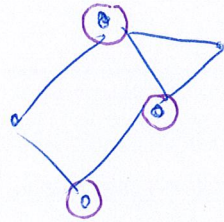


Algorithmique paramétrée.

①

Rappel

Vertex Cover (Couverture par les sommets)



- 2-approximable

- NP-complet

↳ pas de solution optimale en temps poly (probablement)

Fin de l'histoire ? NON!

↳ Algo exponentiels exacts

↳ Algo. paramétrés.

Idee : Certains paramètres rendent un problème simple.

↳ e.g. structure du graphe.

↳ taille de certains paramètres.

Definition

Un problème Π est efficace à paramètre fixé (FPT) pour un paramètre k s'il peut être décidé en temps $f(k) \cdot \text{poly}(n)$ où n est la taille de l'instance.

Rmq

Si $\Pi \in P$ alors $\Pi \in \text{FPT}$ pour n'importe quel paramètre

Exemple

(2)

Vertex Cover paramétré par la taille de la solution.

Théorème

VC param. taille de la solution est FPT.

Preuve

Méthode de preuve : arbre de branchement

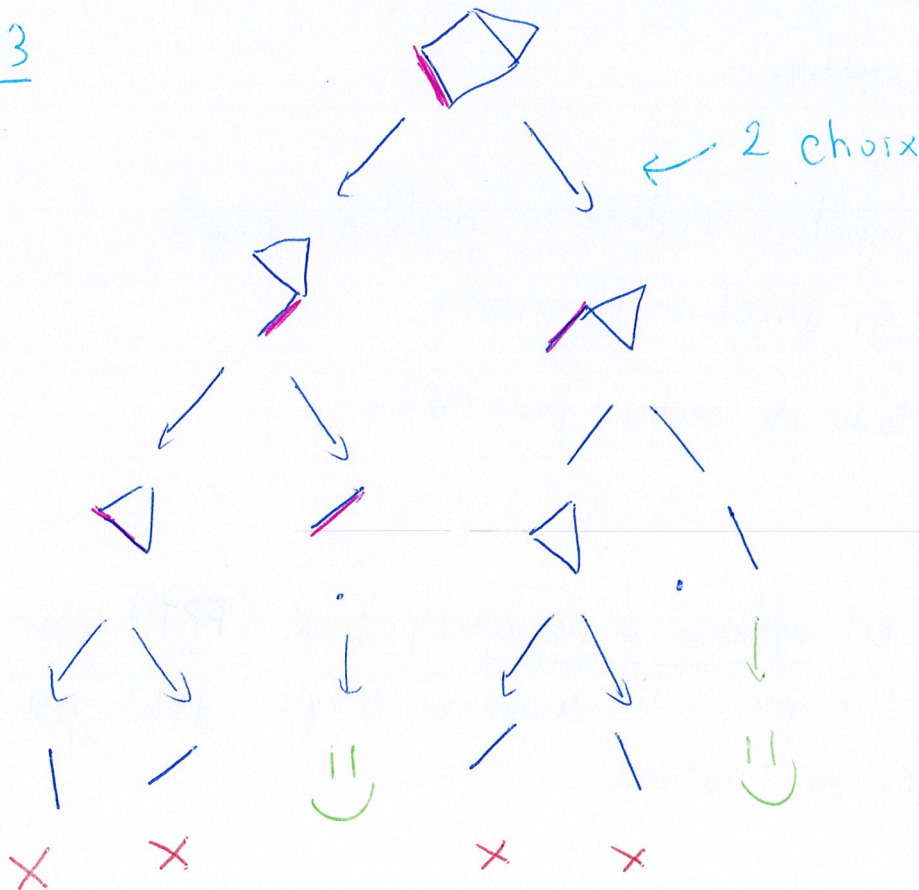
Si l'arbre d'exploration des solutions

- à largeur ~~polynomiale~~ constante (ou $f(k)$)

- a profondeur $f(k)$

$\Rightarrow$ Algo FPT

$k=3$



On s'arrête
à profondeur
3.

