

TD 1 – Modélisations

Exercice 1 - Modélisation avec un Programme Linéaire

L'entreprise "Dovetail" produit deux types d'allumettes, les longues et les courtes. L'entreprise fait un profit de 300\$ par lot de 100000 boîtes de grandes allumettes et 200\$ pour 100000 boîtes de petites allumettes. L'entreprise a une machine qui lui permet d'emballer grandes et petite allumettes qui peut, au total, emballer 900000 boîtes par an. Pour la production d'allumettes, il faut du bois, $3m^3$ pour 100000 boîtes de grandes allumettes et $1m^3$ pour les petites. Au total, l'entreprise a en stock $18m^3$ de bois. De plus elle a 700000 boîtes (vides) de grandes allumettes et 600000 de petites. Le but est maximiser le profit l'année suivante.

On souhaite modéliser ce problème avec un programme linéaire.

1. Que veut-on compter dans ce problème? En déduire quelles sont les variables du programme linéaire.
2. Quelle quantité veut-on maximiser? En déduire la fonction objectif.
3. Exprimer la quantité de bois utilisée en fonction des variables du problème. En déduire une première contrainte.
4. Trouver une deuxième contrainte provenant de l'utilisation de la machine.
5. Écrire les contraintes sur les quantités de petites et grandes boîtes.
6. Les variables de ce programme sont-elles réelles? entières? positives? négatives?

Exercice 2 - Modélisation avec un Programme Linéaire

Un barman dispose des quantités d'alcool suivantes : 50cL de whisky, 50cL de vodka, 100cL de gin. Il peut faire les cocktails suivants :

- Manhattan (5\$) : 10cL de whisky et 5cL de vodka.
- Harlem (4\$) : 10cL de gin et 5cL de vodka.
- Special (6\$) : 15cL de gin et 10cL de whisky.

On suppose qu'il arrive à vendre tous les cocktails qu'il fabrique, et on veut déterminer quels cocktails réaliser pour maximiser son profit. Modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 3 - Modélisations avec des graphes

Dans la suite de cours, on étudiera de nombreux algorithmes pour résoudre certains problèmes de graphes. Le but de ces exercices est de voir que ces problèmes permettent de modéliser de nombreux problèmes issus de la vie réelle.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, on appelle :

- une *clique* : un ensemble de sommets deux à deux reliés dans le graphe.
- un *ensemble indépendant* : un ensemble de sommets deux à deux non reliés.
- un *couplage* : un ensemble d'arêtes dont les extrémités sont deux à deux disjointes (i.e. deux arêtes d'un couplage ne peuvent pas partager d'extrémités).
- une *coloration* : une assignation de couleurs aux sommets du graphe telle que toute paire de sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.

Le problème de la *clique maximum* (resp. *indépendant maximum*, *couplage maximum*) consiste à déterminer la plus grande clique (resp. ensemble indépendant, couplage) dans G . Le problème de *coloration* consiste à déterminer une coloration de G utilisant le moins de couleurs possible.

(A) Échanges linguistiques

Un groupe de n étudiants Erasmus, dénotés par E_1, \dots, E_n , arrive dans une université. Afin de faciliter leur intégration, le BDE souhaite organiser des soirées où chacun pourra communiquer avec n'importe quel autre invité dans une des langues qu'il maîtrise.

1. Modéliser le problème consistant à déterminer combien au maximum de personnes pourront être invitées simultanément à une fête comme un des problèmes de graphe de l'introduction.
2. Modéliser le même problème à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers.
3. Le BDE désire savoir combien de fêtes il doit organiser au minimum pour inviter au moins une fois chaque étudiant.

Modéliser ce problème comme un des problèmes de graphes de l'introduction.

(B) Emplois du temps

1. L'université accueille m étudiants E_1, \dots, E_m et propose n cours C_1, \dots, C_n . Chaque étudiant E_i s'inscrit à un sous-ensemble $D_i \subset \{C_1, \dots, C_n\}$ des cours proposés.

Le service des emplois du temps doit répartir ces cours dans la semaine, afin que chaque étudiant puisse assister à tous ses cours. Afin d'éviter les semaines trop chargées, on souhaite minimiser le nombre de créneaux horaires utilisés.

Modéliser ce problème comme un des problèmes défini dans l'introduction.

2. Une fois l'emploi du temps établi, il faut trouver des salles. Le service de gestion des salles souhaite alors trouver le nombre minimum de salles nécessaires pour que tous les cours de l'emploi du temps puissent avoir lieu. (On supposera qu'on n'a pas de contraintes sur le nombre de salles disponibles simultanément dans les locaux de l'université).

Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de graphes donné dans l'introduction.

(C) Journée des sports

Lors de la journée des sports de l'université, l'université souhaite proposer l'essai de certains sports S_1, \dots, S_n . Malheureusement, certains sports devant utiliser les mêmes gymnases ou le même matériel ne peuvent pas être proposés simultanément. Si S_i et S_j ne peuvent pas être proposés simultanément, on dit qu'ils sont *en conflit*. Les organisateurs veulent déterminer combien de sports au maximum pourront avoir lieu en même temps sans créer de conflit.

Modéliser ce problème comme un des problèmes défini dans l'introduction.

(D) Problème de transport

Une entreprise de logistique désire ouvrir de nouveaux entrepôts afin de satisfaire ses clients C_1, \dots, C_m avec la dernière version de son smartphone. L'entreprise a un ensemble d'entrepôts X_1, \dots, X_n . Chaque entrepôt a une capacité maximum r_i qui dépend de l'entrepôt. Pour chaque paire $i \leq n$ et $j \leq m$, acheminer un smartphone de l'entrepôt X_i au client C_j coûte $c_{i,j}$.

Le but de l'entreprise est de livrer à chaque client un smartphone tout en minimisant la somme des coûts de livraison.

Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de graphes présenté dans l'introduction.

Exercice 4 – Problème de transport version PL

On veut modéliser le problème de transport précédent comme un Programme Linéaire en Nombre Entiers.

1. Quelles sont les variables du programme ?
2. Écrire la contrainte qui exprime que le client C_j a reçu un smartphone.
3. Écrire la contrainte qui exprime qu'on ne prend pas plus de smartphones de l'entrepôt X_i qu'il n'en contient.
4. Quelle est la fonction objectif ?