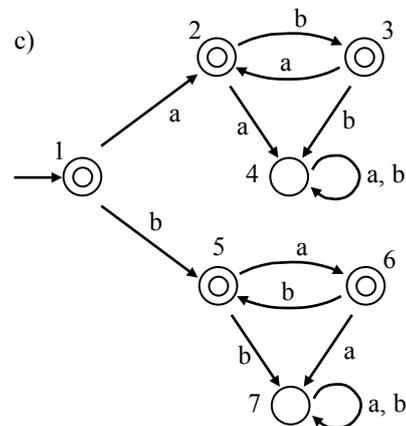
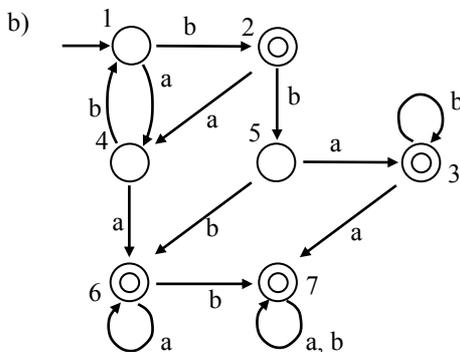
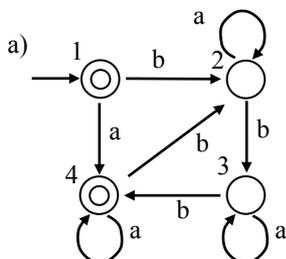
Formellement, $p \equiv q$ ssi $\forall w \in \Sigma^*$ tel que $(p, w) \vdash_M^* (f_1, e)$ et $(q, w) \vdash_M^* (f_2, e)$, on a $f_1 \in F \Leftrightarrow f_2 \in F$.

En pratique, on calcule les classes d'équivalence selon \equiv puis on fait la fusion.

\equiv est calculée comme la limite de $(\equiv_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

$p \equiv_i q$ ssi $\forall w \in \Sigma^* |w| \leq i$ tel que $(p, w) \vdash_M^* (f_1, e)$ et $(q, w) \vdash_M^* (f_2, e)$, on a $f_1 \in F \Leftrightarrow f_2 \in F$.

2. Minimisez les automates suivants :



Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage et $x, y \in \Sigma^*$ deux mots.

On dit que x et y sont équivalents suivant L , et on note $x \approx_L y$, si pour tout mot z de Σ^* :

$$xz \in L \text{ ssi } yz \in L$$

Théorème de Myhill – Nerode :

Soit $L \subseteq \Sigma^$ un langage rationnel.*

Il existe un automate déterministe ayant $|\Sigma^ / \approx_L|$ états acceptant L .*

Pour un langage L , l'automate standard $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} K = \{ [x], x \in \Sigma^* \} & F = \{ [x], x \in L \} \\ s = [e] & \delta : \text{définie par } \delta([x], a) = [xa] \end{array}$$

3. Soit L_1 le langage défini par l'expression rationnelle $(a \cup b)^* \cup (b \cup c)^* \cup (c \cup a)^*$.

- Calculez les classes d'équivalence suivant L_1 ,
- Déterminez l'automate standard correspondant à L_1 .

4. Mêmes questions pour $L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ est pair et } w \text{ ne contient pas } bb \}$.

TD 5 – Rationalité

Pour montrer qu'un langage est rationnel, on peut :

- donner une expression rationnelle,
- construire un automate à états finis, déterministe ou non,
- utiliser les propriétés de stabilité.

Pour montrer qu'un langage est **non** rationnel, on peut :

- utiliser les propriétés de stabilité et un raisonnement par l'absurde,
- utiliser le lemme de l'étoile.

La classe des langages rationnels est stable pour l'union, la concaténation, l'étoile de Kleene, l'intersection et le complémentaire.

Pour montrer qu'un langage L est **non** rationnel, on fait le raisonnement par l'absurde suivant :

- supposer L rationnel ;
- déterminer L_1 rationnel tel que $L_1 \text{ op } L = L_2$ ($\text{op} \in \{\cup, \cdot, *, \cap, \text{complémentaire}\}$), L_2 connu non rationnel ;
- $L_1 \text{ op } L$ rationnel par stabilité, L_2 connu non rationnel, donc contradiction.

