

TD2 – Programmation linéaire

Exercice 1 – Modélisation

Une entreprise de fabrication de pâtée pour chiens vend deux types de produits fabriqués à partir de céréales et de viande : des Frisky Pup et des Husky Hound.

- Chaque paquet de Frisky Pup est vendu à 7 euros et est fabriqué à partir de 1kg de céréales et 1.5kg de viande.
- Chaque paquet de Husky Hound est vendu à 6 euros et est fabriqué à partir de 2kg de céréales et 1kg de viande.

Le prix des céréales est de 1 euro par kilo, et celui de la viande de 2 euros par kilo. L'emballage coûte 1.4 euro par paquet pour les Frisky Pup et 0.6 euro par paquet pour les Husky Hound. On peut acheter au plus 240000kg par mois de céréales et 180000kg par mois de viande. Enfin, l'entreprise ne peut emballer qu'au plus 110000 paquets de Frisky Pup par mois. Le but est de maximiser le bénéfice mensuel de l'entreprise en supposant que tous les paquets produits soient vendus.

Formuler le problème comme un PL et le résoudre géométriquement.

Exercice 2 – Production de citrouilles (Partiel 2026) Les villageois de Transylvanie font pousser des citrouilles, et la région est mondialement reconnue pour ses deux spécialités : la soupe de citrouille, et l'huile de pépins de citrouille. Ces deux produits demandent un certain temps de fabrication sur les trois machines du village : la centrifugeuse qui sépare la chair des pépins, le mixeur qui produit de la soupe à partir de la chair, et le pressoir qui extrait l'huile des pépins. Les durées de fabrication par hectolitre de produit sont résumées dans le tableau ci-dessous. Chaque machine étant sujette à des problèmes de surchauffe, le tableau indique également la disponibilité totale de chaque machine par jour.

	Centrifugeuse	Pressoir	Mixeur
Soupe (hL)	2h	0h	1h
Huile (hL)	3h	1h	0h
Disponibilité	18h	3h	5h

On cherche à maximiser les profits du village, sachant que la vente de soupe rapporte une marge de 1000€ par hectolitre, et la vente d'huile rapporte 2000€ par hectolitre.

1. Modéliser ce problème sous forme d'un PL. Pensez à bien décrire à quoi correspondent vos variables (et les unités choisies).
2. Résoudre graphiquement votre PL. Donnez les valeurs des variables et de la fonction d'optimisation lorsque l'optimum est atteint.

Exercice 3 – Calcul de duals

Donner le dual des PL suivants :

$$\max 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

soumis à

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 10$$

$$-x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max 1000x_1 + 1200x_2$$

soumis à

$$10x_1 + 5x_2 \leq 200$$

$$2x_1 + 3x_2 = 60$$

$$x_1 \leq 12$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{ll}
\max x_1 + 5x_2 - x_3 & \\
\text{soumis à} & \\
x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 & \\
x_1 - x_3 \leq 5 & \\
x_2 - 5x_3 \geq 1 & \\
x_1 \geq 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\max x_1 & \\
\text{soumis à} & \\
-5x_1 + 3x_2 = 200 & \\
11x_1 + 3x_2 = 60 & \\
x_2 \geq 6 & \\
x_1 \geq 0 &
\end{array}$$

Exercice 4 – Ensembles indépendants

1. Écrire le problème de l'ensemble indépendant maximum comme un programme linéaire en nombre entiers.
2. Trouver une solution optimale entière dans le cas d'un triangle (le graphe à trois sommets où toutes les arêtes existent). Prouver son optimalité.
3. Trouver, dans le cas du triangle, une solution optimale de la relaxation fractionnaire et prouver son optimalité. Est-elle égale à la solution entière ?
4. (★) Trouver une collection de graphes où le ratio entre valeur de la meilleure solution optimale réelle et meilleure solution optimale entière est arbitrairement grand.

Exercice 5 – Certificats d'optimalité.

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \max x_1 + x_2 \\
& \text{soumis à} \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(b)} & \max x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
& \text{soumis à} \\
& -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 0 \\
& x_1 - 4x_2 + 2x_3 \leq 0 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

En utilisant la dualité de la programmation linéaire déterminer si :

- les points $(2/3, 5/3)$, $(5/3, 8/3)$ ou $(8/3, 2/3)$ sont optimaux pour (a).
- le point $(3, 1, 0)$ est optimal pour (b).

