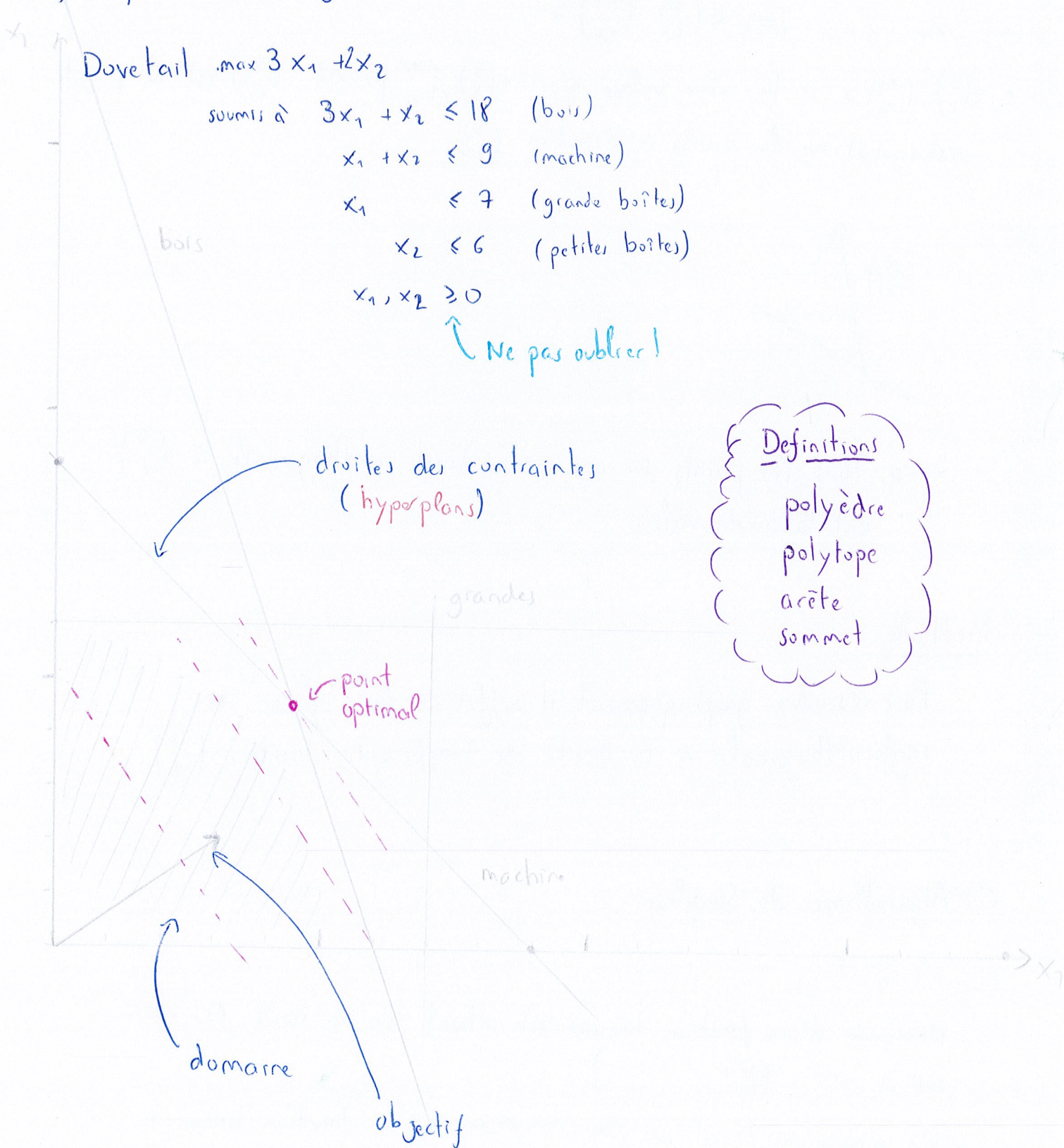


III] Résoudre un PL (en nombre réel).