Algorithme VCoverEntrée : Un graphe G , un entier k Sortie : oui ssi $\exists$ VC de taille au plus k ~~$G' \leftarrow G$~~ ~~$k' \leftarrow k$~~ si G ne contient pas d'arête, renvoyer vrai
~~tant que G' contient une arête~~si $k' = 0$ renvoyer fauxsinon $e \leftarrow uv$ Renvoyer ($\text{VCover}(G \setminus u, k'-1)$ ou $\text{VCover}(G \setminus v, k'-1)$)Théorème :L'algorithme peut être exécuté en temps $2^k \cdot \text{poly}(n)$ Définition (noyau)

- On dit qu'un problème Π admet un noyau de taille $f(k)$ paramétré par k si, pour toute instance I de paramètre k il existe un algorithme qui s'exécute en temps $\text{poly}(n)$ et qui renvoie une instance I' de taille au plus $f(k)$ telle que I' est satisfaite ssi I l'est.

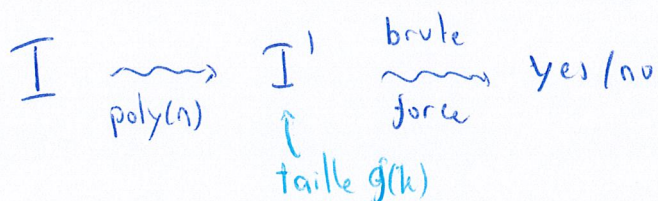
Théorème

(4)

- || Π est FPT paramétré par k
|| si et seulement si Π admet un noyau paramétré par k .

Preuve

- Si Π admet un noyau alors



→ temps total : $\text{poly}(n) + f(g(k))$.

- Si Π est FPT paramétré par k alors on construit un noyau comme suit:

- Si $|I| \leq f(k) \rightarrow$ renvoyer I .

- Sinon $f(k) \cdot \text{poly}(n) = \text{poly}'(n)$

↳ Résoudre l'instance en temps polynomial
et retourner une instance I' triviale.

Corollaire

VC paramétré par k admet un noyau de taille 2^k

Question : Peut-on faire mieux ?

Définition:

On dit que Π admet un noyau polynomial si l'instance I' a taille $\text{poly}(k)$.

Théorème:

Vertex Cover paramétré par la taille de la solution
admet un noyau

Preuve

Technique de preuve

- 1 On donne des règles de réduction.
- 2 On prouve que quand on ne peut plus les appliquer, le graphe a la taille demandée

* Règle 1:

Si G a un sommet isolé x , on le supprime

vrai ssi l'autre est vraie

Fait: (G, k) et $(G \setminus x, k)$ sont équivalentes

Pv: $\Rightarrow$ Un VC de G est un VC de $G \setminus x$ —

$\Leftarrow$ Soit X un VC de $G \setminus x$. Comme aucune arête de G ne touche x , c'est aussi un VC de G .

* Règle 2:

Si G a un sommet v de degré $k+1$, alors (G, k) et $(G \setminus v, k-1)$ sont équivalentes.

Autrement dit, s'il existe une solution, elle contient v .

Fait:

La Règle 2 est correcte

(6)

Preuve

Supposons par l'absurde que v ne soit pas dans une solution. X

Comme, $\forall e \in E$, X contient une extrémité de e , si on note $w_1, \dots, w_{k+1}$ $k+1$ voisins de X , on a $\forall i, w_i \in X$.

Donc X a taille $k+1$, une contradiction

~~Propriété~~ Règle 3

Si ni Règle 1 ni Règle 2 ne peuvent être appliquées alors si le graphe G a taille $\geq 2k^2 + 2k + 1$

alors renvoyer une instance trivialement fautive.

Preuve:

On va montrer que si G a taille au moins $2k^2 + 2k + 1$ alors G contient un couplage de taille $k+1$.

