

Exploration locale adaptative pour l'analyse des surfaces discrètes

Tristan Roussillon

INSA Lyon, LIRIS

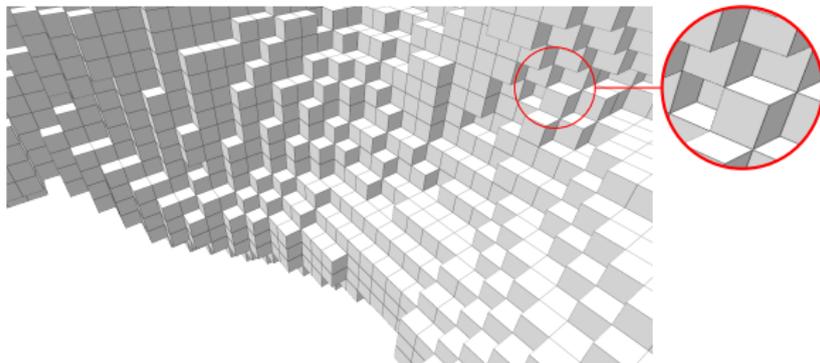
10/07/2025



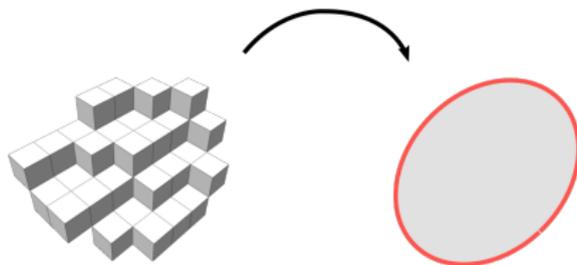
Surface discrète : bord d'un ensemble de voxels

Maillage quadrangulaire particulier

- topologie : fermé, orientation int/ext, mais non variété
- géométrie : faces carrées de côté h , densité uniforme, points à coordonnées entières, mais mauvaises normales.



Analyse de la géométrie



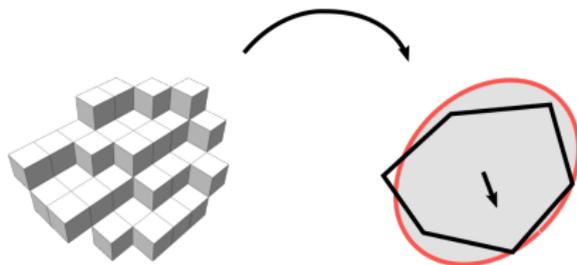
Calculer une représentation polygonale

⇒ compression, conversion de modèle, rendu, ...

Estimer un champs de vecteurs normaux

⇒ mesures, déformation pour la simulation ou le suivi, lissage, ...

Analyse de la géométrie



Calculer une représentation polygonale

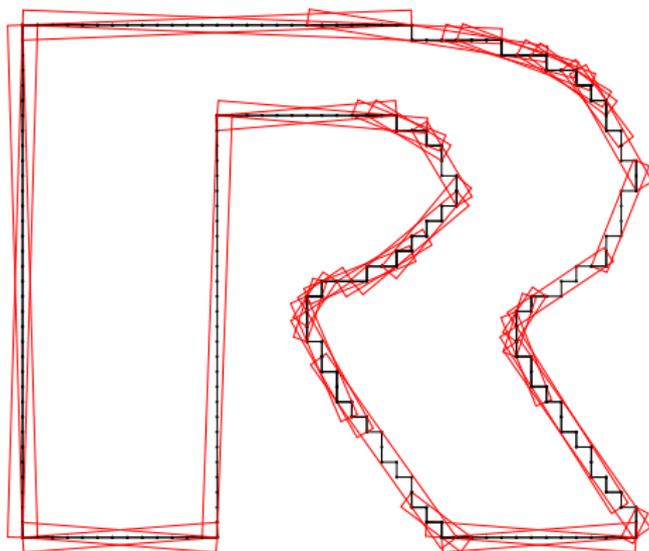
⇒ compression, conversion de modèle, rendu, ...

