# TD1 : Langages réguliers

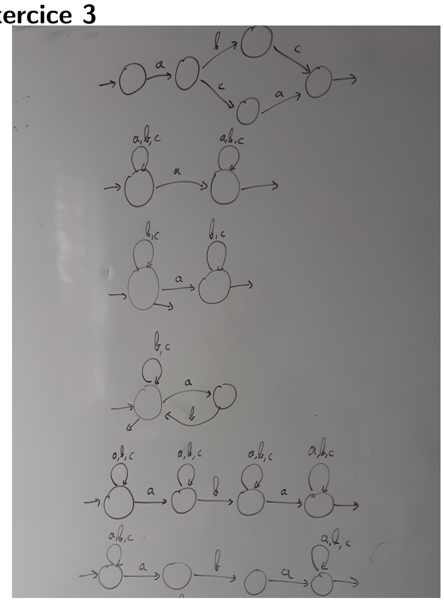
### Exercice 1

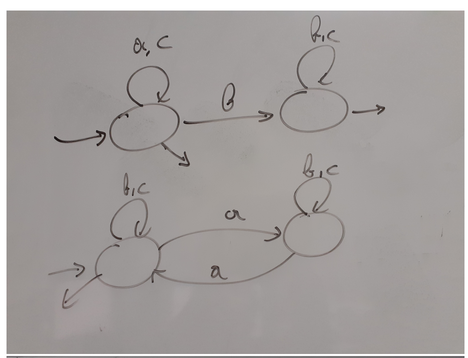
1. Les mots où tout $b$ est précédé d'un $a$.
2. Les mots sans facteur $ba$.
3. Les mots vides ou qui alternent entre $a$ et $b$, commençant par $a$ et finissant par $b$.
4. Les mots vides ou qui finissent par $b$.
5. Tous les mots.
6. Les mots qui n'utilisent qu'au plus une lettre.

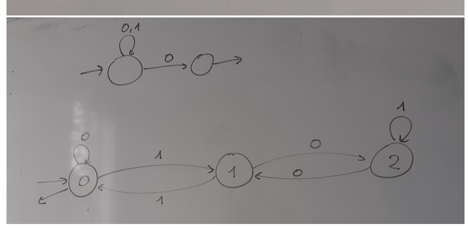
### Exercice 2

1. $ab + ac + abc + aca$
2. $A^*aA^*$
3. $(b + c)^*(a + \varepsilon)(b + c)^*$
4. $(ab + b + c)^*$
5. $A^*aA^*bA^*aA^*$
6. $A^*abaA^*$
7. $(a + c)^*(b + c)^*$
8. $((b + c)^*a(b + c)^*a(b + c)^*)^*$

### Exercice 3







Le dernier automate est construit en ajoutant toutes les transitions de la forme $(i, a, (2i + a) \mod 3)$. En effet, si on a déjà lu $x$ et qu'on lit la lettre $a$, alors l'entier obtenu est $2x + a$. Si $x \mod 3 = i$, alors $(2x + a) \mod 3 = 2i + a$.

**Exercice 4**

Pour *acab*:

1. Dans l'automate de gauche, en lisant le premier $a$ de *acab*, on arrive soit dans l'état 2 où on ne peut pas lire $c$, ou dans l'état 1, puis le $c$ fait passer dans l'état 2 et on ne peut pas lire $a$. Ce mot n'est donc pas accepté.

2. Dans l'automate de droite, on arrive dans 3 en lisant *ac* mais on ne peut pas lire $a$. Ce mot est rejeté.

Pour *abcabacb*:

1. Le mot est accepté dans l'automate de gauche en suivant les états 020020123.

2. Le mot est accepté dans l'automate de gauche en suivant les états 124524064.

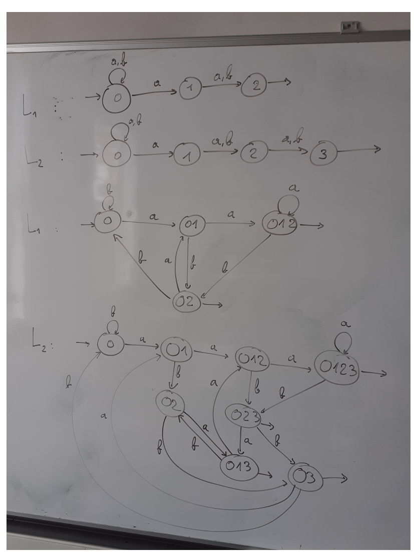
**Exercice 5**

Soit $L$ un langage régulier. Alors il existe un automate déterministe $\mathcal{A}$ qui le reconnaît. On complète $\mathcal{A}$ en ajoutant un état "poubelle" $\pi$, et pour chaque $q \in Q$ et $a \in A$ tel que $\mathcal{A}$ n'a pas de transition de la forme $(q, a, *)$, on ajoute la transition $(q, a, \pi)$. On ajoute aussi toutes les boucles $(\pi, a, \pi)$ pour $a \in A$.

L'automate obtenu est alors déterministe est complet, c'est-à-dire que la lecture d'un mot produit un et un seul chemin (il n'y a pas de blocage). Un mot est alors accepté si et seulement si son chemin arrive dans un état final. On peut donc obtenir un automate qui reconnaît le complémentaire de $L$ en échangeant les états finaux et non-finaux. $\bar{L}$ est donc régulier.

**Exercice 6**

1.

2. 

3. On peut reconnaître $L_n$ avec un automate non-déterministe à $n+2$ états, mais on peut montrer qu'il faut $O(2^n)$ états dans un automate déterministe reconnaissant $L_n$. La déterminisation peut donc avoir un coût exponentiel.

## Exercice 7

1. Supposons que le langage $L = \{w \in \{a, b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$ soit régulier. Soit $N$ l'entier fourni par le lemme de l'étoile, et considérons le mot $w = a^N b^N \in L$.

   Par le lemme, $w$ s'écrit $xyz$ avec $y \neq \varepsilon$ et $|xy| \leqslant N$, donc on a forcément $x = a^m$ et $y = a^p$ pour un certain $p > 0$. Ainsi, $xy^k z = a^{N+kp} b^N$ est aussi censé être dans $L$, mais il n'a pas le même nombre de $a$ que de $b$. C'est une contradiction, donc $L$ n'est pas régulier.

2. On peut appliquer le même type d'argument, en prenant le mot $w = a^N bba^N$.