Exercice 6 – Examen 2026 On considère le PL (P) suivant :

$$\begin{array}{ll}
\min 30x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 & \\
\text{avec } 4x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 & \\
5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq 3 & \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 &
\end{array}$$

1. Donner le dual (D) de (P).
2. Si on vous donne le choix entre résoudre (P) et résoudre (D), lequel choisiriez-vous ? Pourquoi ? Expliciter la méthode que vous utiliseriez **SANS l'appliquer**.
3. À l'aide du théorème des écarts complémentaires, déterminer si le quadruplet $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 5, 8)$ est une solution optimale de (P).

Exercice 7 – Ensembles intersectants

Un hypergraphe $H = (V, E)$ est défini par un ensemble V de sommets et un ensemble E d'hyperarêtes, i.e. de sous-ensembles de V . Un ensemble intersectant est un ensemble de sommets X de l'hypergraphe tel que, pour toute hyperarête $e \in E$, e contient au moins un sommet de X .

1. Exprimer le problème consistant à trouver un ensemble intersectant de taille minimum comme un PLNE.
2. Montrer que le dual de ce problème est le problème Hyperedge Packing, qui vise à trouver un ensemble maximum d'hyperarêtes deux à deux disjointes.
3. Qu'en déduire sur la taille d'un packing par rapport à la taille d'un ensemble intersectant ?

Exercice 8 – Tournois

On considère un tournoi joué par n équipes. L'équipe i rencontre l'équipe j exactement une fois et le match se termine soit par la victoire de l'équipe i soit par la victoire de l'équipe j . On peut donc représenter ce tournoi comme un graphe $G = (V, E)$ orienté où, pour chaque paire de sommets $(i, j) \in V^2$, on crée une arête orientée $i \rightarrow j$ de i vers j si i a battu j (et de j vers i autrement). On appelle *triangle orienté* un triplet de sommets (i, j, k) tels que $i \rightarrow j$, $j \rightarrow k$ et $k \rightarrow i$. (Un triangle est une "incohérence" pour le classement puisque cela signifie que l'on ne peut pas trouver d'ordre cohérent pour ces trois équipes).

1. Donner un tournoi à trois sommets sans triangle orienté. Quatre sommets ? n sommets ?
2. Montrer qu'il existe un unique tournoi à n sommets sans triangle orienté (à renommage près des sommets).
3. Donner un algorithme qui, étant donné un tournoi, compte le nombre total de triangles orientés. Autrement dit le nombre de triplets (i, j, k) qui forment des triangles orientés.
4. Les triangles d'un ensemble $\mathcal{S}$ de triangles orientés sont *sommets-disjoints* si pour toute paire de triangles orientés T_1, T_2 de $\mathcal{S}$, les sommets du triangle T_1 et du triangle T_2 sont deux à deux distincts. Modéliser avec un programme linéaire en nombres entiers (P) le problème qui consiste à trouver le nombre maximum de triangles orientés sommets-disjoints.
5. Un *feedback vertex set* est un ensemble de sommets X dont la suppression laisse un graphe sans triangle orienté. Autrement dit, il n'y a pas de triangle orienté dont les trois sommets sont dans $V \setminus X$.
Modéliser avec un programme linéaire en nombres entiers (D) le problème qui consiste à trouver un feedback vertex set de taille minimum.
6. On suppose que les relaxations fractionnaires de (P) et (D) sont duales (ne le prouvez pas!). Que dire de la valeur optimale de (P) par rapport à celle de (D) ?
7. Montrer que l'ensemble des sommets apparaissant dans un ensemble maximal par inclusion de triangles orientés sommets-disjoints est un feedback vertex set de taille au plus trois fois la taille d'un feedback vertex set minimum.
8. En déduire un algorithme glouton qui donne un feedback vertex set de taille au plus trois fois l'optimum.

Exercice 9 – Examen 2025

Un équipage de pirates a mis la main sur un trésor contenant 30000 diamants et 15kg d'or. Ce trésor ne peut pas être revendu tel quel, mais heureusement l'équipage comporte un joaillier qui peut transformer le butin en bijoux. Les quantités nécessaires et le prix de revente par bijou produit sont donnés dans le tableau suivant pour chaque type :

	Or (g)	Diamants	Prix de vente (\$)
Collier	8	0	8
Bracelet	4	4	5
Boucles d'oreille	2	6	3

Les pirates cherchent à maximiser leur profit.

1. Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.
2. Calculer son dual.
3. Déterminer si les solutions suivantes sont optimales :
 - Produire 625 colliers, 0 bracelets et 5000 boucles d'oreille.
 - Produire 0 collier, 1875 bracelets et 3750 boucles d'oreille.