Estimer un champs de vecteurs normaux

⇒ mesures, déformation pour la simulation ou le suivi, lissage, ...

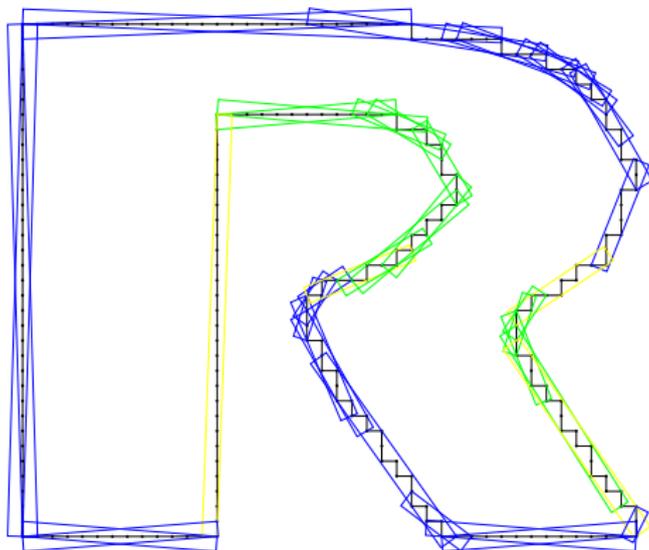
Source d'inspiration : 2d

[DR95], tangentes [FT99],[LVV07], longueur [CK04], convexité [DRR03],
polygonalisation réversible [RS11], ...



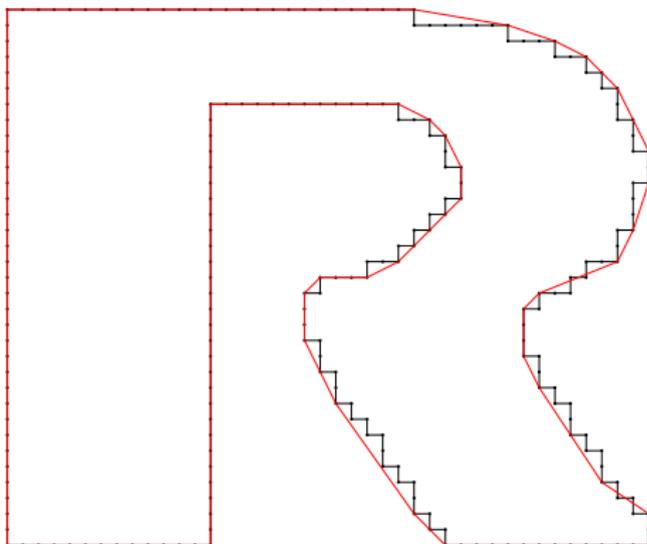
Source d'inspiration : 2d

[DR95], tangentes [FT99],[LVV07], longueur [CK04], convexité [DRR03],
polygonalisation réversible [RS11], ...



Source d'inspiration : 2d

[DR95], tangentes [FT99],[LVV07], longueur [CK04], convexité [DRR03],
polygonalisation réversible [RS11], ...



Organisation de la présentation

1 Plans discrets

- Propriétés
- Reconnaissance

2 Exploration locale adaptative

- Algorithmes H, R et L
- Estimation de normale
- Détection de points localement extrémaux

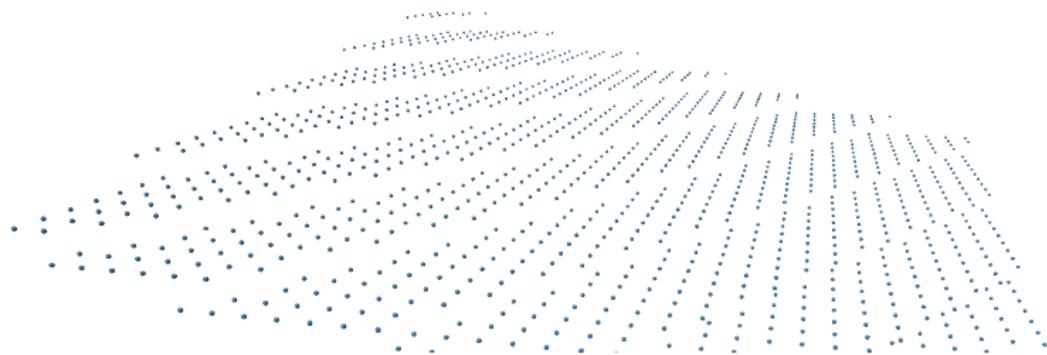
Plan discret

Plan arithmétique standard [R91][A93]