9

A) Représentation géométrique du ~~Simplex~~ PL



Remarque

Le domaine est convexe

B) Résolution graphique

(10)

Rappels d'algèbre linéaire

← produit scalaire

• $3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

• $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ a la même valeur que $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \right\rangle$ où $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal sur la droite de direction $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



→ Tous les points sur une même droite orthogonale à $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ont la même valeur

Méthode

Pour résoudre graphiquement il suffit de faire "glisser" une règle orthogonale à la droite de coefficients directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

C) Algorithme du Simplexe

Rappels d'analyse

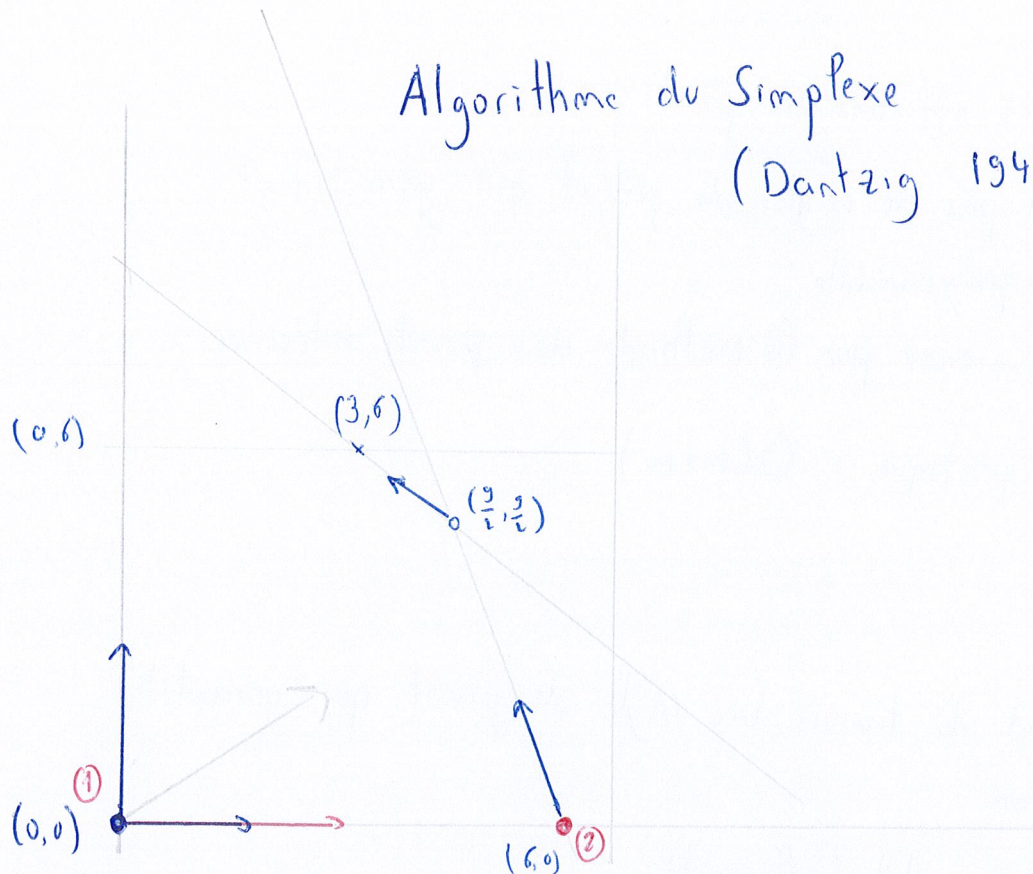
- Maximum d'une fonction linéaire est atteint sur un bord. (et même sur un coin appelé **sommet**)
- Un maximum local sur un convexe (d'une fonction linéaire) est un maximum global.

Objectif

Trouver un maximum local



Algorithme du Simplexe (Dantzig 1947)



Q : Améliore-t-on la solution en partant dans une des deux directions ?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (0,0) &\rightarrow 0 \\ (6,0) &\rightarrow 18 \\ (0,6) &\rightarrow 12 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad (6,0) \rightarrow 18$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 &= 18 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2x_1 &= 9 \\ x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{9}{2}$$

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) \rightarrow \frac{45}{2}$$

Maximum local donc maximum global !

Remarques

(12)

- Particulièrement efficace en pratique.
- On ne connaît pas de règles de pivot qui garantissent une terminaison polynomiale
- Aujourd'hui concurrencé par la méthode des points intérieurs.
- Complexité en pratique : $O(n+m)$

Complexité :

- 20 ans avant de trouver une règle de pivot qui garantit la terminaison
- Aucune règle garantit l'efficacité
- Analyse perturbée $\rightarrow$ Terminaison polynomiale

PL vs PLNE

PL : $\exists$ algo polynomial

PLNE : NP-complet, non approximable...

Domaine discret mais on perd la puissance de l'analyse.

$\hookrightarrow$ Beaucoup plus difficile

$\rightarrow$ Suite du cours : principalement de l'optimisation discrète.

Comment faire du Simplexe en pratique.

(13)

* Transformer des inégalités en égalité:

Ajout des variables d'écart.

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (\Rightarrow) \quad 3x_1 + x_2 + y_1 = 18$$

$$y_1 \geq 0.$$

* Qu'est-ce qu'un sommet du polytope?

