TD3 – Programmation linéaire

Exercice 1 – Modélisation

Une entreprise de fabrication de pâtée pour chiens vend deux types de produits fabriqués à partir de céréales et de viande : des Frisky Pup et des Husky Hound.

- Chaque paquet de Frisky Pup est vendu à 7 euros et est fabriqué à partir de 1kg de céréales et 1.5kg de viande.
- Chaque paquet de Husky Hound est vendu à 6 euros et est fabriqué à partir de 2kg de céréales et 1kg de viande.

Le prix des céréales est de 1 euro par kilo, et celui de la viande de 2 euros par kilo. L'empaquetage coûte 1.4 euro par paquet pour les Frisky Pup et 0.6 euro par paquet pour les Husky Hound. On peut acheter au plus 240000kg par mois de céréales et 180000kg par mois de viande. Enfin, l'entreprise ne peut empaqueter qu'au plus 110000 paquets de Frisky Pup par mois. Le but est de maximiser le bénéfice mensuel de l'entreprise en supposant que tous les paquets produits soient vendus.

Formuler le problème comme un PL et le résoudre géométriquement.

Exercice 2 – Calcul de duaux

Donner le dual des PL suivants :

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \\ \text{soumis à} & \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 10 \\ -x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max 1000x_1 + 1200x_2 & \\ \text{soumis à} & \\ 10x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 60 \\ x_1 &\leq 12 \\ x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max x_1 + 5x_2 - x_3 & \\ \text{soumis à} & \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_1 - x_3 &\leq 5 \\ x_2 - 5x_3 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max x_1 & \\ \text{soumis à} & \\ -5x_1 + 3x_2 &= 200 \\ 11x_1 + 3x_2 &= 60 \\ x_2 &\geq 6 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 3 – Certificats d'optimalité.

(a)

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 & \\ \text{soumis à} & \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max x_1 + 7x_2 + 3x_3 & \\ \text{soumis à} & \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

En utilisant la dualité de la programmation linéaire déterminer si :

- les points $(2/3, 5/3)$, $(5/3, 8/3)$ ou $(8/3, 2/3)$ sont optimaux pour (a).
- le point $(3, 1, 0)$ est optimal pour (b).

Exercice 4 – Ensembles intersectants

Un hypergraphe $H = (V, E)$ est défini par un ensemble V de sommets et un ensemble E d'hyperarêtes, i.e. de sous-ensembles de V. Un ensemble intersectant est un ensemble de sommets X de l'hypergraphe tel que, pour toute hyperarête $e \in E$, e contient au moins un sommet de X.

1. Exprimer le problème consistant à trouver un ensemble intersectant de taille minimum comme un PLNE.
2. Montrer que le dual de ce problème est le problème Hyperedge Packing, qui vise à trouver un ensemble maximum d'hyperarêtes deux à deux disjointes.
3. Qu'en déduire sur la taille d'un packing par rapport à la taille d'un ensemble intersectant ?

Exercice 5 – Tournois

On considère un tournoi joué par n équipes. L'équipe i rencontre l'équipe j exactement une fois et le match se termine soit par la victoire de l'équipe i soit par la victoire de l'équipe j. On peut donc représenter ce tournoi comme un graphe $G = (V, E)$ orienté où, pour chaque paire de sommets $(i, j) \in V^2$, on crée une arête orientée $i \to j$ de i vers j si i a battu j (et de j vers i autrement). On appelle *triangle orienté* un triplet de sommets (i, j, k) tels que $i \to j$, $j \to k$ et $k \to i$. (Un triangle est une "incohérence" pour le classement puisque cela signifie que l'on ne peut pas trouver d'ordre cohérent pour ces trois équipes).

1. Donner un tournoi à trois sommets sans triangle orienté. Quatre sommets ? n sommets ?
2. Montrer qu'il existe un unique tournoi à n sommets sans triangle orienté (à renommage près des sommets).
3. Donner un algorithme qui, étant donné un tournoi, compte le nombre total de triangles orientés. Autrement dit le nombre de triplets (i, j, k) qui forment des triangles orientés.
4. Les triangles d'un ensemble $\mathcal{S}$ de triangles orientés sont *sommets-disjoints* si pour toute paire de triangles orientés T_1, T_2 de $\mathcal{S}$, les sommets du triangle T_1 et du triangle T_2 sont deux à deux distincts. Modéliser avec un programme linéaire en nombres entiers (P) le problème qui consiste à trouver le nombre maximum de triangles orientés sommets-disjoints.
5. Un *feedback vertex set* est un ensemble de sommets X dont la suppression laisse un graphe sans triangle orienté. Autrement dit, il n'y a pas de triangle orienté dont les trois sommets sont dans $V \setminus X$.
   Modéliser avec un programme linéaire en nombres entiers (D) le problème qui consiste à trouver un feedback vertex set de taille minimum.
6. On suppose que les relaxations fractionnaires de (P) et (D) sont duales (ne le prouvez pas !). Que dire de la valeur optimale de (P) par rapport à celle de (D) ?
7. Montrer que l'ensemble des sommets apparaissant dans un ensemble maximal par inclusion de triangles orientés sommets-disjoints est un feedback vertex set de taille au plus trois fois la taille d'un feedback vertex set minimum.
8. En déduire un algorithme glouton qui donne un feedback vertex set de taille au plus trois fois l'optimum.

Exercice 6 – Ensembles indépendants

1. Écrire le problème de l'ensemble indépendant maximum comme un programme linéaire en nombre entiers.
2. Trouver une solution optimale entière dans le cas d'un triangle (le graphe à trois sommets où toutes les arêtes existent). Prouver son optimalité.
3. Trouver, dans le cas du triangle, une solution optimale de la relaxation fractionnaire et prouver son optimalité. Est-elle égale à la solution entière ?
4. ($\star$) Trouver une collection de graphes où le ratio entre valeur de la meilleure solution optimale réelle et meilleure solution optimale entière est arbitrairement grand.