Soit un vecteur $v \in \mathbb{Z}^3$ de coordonnées a, b, c , nous toutes nulles, avec $\gcd(a, b, c) = 1$, $0 \leq a \leq b \leq c$, et un décalage $\mu \in \mathbb{Z}$. Le plan arithmétique standard est l'ensemble

$$P_{v,\mu} = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid \mu \leq x \cdot v < \mu + \|v\|_1\}.$$

(on omettra μ supposé égal à 0).



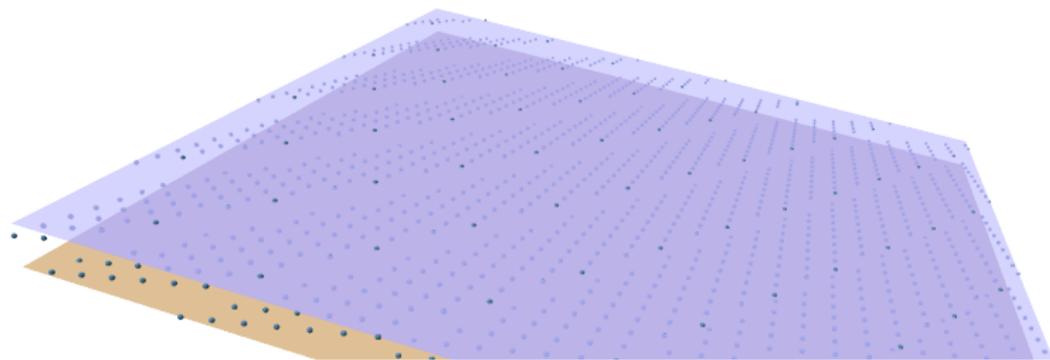
Plan discret

Plan arithmétique standard [R91][A93]

Soit un vecteur $v \in \mathbb{Z}^3$ de coordonnées a, b, c , nous toutes nulles, avec $\gcd(a, b, c) = 1$, $0 \leq a \leq b \leq c$, et un décalage $\mu \in \mathbb{Z}$. Le plan arithmétique standard est l'ensemble

$$P_{v,\mu} = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid \mu \leq x \cdot v < \mu + \|v\|_1\}.$$

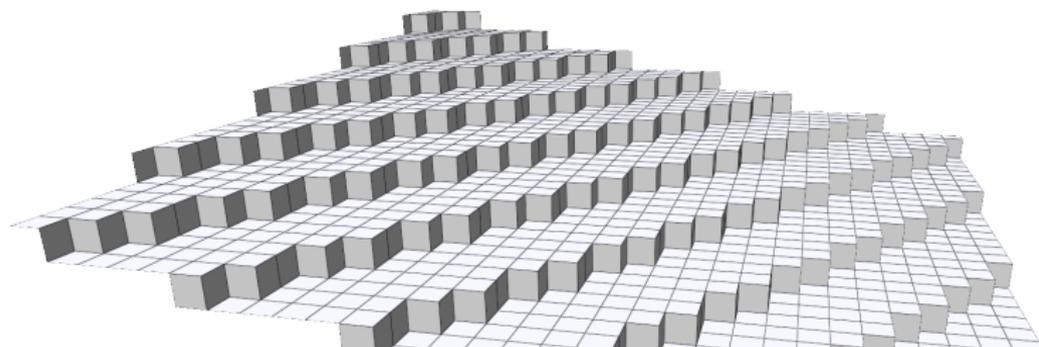
(on omettra μ supposé égal à 0).