→ ~~Deux~~ variables ^(engén.) ~~seulement~~ dimension) sont nulles

ex : pour le point optimal, les variables d'écart de bois et de machine

* Transfert le long d'une arête:

on relâche la nullité d'une variable et on regarde laquelle devient nulle à sa place

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.à: } 3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.à: } 3x_1 + x_2 + y_1 = 18$$

$$x_1 + x_2 + y_2 = 9$$

$$x_1 + y_3 = 7$$

$$x_2 + y_4 = 6$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

6 variables
4 contraintes
On en a deux
en "trop"

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

II. Dualité de la Programmation Linéaire

(14)

A. Interprétation économique

On a notre PL

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{soumis à } 3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

variables

contraintes

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Imaginons qu'on veuille mettre aux enchères (décroissantes)
les ressources.

Mais on n'est pas prêt à le faire à n'importe quel prix

y_1 = prix bois

y_2 = prix machine

y_3 = prix grd boîte

y_4 = prix pte boîte

On veut

$$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \rightarrow \text{en dessous autant le garder ?}$$

$$y_1 + y_2 + y_4 \geq 2$$

Avec comme contrainte

$$\min 18y_1 + 9y_2 + 7y_3 + 6y_4$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1, \dots, y_4 \geq 0$$

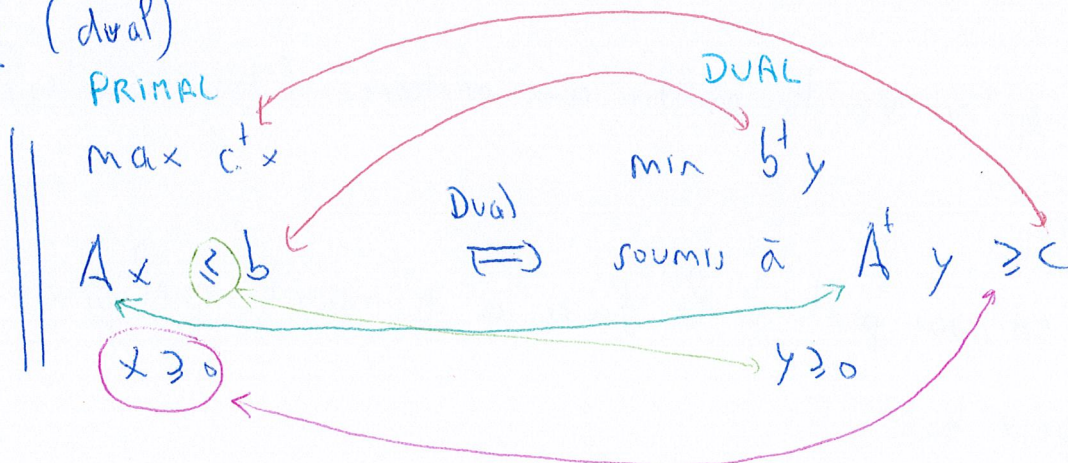
15

Remarque:

- Les contraintes sont devenues variables
- Les variables sont devenues contraintes
- La matrice est la duale
- Obj $\Rightarrow$ Vecteur de contraintes

B. Definition

Def (dual)



Comment faire s'il n'a pas la bonne forme?

Ex: $\max 3x_1 + x_2$

soumis à

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

DUAL

$\rightarrow$

$$\min 5y_1 - 3y_2$$

soumis à

$$y_1 - y_2 \geq 3$$

$$y_1 - y_2 \geq +3$$

$$\Downarrow y_1, y_2 \geq 0$$

La contrainte " $\geq$ " du primal

a transformé la variable en variable négative dans le dual!

$$\min 5y_1 + 3y_2'$$

$$\text{soumis à } \begin{aligned} y_1 + y_2' &\geq 3 \\ y_1 + y_2' &\geq 1 \end{aligned}$$

<u>Primal</u>		<u>Dual</u>
max		min
Vecteur de contraintes	→	Fonction objectif
Fonction objectif	→	Vecteur de contrainte
Variable	↔	Contrainte
contraintes	↔	Variable
Contraintes $\leq$	↔	Variable ≥ 0
— $\geq$		Variable ≤ 0
— $=$		Variable non contrainte
Variable ≥ 0	↔	Contrainte $\geq$
— ≤ 0		— $\leq$
— non contr.		— $=$

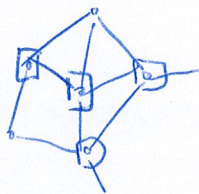
Si non → on le refait à la main!