Caractérisation des langages rationnels (lemme de l'étoile) :

Soit L un langage rationnel. L est donc reconnu par un automate M à k états.

$\forall z \in L, |z| \geq k, \exists u, v, w \in \Sigma^$ tels que $z = uvw, |uv| \leq k, |v| > 0$ et $\forall i \geq 0, uv^i w \in L$.*

1. Est-ce que le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ pair et } w \text{ ne contient pas } bb\}$ est rationnel ? Pourquoi ?
2. Complément et inclusion de langages.
 - a) Montrez que le complémentaire d'un langage non rationnel est non rationnel.
 - b) Si L est un langage rationnel et qu'on a $L' \subset L$, est ce que cela implique que L' est rationnel ?
 - c) Si L est un langage non rationnel et qu'on a $L' \subset L$, est ce que cela implique que L' est non rationnel ?
3. Est-ce que la classe des langages non rationnels est stable par
 - a) union ?
 - b) intersection ?
 - c) étoile de Kleene ?
4. À l'aide du lemme de l'étoile, montrez que les langages suivants sont non rationnels :
 - a) $\{a^n \mid n \text{ premier}\}$
 - b) Le langage des palindromes sur $\{a, b\}^*$
 - c) $\{a^p b^q \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, q \leq p\}$
5. Les langages suivants sont-ils rationnels ?
 - a) $\{abc^n \mid n > 3\}$
 - b) $\{w \in a(ba)^*bb \mid |w| \leq 1000\}$
 - c) $\{a^{[n]} \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $[r]$ est la partie entière de r
 - d) $\{w \in \{a, b\}^* \mid \exists v \in \{a, b\}^*, w = vv^T\}$ où v^T est le mot v dans lequel on a permuté les a et les b
6. Soit L un langage sur Σ . On note
 - $\text{pref}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, wy \in L\}$
 - $\text{suff}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, yw \in L\}$
 - $L^R = \{w \in \Sigma^* \mid w^R \in L\}$.Montrez que si L est rationnel, $\text{pref}(L)$, $\text{suff}(L)$ et L^R le sont aussi.

TD 6 – Langages algébriques

1. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Construisez les grammaires correspondant aux langages :

- a^*
- $(a \cup b)(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$

2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Construisez les grammaires régulières correspondant aux langages :

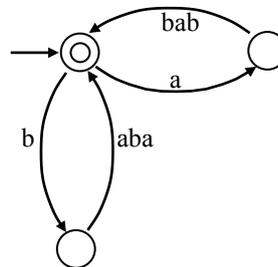
- $(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$

3. $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire régulière avec :

- $V = \{S, X, Y\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $R = \{S \rightarrow aX \mid bY, X \rightarrow aS \mid a, Y \rightarrow bS \mid b\}$

Construisez l'automate à états finis correspondant au langage engendré par G .

4. Soit l'automate à états finis M :



Construisez la grammaire régulière engendrant le langage reconnu par M .

5. Montrez que les langages suivants sont algébriques :

- $L_1 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$
- $L_2 = \{a^m b^n c^p d^q \mid m + n = p + q\}$
- $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ contient deux fois plus de } b \text{ que de } a\}$
- $L_4 = \{uavb \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|\}$

6. Soit l'automate à pile $M = \{K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F\}$ avec

- $K = \{s, f\}$
- $F = \{f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{a\}$
- $\Delta = \{(s,a,e),(s,a), ((s,b,e),(s,a)), ((s,a,e),(f,e)), ((f,a,a),(f,e)), ((f,b,a),(f,e))\}$

- Ecrivez toutes les suites de transitions possibles à partir de l'entrée aba .
- Vérifiez que $baa, bab, baaaa \in L(M)$, et que $aba, aa, abb \notin L(M)$.
- Quel est le langage $L(M)$?

7. Construisez l'automate à pile acceptant les langages suivants :

- $L_1 = \{a^{2n} b^n\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ contient deux fois plus de } b \text{ que de } a\}$
- $L_3 = \{a^m b^n c^p \mid m > n + p \text{ et } m, n, p > 0\}$

8. Montrez que la classe des langages algébriques n'est pas stable par

- intersection,
- complémentation.

9. Montrez que les langages suivants ne sont pas algébriques :

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$
- $L_2 = \{www \mid w \in \{a, b\}^*\}$