Par dualité, cela implique qu'il y a un VC à taille au moins $k+1$ et donc que l'instance est fautive.

On considère l'algorithme glouton qui sélectionne une nouvelle arête extrémité disjointe tant que possible. Soit M le couplage obtenu. Comme G a au moins $2k^2 + 2k$ sommets, si $|M| \leq k$, $2k^2 + 1$ sommets ne sont pas dans le couplage.

Comme les sommets ont degré $\leq k$ (Règle 2) $\Rightarrow \exists$ un sommet qui n'est pas adjacent à un sommet de M .

Comme v n'est pas isolé (Règle 1), une arête incidente à v peut être ajoutée au couplage, contradiction avec la maximalité de M .

Donc $|M| \geq k+1$ et donc (G, k) est une instance négative.

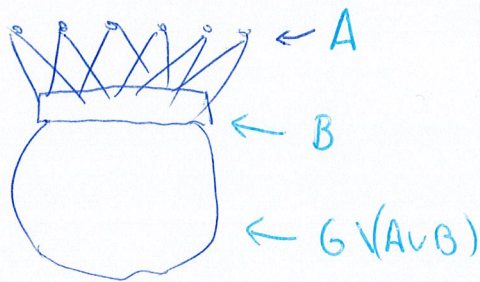
Théorème

(7)

VC admet un noyau de taille $O(k)$.

Preuve

L'argument principal de la preuve consiste à définir la notion de couronne et prouver qu'une telle couronne peut être trouvée en temps polynomial.



(A, B) forme une couronne si :

A, B sont des ensembles de sommets tq

- $\nexists$ arêtes avec une extrémité dans A et une extrémité dans $V \setminus (A \cup B)$
- A est un I.S. (ensemble indépendant)

~~$\forall A \subseteq V \setminus (A \cup B)$~~

Il y a un couplage $A-B$ qui couvre B .

Propriété :

Si G admet une couronne (A, B) alors il existe un VC minimum X tel que X contient B (et ne contient pas A).

Preuve :

- On peut montrer facilement que la taille d'une solution restreinte à $A \cup B$ contient au moins $|B|$ sommets (dualité de la PL)
- Prendre les sommets de B ne peut que couvrir plus d'arêtes.

Propriété:

⑧

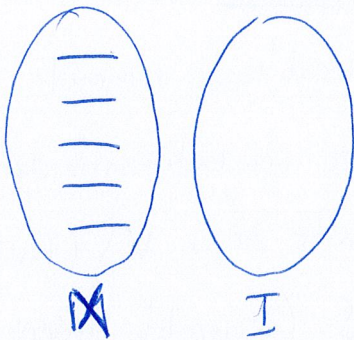
Si G a taille $> 3k$ alors on peut trouver en temps polynomial

- soit un couplage de taille $k+1$ ← instance négative

- soit une couronne ← on va pouvoir réduire.

Preuve

On construit gloutonnement un couplage maximal par inclusion. X



Les sommets restants forment un ensemble indépendant.

Si $|X| \geq k+1 \rightarrow$ c'est terminé.

Donc on peut supposer $|X| \leq k$.

On "oublie" les arêtes de X et on considère le bipartite entre X et I .

- Si couplage de taille $k+1 \rightarrow$ fini.

- Sinon, par Théorème de König max matching = vertex cover min

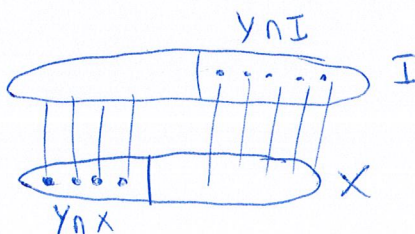
$\Rightarrow \exists VC$ de taille au plus k .

Cas 1 : Y ne contient aucun sommet de X .

$\Rightarrow$ il contient tout I

$\Rightarrow |I| \leq k$.

Cas 2 : Y contient un sommet de X au moins



$\rightarrow$ on a une couronne.