~~Interprétation géométrique du dual~~

(17)

Exemple 2

Couverture par les sommets
= Ens. de sommets qui touchent
toutes les arêtes



$$PL: \min \sum_v x_v$$

$$\text{soumis à } \forall e=(u,v) \quad x_u + x_v \geq 1$$

$$\forall u \quad x_u \in \{0,1\}$$

On considère la relaxation fractionnaire de ce PL
 $\Leftrightarrow$ on remplace les contraintes d'intégralité par
des contraintes réelles

Rmq:

Comme on a un problème de minimisation, relâcher la contrainte
d'intégralité peut seulement diminuer la valeur de la solution.

$$\min \sum_{v \in V} x_v$$
$$\text{soumis à } \begin{cases} x_u + x_v \geq 1 \\ x_u \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\min \sum_v x_v$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \uparrow & \leftarrow v & \rightarrow \\ e^{(u,v)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_u \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix} \end{matrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul du dual

"1" à chaque fois que v est une extrémité de e

$$\max \sum_{e \in E} y_e$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \leftarrow v & \rightarrow \\ v & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_e \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{matrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_e \geq 0$

$$\max \sum_e y_e$$
$$\text{soumis à } \begin{cases} \sum_{e/v \text{ extr. de } e} y_e \leq 1 \\ y_e \geq 0 \end{cases}$$

Interprétation du dual: Couplage Maximum

(18)

- On considère la version entière du problème



Couplage = Arêtes deux à deux extrémités disjointes

C. Dual comme borne du primal

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

On part des contraintes pour trouver des bornes supérieures

$$36 \geq 3x_1 + 2x_2 \geq 3x_1 + 2x_2 \quad \leadsto \text{L'optimal est inférieur à 36}$$

↑
contrainte

↑
positivité

$$3x_1 + 2x_2 \leq 3x_1 + 3x_2 \leq 27 \quad \leadsto \text{contrainte 2.}$$

Peut-on faire mieux?

↳ OUI! on peut combiner les contraintes

On a écrit

$$2 \times (c1) \geq \text{opt}$$

$$3 \times (c2) \geq \text{opt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(c1) + \frac{3}{2}(c2) = 3x_1 + 2x_2 \leq \frac{1}{2} \cdot 18 + \frac{3}{2} \cdot 9$$

⇒ On a trouvé une borne supérieure qui correspond à une valeur trouvée

⇒ on a trouvé un point optimal

On peut donc écrire le dual comme contrainte du dual (19)

$$y_1 \times (c1) + y_2 (c2) + y_3 (c3) + y_4 (c4) \geq 3x_1 + 2y_2$$

On peut diviser cette équation en 2: la partie x_1 et la partie x_2

$$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 + y_4 \geq 4$$

$$y_1, \dots, y_4 \geq 0$$

Et le but est de minimiser la valeur de la solution (pour trouver la borne supérieure la plus petite possible).

→ on retrouve le dual

D. Théorèmes de dualité faible

Dualité faible

$$\begin{array}{ll} \max c^t x \\ \text{(P)} \text{ soumis à } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

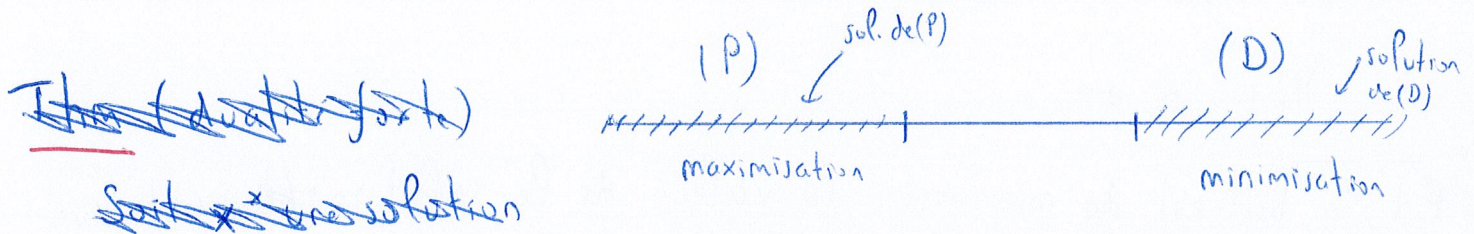
$$\begin{array}{ll} \min b^t y \\ \text{(D)} \text{ soumis à } A^t y \geq c \\ y \geq 0 \end{array}$$

Thm (Dualité faible)

