TD3 – Programmation linéaire

Exercice 1 – Modélisation

Une entreprise de fabrication de pâtée pour chiens vend deux types de produits fabriqués à partir de céréales et de viande : des Frisky Pup et des Husky Hound.

— Chaque paquet de Frisky Pup est vendu à 7 euros et est fabriqué à partir de 1kg de céréales et 1.5kg de viande.

— Chaque paquet de Husky Hound est vendu à 6 euros et est fabriqué à partir de 2kg de céréales et 1kg de viande.

Le prix des céréales est de 1 euro par kilo, et celui de la viande de 2 euros par kilo. L'empaquetage coûte 1.4 euro par paquet pour les Frisky Pup et 0.6 euro par paquet pour les Husky Hound. On peut acheter au plus 240000kg par mois de céréales et 180000kg par mois de viande. Enfin, l'entreprise ne peut empaqueter qu'au plus 110000 paquets de Frisky Pup par mois. Le but est de maximiser le bénéfice mensuel de l'entreprise en supposant que tous les paquets produits soient vendus.

Formuler le problème comme un PL et le résoudre géométriquement.

Exercice 2 – Calcul de duaux

Donner le dual des PL suivants :

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \\ \text{soumis à} & \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 10 \\ -x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max 1000x_1 + 1200x_2 & \\ \text{soumis à} & \\ 10x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 60 \\ x_1 &\leq 12 \\ x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max x_1 + 5x_2 - x_3 & \\ \text{soumis à} & \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_1 - x_3 &\leq 5 \\ x_2 - 5x_3 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max x_1 & \\ \text{soumis à} & \\ -5x_1 + 3x_2 &= 200 \\ 11x_1 + 3x_2 &= 60 \\ x_2 &\geq 6 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 3 – Dual du dual

Soit (P) un programme linéaire de la forme

$$\max c^t x \quad \text{soumis à} \quad Ax \leq b \text{ et } x \geq 0$$

Montrer que le dual du dual de (P) est (P).

Exercice 4 – Ensembles intersectants

Un hypergraphe $H = (V, E)$ est défini par un ensemble V de sommets et un ensemble E d'hyperarêtes, i.e. de sous-ensembles de V. Un ensemble intersectant est un ensemble de sommets X de l'hypergraphe tel que, pour toute hyperarête $e \in E$, e contient au moins un sommet de X.

1. Exprimer le problème consistant à trouver un ensemble intersectant de taille minimum comme un PLNE.
2. Montrer que le dual de ce problème est le problème Hyperedge Packing, qui vise à trouver un ensemble maximum d'hyperarêtes deux à deux disjointes.
3. Qu'en déduire sur la taille d'un packing par rapport à la taille d'un ensemble intersectant ?

Exercice 5 - Ensembles dominants ($*$)
Un *ensemble dominant* est un sous ensemble de sommets X de G tel que, pour tout sommet v, soit v est dans X soit v est dans le voisinage d'un sommet de X.

1. Formuler le problème du Dominant Minimum comme un PLNE.
2. Quel est le dual du problème de Dominant Minimum ? L'interpréter comme une généralisation du problème de l'indépendant maximum.
3. Prouver que l'écart maximal entre une solution optimale du dual (en nombres entiers) et une solution optimale du primal peut être arbitrairement grand.

Exercice 6 - Matrices totalement unimodulaires ($**$) Nous avons vu en cours qu'en général la solution optimale d'un programme linéaire diffère selon que les variables soient entières ou réelles. Dans certains cas, cela n'arrive pas et les solutions coïncident, c'est le cas par exemple lorsque la matrice de contraintes est totalement unimodulaire.

Une matrice est *totalement unimodulaire* si le déterminant de toute sous-matrice carrée (formée d'un sous-ensemble pas forcément consécutif de lignes et de colonnes) est $-1, 0$, ou 1.

1. Montrer toute matrice totalement unimodulaire est composée de -1 de 0 et de 1.
2. Montrer que toutes les matrices composées uniquement de 0 et de 1 ne sont pas totalement unimodulaires.

La matrice d'incidence d'un graphe G est une matrice à $|E|$ lignes et $|V|$ colonnes où, pour la ligne correspondant à l'arête uv, les entrées des colonnes correspondant à u et v valent 1 et les autres valent 0.

3. Donner la matrice d'incidence d'un chemin à n sommets, d'une clique à n sommets.
4. Donner un graphe dont la matrice d'incidence n'est pas totalement unimodulaire.

On considère maintenant un graphe biparti $G = (V, E)$.

5. Montrer que l'on peut partitionner les colonnes en deux parties A, B telle que, pour chaque ligne, il y a exactement un 1 dans les colonnes de A et un 1 dans les colonnes de B.

On désire montrer que matrice d'incidence de G est totalement unimodulaire. Pour cela on montre par récurrence sur k que le déterminant de toute sous-matrice M $k \times k$ est 0 ou ± 1.

6. Que dire si une ligne de M contient au plus un 1 ?
7. S'il y a exactement deux 1 par ligne, montrer qu'il existe une combinaison linéaire des colonnes dont la somme est nulle.
8. Qu'en déduire sur le déterminant ? Conclure.

Avec l'aide du résultat ci-dessus et du premier paragraphe de l'exercice, montrer le résultat suivant :

9. Il est possible de calculer un couplage maximum dans un graphe biparti en temps polynomial.