TD4 – Dualité et algorithmes d'approximation

Exercice 1 – Calcul de duaux

Donner le dual des PL suivants :

$$\begin{array}{rcl} \max 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{soumis à} \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 40 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 10 \\ -x_2 + x_3 & \geq & 10 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \max 1000x_1 + 1200x_2 \\ \text{soumis à} \\ 10x_1 + 5x_2 & \leq & 200 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & 60 \\ x_1 & \leq & 12 \\ x_2 & \geq & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \max x_1 + 5x_2 - x_3 \\ \text{soumis à} \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 12 \\ x_1 - x_3 & \leq & 5 \\ x_2 - 5x_3 & \geq & 1 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \max x_1 \\ \text{soumis à} \\ -5x_1 + 3x_2 & = & 200 \\ 11x_1 + 3x_2 & = & 60 \\ x_2 & \geq & 6 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Exercice 2 – Certificats d'optimalité.

(a)
$$\begin{array}{rcl} \max x_1 + x_2 \\ \text{soumis à} \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} \max x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{soumis à} \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 & \leq & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

En utilisant la dualité de la programmation linéaire déterminer si :

— les points $(2/3, 5/3)$, $(5/3, 8/3)$ ou $(8/3, 2/3)$ sont optimaux pour (a).

— le point $(3, 1, 0)$ est optimal pour (b).

Exercice 3 – Ensembles intersectants

Un hypergraphe $H = (V, E)$ est défini par un ensemble V de sommets et un ensemble E d'hyperarêtes, i.e. de sous-ensembles de V. Un ensemble intersectant est un ensemble de sommets X de l'hypergraphe tel que, pour toute hyperarête $e \in E$, e contient au moins un sommet de X.

1. Exprimer le problème consistant à trouver un ensemble intersectant de taille minimum comme un PLNE.
2. Montrer que le dual de ce problème est le problème Hyperedge Packing, qui vise à trouver un ensemble maximum d'hyperarêtes deux à deux disjointes.
3. Qu'en déduire sur la taille d'un packing par rapport à la taille d'un ensemble intersectant ?

Exercice 4 – Tournois

On considère un tournoi joué par n équipes. L'équipe i rencontre l'équipe j exactement une fois et le match se termine soit par la victoire de l'équipe i soit par la victoire de l'équipe j. On peut donc représenter ce tournoi comme un graphe $G = (V, E)$ orienté où, pour chaque paire de sommets $(i, j) \in V^2$, on crée une arête orientée $i \to j$ de i vers j si i a battu j (et de j vers i autrement). On appelle *triangle orienté* un triplet de sommets (i, j, k) tels que $i \to j$, $j \to k$ et $k \to i$. (Un triangle est une "incohérence" pour le classement puisque cela signifie que l'on ne peut pas trouver d'ordre cohérent pour ces trois équipes).

1. Donner un tournoi à trois sommets sans triangle orienté. Quatre sommets ? n sommets ?
2. Montrer qu'il existe un unique tournoi à n sommets sans triangle orienté (à renommage près des sommets).
3. Donner un algorithme qui, étant donné un tournoi, compte le nombre total de triangles orientés. Autrement dit le nombre de triplets (i, j, k) qui forment des triangles orientés.
4. Les triangles d'un ensemble $\mathcal{S}$ de triangles orientés sont *sommets-disjoints* si pour toute paire de triangles orientés T_1, T_2 de $\mathcal{S}$, les sommets du triangle T_1 et du triangle T_2 sont deux à deux distincts. Modéliser avec un programme linéaire en nombres entiers (P) le problème qui consiste à trouver le nombre maximum de triangles orientés sommets-disjoints.
5. Un *feedback vertex set* est un ensemble de sommets X dont la suppression laisse un graphe sans triangle orienté. Autrement dit, il n'y a pas de triangle orienté dont les trois sommets sont dans $V \setminus X$.
   Modéliser avec un programme linéaire en nombres entiers (D) le problème qui consiste à trouver un feedback vertex set de taille minimum.
6. On suppose que les relaxations fractionnaires de (P) et (D) sont duales (ne le prouvez pas !). Que dire de la valeur optimale de (P) par rapport à celle de (D) ?
7. Montrer que l'ensemble des sommets apparaissant dans un ensemble maximal par inclusion de triangles orientés sommets-disjoints est un feedback vertex set de taille au plus trois fois la taille d'un feedback vertex set minimum.
8. En déduire un algorithme glouton qui donne un feedback vertex set de taille au plus trois fois l'optimum.

Exercice 5 – Voyageur de commerce.
Dans le problème du voyageur de commerce (VdC), on se donne une clique G et une fonction ω de pondération des arêtes. Le but est de trouver un cycle *hamiltonien* C (c'est-à-dire qui passe exactement une fois par tous les sommets) de poids minimum. On note $VdC(G, \omega)$ la valeur d'une solution optimale.

On dit qu'une instance du problème du voyageur de commerce est *métrique* si ω satisfait l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire si $\omega(uv) + \omega(vw) \geq \omega(uw)$ pour chaque triplet de sommets (u, v, w) (intuitivement : "aller de u à w en passant par v est plus long que d'y aller directement").

Un cycle hamiltonien dans un graphe $G = (V, E)$ (pas forcément complet) est un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet.

1. Montrer que s'il n'existe pas d'algorithme polynomial pour trouver un cycle hamiltonien, alors pour toute constante ρ, le problème du VdC n'a pas de ρ-approximation en temps polynomial.
2. Soit $ST(G, \omega)$ le coût d'un arbre couvrant minimum de G. Montrer que $ST(G, \omega) \leqslant VdC(G, \omega)$.
3. Un *circuit* dans un graphe est une suite de sommets $x_1, \ldots, x_r$ tel que $x_r = x_1$ et pour tout i, $x_i x_{i+1}$ est une arête (certains sommets peuvent être répétés).
   Montrer qu'il existe un circuit qui passe par tous les sommets dont le poids est au plus $2ST(G, \omega)$.
4. En déduire une 2-approximation du problème VdC lorsque l'instance est métrique.
5. On dit qu'un graphe est *eulérien* si tous les sommets ont degré pair. Montrer que si un graphe est eulérien alors il existe un circuit qui passe exactement une fois par chaque arête.
6. On considère une instance métrique G du problème de VdC. Soit T un arbre couvrant de poids minimum et X l'ensemble des sommets de degré impair. Montrer que X a taille paire.
7. Montrer qu'il existe un couplage parfait de X dont le poids est au plus $\frac{1}{2} \cdot VdC(G, \omega)$.
8. En déduire une $\frac{3}{2}$-approximation pour le problème VdC.