Soit x une solution du primal
 y ————— dual

$$\text{Val}_p(x) = c^t x \leq \text{Val}_d(y) = b^t y$$

$$\begin{aligned}
 y^t A &\leq y^t A x \leq c^t x \\
 \parallel & \parallel \\
 A^t y & \parallel \\
 b^t y & \leq \\
 \uparrow & = \text{Val}_D(y) \\
 & \parallel \\
 & \text{Val}_P(x)
 \end{aligned}$$



Application : algorithme d'approximation

Soit Π un problème de minimisation (resp. maximisation)

On dit qu'un algorithme α est une α -approximation

si on peut prouver que, quelque soit une instance I de Π

A renvoie une solution dont la valeur est $\leq \alpha \cdot \text{Val}_\Pi(\text{OPT})$

(resp $\geq \frac{1}{\alpha} \cdot \text{Val}_\Pi(\text{OPT})$)

c'est toute la
différence avec
une heuristique
qui est sans garantie
de performance

on fait une analyse
dans le pire des cas.

Thm

Le problème de couverture minimum par les sommets admet une 2-approximation

Preuve:

Soit G un graphe.

On sait qu'un couplage est le dual d'une couverture.

On va utiliser le résultat.

On calcule gloutonnement un couplage maximal (par inclusion)

Soit M un tel couplage

Lemme 1:

$$|M| \leq \text{Couverture min.}$$

Pf: Dualité faible.

Lemme 2

$$2|M| \geq \text{Couverture min}$$

Pf: On montre que l'union des extrémités des arêtes de M forme un couplage.

E. Dualité forteThm

Soit (P) un PL de maximisation (en nbre réel)

Soit (D) son dual.

Soit x^* une solution optimale de (P)

y^* ————— (D)

$$\text{Val}_P(x^*) = \text{Val}_D(y^*)$$

← on suppose que ces valeurs existent

Applications

- MaxFlot - minCut dans un graphe
- CouplageMax = CouvertureMin dans les graphes bipartis
- ...etc...

F. Théorème des écarts complémentaires

Thm

Soit x une solution de (P)

Soit y une solution de (D)

x et y sont équivalents

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & \text{ou } y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i = c_j & \text{ou } x_j = 0 \end{cases}$$

si la contrainte n'est pas serrée alors la variable duale est nulle.

si la variable n'est pas nulle alors la contrainte duale est serrée.

Interprétation

- Les variables du dual peuvent être interprétées comme le "prix" d'une unité de la contrainte
 - ↳ si la contrainte n'est pas serrée, changer un peu le terme droit ne change rien
 - ⇒ La valeur "locale" de la contrainte est nulle.

Application : Test d'optimalité de la solution

(23)

$$\begin{aligned} & \text{(P)} \\ & \max 3x_1 + 2x_2 \\ & \text{soumis à } 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ & \quad x_1 + x_2 \leq 9 \\ & \quad x_1 \leq 7 \\ & \quad x_2 \leq 6 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min 18y_1 + 9y_2 + 7y_3 + 6y_4 \\ & \text{soumis à} \\ & \quad 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ & \quad y_1 + y_2 + y_4 \geq 2. \end{aligned}$$

Q : Le point $(9/2, 9/2)$ est-il optimal ?

Recette

Etape 1 : Le point satisfait-il toutes les contraintes ?

Etape 2 : Le point atteint-il l'égalité pour (exactement) $\#$ variables contraintes ?

Etape 3 : On en déduit les variables non-nulles du dual. *l'optimal est un point extrême*

Etape 4 : On utilise les variables nulles du primal pour en déduire les contraintes par serrées du dual. *Theorème des écarts complémentaires*

Etape 5 : On résout les équations du dual pour trouver une solution

Etape 6 : La solution de (P) est optimale ssi
- les contraintes de positivité du dual sont satisfaites
(la valeur est la même)

dualité forte.

Exemple

- $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}) \rightarrow$ (C1) et (C2) sont serrées
par (C3) et (C4) $\Rightarrow y_3, y_4 = 0$.

$\rightarrow x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$ Les deux contraintes du dual sont serrées

$\hookrightarrow$ On résout:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La solution est ~~entière~~ positive $\Rightarrow (\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ est optimale

! Pour vérifier les calculs

$$\text{Val}_D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 18 + \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{5}{2} \cdot 9 = \frac{45}{2} \text{ qui est la valeur dans (P) de } \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$\hookrightarrow$ On a un certificat d'optimalité.

- $(3, 6)$ est-il optimal?

(C2) et (C4) sont serrées.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = 3 \\ y_2 + y_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 3 \\ y_4 = -1 \end{cases}$$

ms La solution du système ne satisfait pas les conditions du dual

$\Rightarrow$ Ce n'est pas une solution!