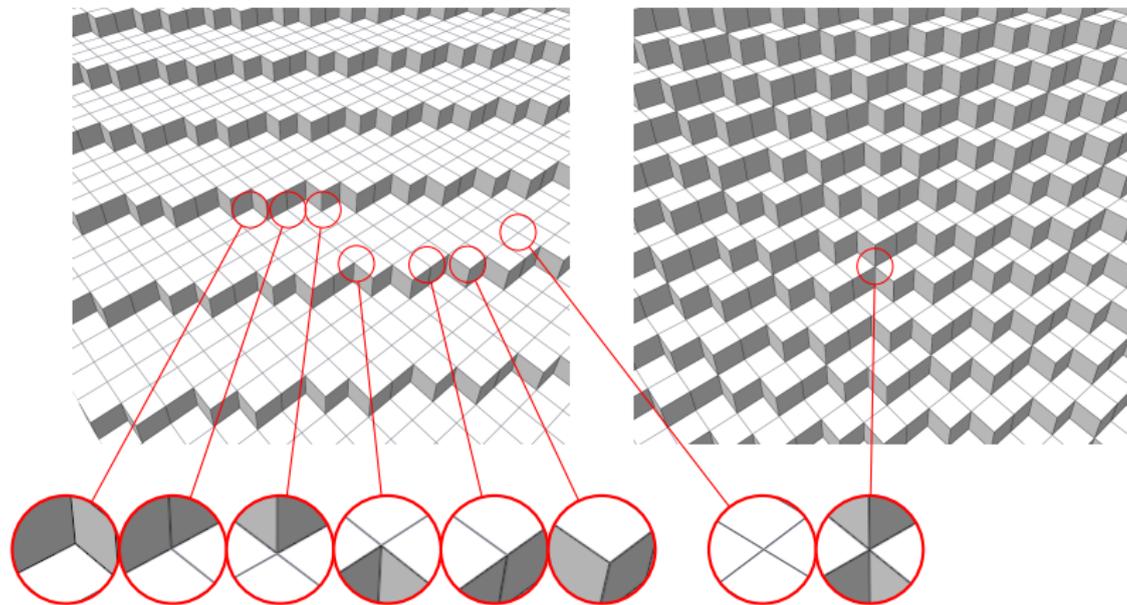
Propriétés topologiques

Théorème [F96]

- $G(P_V, E)$ ($\forall x, y \in P_V, (x, y) \in E \Leftrightarrow \|x - y\|_1 = 1$),
- F , ensemble des cycles élémentaires de G (= faces carrées).
- (P_V, E, F) est une variété combinatoire, connexe, orientable (sans bord).



Configuration locales \Leftarrow Coordonnées de v



Extension géométrique des substitutions

- substitution σ : lettre \rightarrow ensemble de lettres
- extension E_σ : face \rightarrow ensemble de faces [IO94] [ABEI01]

Théorème [F06]

Pour tout σ dont la matrice d'incidence M_σ est unimodulaire,

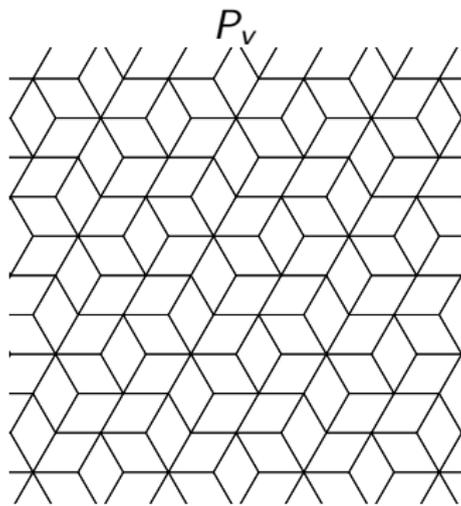
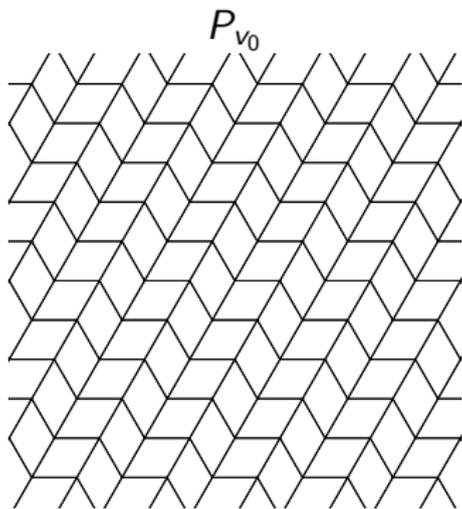
$$E_\sigma(P_v) = P_{M_\sigma^T v}.$$

