TD 1 - Modélisations

Exercice 1 - Modélisation avec un Programme Linéaire.

Un barman dispose des quantités d'alcool suivantes : 50cL de whisky, 50cL de vodka, 100cL de gin. Il peut faire les cocktails suivants :

— Manhattan (5$) : 10cL de whisky et 5cL de vodka.

— Harlem (4$) : 10cL de gin et 5cL de vodka.

— Special (6$) : 15cL de gin et 10cL de whisky.

On suppose qu'il arrive à vendre tous les cocktails qu'il fabrique, et veut déterminer quels cocktails réaliser pour maximiser son profit. Modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 2 - Modélisation comme problème d'optimisation dans des graphes.

Dans la suite de cours, on étudiera de nombreux algorithmes pour résoudre certains problèmes de graphes. Le but de ces exercice est de voir que ces problèmes permettent de modéliser de nombreux problèmes issus de la vie réelle.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, on appelle :

— une *clique* : un ensemble de sommets deux à deux reliés dans le graphe.

— un *ensemble indépendant* : un ensemble de sommets deux à deux non reliés.

— un *couplage* : un ensemble d'arêtes dont les extrémités sont deux à deux disjointes (i.e. deux arêtes d'un couplage ne peuvent pas partage d'extrémités).

— une *coloration* : une assignation de couleurs aux sommets du graphe telle que toute paire de sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.

Le problème de la *clique maximum* (resp. *indépendant maximum*, *couplage maximum*) consiste à déterminer la plus grande clique (resp. ensemble indépendant, couplage) dans G. Le problème de *coloration* consiste à déterminer une coloration de G utilisant le moins de couleurs possible.

(A) Échanges linguistiques

Un groupe de n étudiants Erasmus, denotés par $E_1, \ldots, E_n$, arrive dans une université. Afin de faciliter leur intégration, le BDE souhaite organiser des soirées où chacun pourra communiquer avec n'importe quel autre invité dans une des langues qu'il maîtrise.

1. Modéliser le problème consistant à déterminer combien au maximum de personnes pourront être invitées simultanément à une fête comme un des problèmes de graphe de l'introduction.
2. Modéliser le même problème à l'aide d'un programme linéaire en nombre entiers.
3. Le BDE désire savoir combien de fêtes il doit organiser au minimum pour inviter au moins une fois chaque étudiant.
   Modéliser ce problème comme un des problèmes de graphes de l'introduction.

(B) Emplois du temps

1. L'université accueille m étudiants $E_1, \ldots, E_m$ et propose n cours $C_1, \ldots, C_n$. Chaque étudiant E_i s'inscrit à un sous-ensemble $D_i \subset \{C_1, \ldots, C_n\}$ des cours proposés.

   Le service des emplois du temps doit répartir ces cours dans la semaine, afin que chaque étudiant puisse assister à tous ses cours. Afin d'éviter les semaines trop chargées, on souhaite minimiser le nombre de créneaux horaires utilisés.

   Modéliser ce problème comme un des problèmes défini dans l'introduction.

2. Une fois l'emploi du temps établi, il faut trouver des salles. Le service de gestion des salles souhaite alors trouver le nombre minimum de salles nécessaires pour que tous les cours de l'emploi du temps puissent avoir lieu. (On supposera qu'on n'a pas de contraintes sur le nombre de salles disponibles simultanément dans les locaux de l'université).

   Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de graphes donné dans l'introduction.

(C) Journée des sports

Lors de la journée des sports de l'université, l'université souhaite proposer l'essai de certains sports $S_1, \ldots, S_n$. Malheureusement, certains sports devant utiliser les mêmes gymnases ou le même matériel ne peuvent pas être proposés simultanément. Si S_i et S_j ne peuvent pas être proposés simultanément, on dit qu'ils sont *en conflit*. Les organisateurs veulent déterminer combien de sports au maximum pourront avoir lieu en même temps sans créer de conflit.

Modéliser ce problème comme un des problèmes défini dans l'introduction.

(D) Problème de transport

Une entreprise de logistique désire ouvrir de nouveaux entrepôts afin de satisfaire ses clients $C_1, \ldots, C_m$ avec la dernière version de son smartphone. L'entreprise a un ensemble d'entrepôts $X_1, \ldots, X_n$. Chaque entrepôt a une capacité maximum r_i qui dépend de l'entrepôt. Pour chaque paire $i \leq n$ et $j \leq m$, acheminer un smartphone de l'entrepôt X_i au client C_j coûte $c_{i,j}$.

Le but de l'entreprise est de livrer à chaque client un smartphone tout en minimisant la somme des coûts de livraison.

On a vu dans le cours une modélisation de ce problème comme un Programme Linéaire en Nombre entiers. Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de graphes présenté dans l'introduction.