M1if09 – Calculabilité & complexité

Sylvain Brandel
2016 – 2017
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 6

INDÉCIDABILITÉ MT ET GRAMMAIRES

Grammaires

- Une grammaire (générale) est un quadruplet

  $G = (V, \Sigma, R, S)$ où :

  - V : symboles non terminaux
  - Σ : symboles terminaux ($V \cap \Sigma = \emptyset$)
  - $S \in V$: symbole de départ
  - R est l'ensemble de règles :

    sous ensemble fini de $\underbrace{(V \cup \Sigma)^* \, V \, (V \cup \Sigma)^*}_{\text{Au moins un non-terminal}} \times (V \cup \Sigma)^*$

(Dans une grammaire algébrique, $R \subset V \times (V \cup \Sigma)^*$.)

Un et un seul non-terminal

Grammaires

- Soient u et v $\in (V \cup \Sigma)^*$.
  On dit que v <u>dérive directement de</u> u, et on note $u \Rightarrow_G v$,
  ssi $\exists$ x, y, w $\in (V \cup \Sigma)^*$, $\exists$ A $\in$ V tels que
  $u = xAy$ et $v = xwy$ et $A \to w \in R$

- La relation $\Rightarrow_G^*$ est la fermeture réflexive transitive de la relation $\Rightarrow_G$.

- Soient u et v $\in (V \cup \Sigma)^*$.
  On dit que v <u>dérive de</u> u, et on note $u \Rightarrow_G^* v$,
  ssi $\exists$ $w_0, \ldots, w_n \in (V \cup \Sigma)^*$ tels que
  $u = w_0$ et $v = w_n$ et $w_i \Rightarrow_G w_{i+1}$ $\forall$ $i < n$.

Grammaires

- La suite $w_0 \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G w_n$ est appelée une dérivation

- La valeur de n ($n \geq 0$) est la longueur de la dérivation.

- Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire. Le langage engendré par G, noté L(G), est :

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w \}$$

- Deux grammaires qui engendrent le même langage sont dites équivalentes.

Grammaires

- Exemple :

  $G = (V, \sum, R, S)$ où :

  - $V = \{ S, A, B, C, T_a, T_b, T_c \}$
  - $\sum = \{ a, b, c \}$
  - $R = \{ S \rightarrow ABCS,$
    $S \rightarrow T_c,$
    $CA \rightarrow AC,$
    $BA \rightarrow AB,$
    $CB \rightarrow BC,$
    $CT_c \rightarrow T_c c,$
    $CT_c \rightarrow T_b c,$
    $BT_b \rightarrow T_b b,$
    $BT_b \rightarrow T_a b,$
    $AT_a \rightarrow T_a a,$
    $T_a \rightarrow e \}$

le langage généré est $\{ a^n b^n c^n \mid \mathbf{n \geq 1} \}$.

Preuve : TD

Grammaires

- Théorème
  - Un langage L est engendré par une grammaire générale ssi il est récursivement énumérable.

    (c-à-d accepté par une machine de Turing)

Grammaires
Calculabilité grammaticale

- Soit $G = (V, \sum, R, S)$ une grammaire et $f : \sum^* \rightarrow \sum^*$ une fonction. On dit que G <u>calcule</u> f si $\forall$ w, v $\in \sum^*$ on a :

$$SwS \Rightarrow_G^* v \text{ ssi } v = f(w)$$

c-à-d toute dérivation par G de SwS donne v

- Une fonction $f : \sum^* \rightarrow \sum^*$ est <u>grammaticalement calculable</u> ssi il existe une grammaire la calculant.

- Théorème

Une fonction $f : \sum^* \rightarrow \sum^*$ est <u>récursive</u> (Turing-calculable) ssi elle est grammaticalement calculable

Problème indécidables à propos des grammaires

- <u>Théorème</u> (grammaires générales)

  Les problèmes suivants sont indécidables :

  (a) Soient G une grammaire (générale) et $w \in \Sigma^*$. Est-ce que $w \in L(G)$?

  (b) Soit G une grammaire. Est-ce que $e \in L(G)$?

  (c) Soient G_1 et G_2 deux grammaires. Est-ce que $L(G_1) = L(G_2)$?

  (d) Soit G une grammaire. Est-ce que $L(G) = \varnothing$?

  (e) Il existe une grammaire G_0 pour laquelle le problème suivant est indécidable : Soit $w \in \Sigma^*$. Est-ce que $w \in L(G_0)$?

  (G_0 : grammaire universelle.)

Preuve

Problème indécidables à propos des grammaires

- <u>Théorème</u> (grammaires algébriques)

  Les problèmes suivants sont indécidables :

  (a) Soit G une grammaire ***algébrique****. Est-ce que* $L(G) = \sum^*$ *?*

  (b) Soient G_1 *et* G_2 *deux grammaires* ***algébriques****. Est-ce que* $L(G_1) = L(G_2)$ *?*

  (c) Soient M_1 *et* M_2 *deux automates à pile. Est-ce que* $L(M_1) = L(M_2)$ *?*

  (d) Soit M un automate à pile. Trouver un automate à pile équivalent minimal en nombre d'états.

Preuve

Propriétés des langages récursifs

- Rappel
  - Récursivement énumérable = accepté par une MT
  - Récursif = s'arrête pour toutes les entrées
- Rappel :
  - Récursif $\Rightarrow$ récursivement énumérable (Réciproque fausse)

- Théorème

  Un langage L est récursif ssi L et ¬L sont récursivement énumérables.

Preuve

Propriétés des langages récursifs

- Définition (énumération)

  On dit qu'une machine de Turing M énumère le langage L ssi pour un certain état fixé q, on a :

  $L = \{ w : (s, \underline{\#}) \vdash_M^* (q, \underline{\#}w) \}$ (q est appelé l'état d'affichage)

  Un langage est dit Turing-énumérable ssi il existe une MT qui l'énumère.

- Théorème

  Un langage est récursivement énumérable ssi il est Turing-énumérable.

Preuve

Propriétés des langages récursifs

- Définition (énumération lexicographique)

  Soit M une MT qui énumère un langage L (avec l'état d'affichage q).

  On dit que M énumère lexicographiquement L si la relation

  $$(q, \underline{\#}w) \vdash_M^+ (q, \underline{\#}w')$$

  entraîne que w' vient après w dans l'ordre lexicographique.

  Un langage est lexicographiquement-énumérable ssi il existe une MT qui l'énumère lexicographiquement.

- Théorème

  Un langage est récursif ssi il est lexicographiquement-énumérable.

Preuve

Propriétés des langages récursifs

- Théorème de Rice

  Soit C une partie propre non vide de la classe des langages récursivement énumérables.

  Le problème suivant est indécidable :

  Soit M une MT. Est-ce que $L(M) \in C$?

Preuve