Décomposition induite

Conséquence

Soit $v_0 = (0, 1, 1)^\top$. Si $v \neq (0, 0, 1)^\top$, alors il existe σ tel que

$$v = M_\sigma^\top v_0, \quad P_v = P_{M_\sigma^\top v_0} = E_\sigma(P_{v_0}).$$

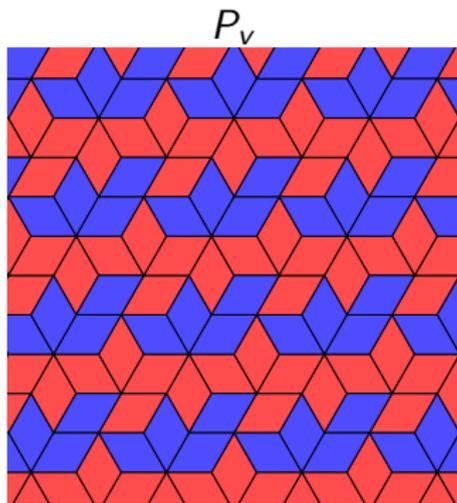
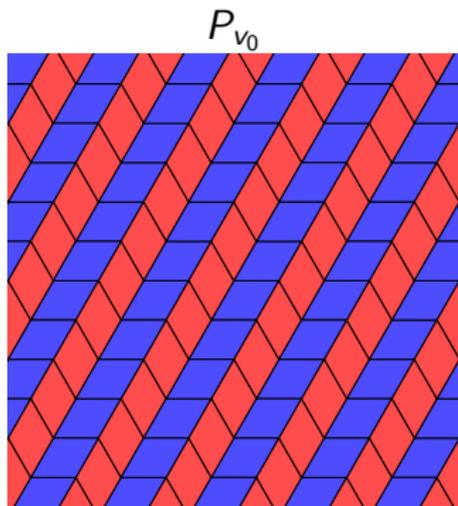


Décomposition induite

Conséquence

Soit $v_0 = (0, 1, 1)^\top$. Si $v \neq (0, 0, 1)^\top$, alors il existe σ tel que

$$v = M_\sigma^\top v_0, \quad P_v = P_{M_\sigma^\top v_0} = E_\sigma(P_{v_0}).$$



Autre décomposition

 [R25] T. R. Decomposition of Rational Discrete Hyperplanes.
J. Math. Imaging Vis. 67(3): 26 (2025)

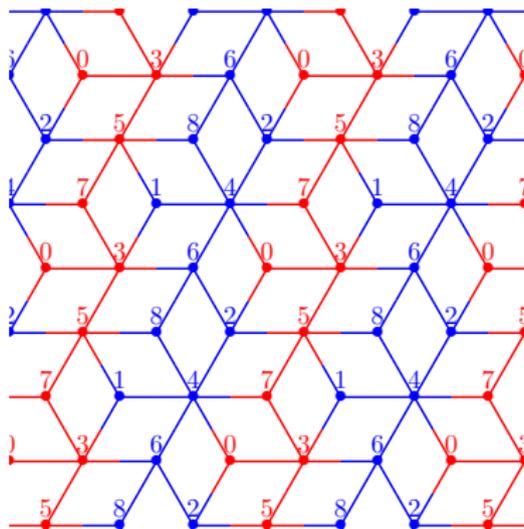
Théorème [R25]

Si $v \notin \{(0, 0, 1)^\top, (0, 1, 1)^\top, (1, 1, 1)^\top, (1, 1, 2)^\top\}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}^3$ satisfaisant $a + b = v$ et tels que P_v peut être partitionné en deux ensembles ayant la *structure combinatoire* de P_a et P_b .

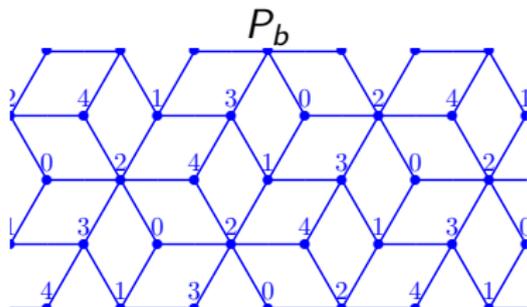
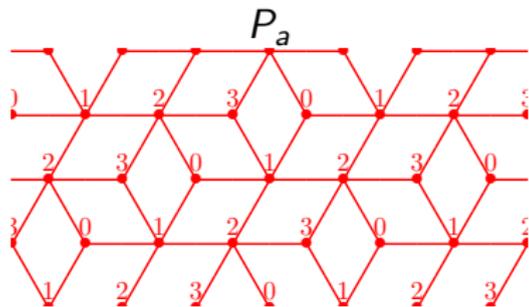
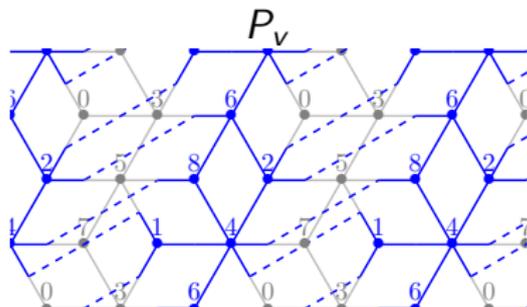
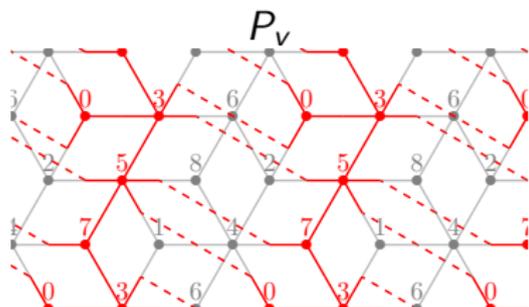
Principales différences avec l'approche précédente

- points et arrangement des arêtes incidentes (plutôt que faces)
- partitionnement par $\lfloor \cdot \rfloor$ (plutôt qu'implicitement par une substitution)

Exemple de décomposition



Exemple de décomposition



0	3	5	7
0	1	2	3

1	2	4	6	8
0	1	2	3	4

Reconnaissance

Problème

Étant donné un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^3$, existe-t-il P_v contenant S ? Si oui, donner $v \in \mathbb{Z}^3$ tel que P_v contient S .

Typologie des algorithmes

- arithmétique : [DR94] [M02] / [F09]
- géométrique (épaisseur/séparation) : [ST91], ..., [GJK88]
- \approx programmation linéaire : [M83], ..., [S91], simplex

Reconnaissance

Problème

Étant donné un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^3$, existe-t-il P_v contenant S ? Si oui, donner $v \in \mathbb{Z}^3$ tel que P_v contient S .

Typologie des algorithmes

- arithmétique : [DR94] [M02] / [F09]
- géométrique (épaisseur/séparation) : [ST91], ..., [GJK88]
- \approx programmation linéaire : [M83], ..., [S91], simplex



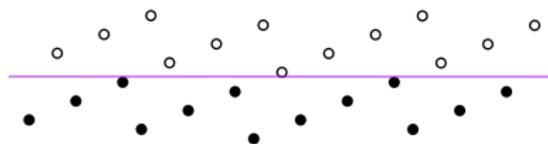
Reconnaissance

Problème

Étant donné un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^3$, existe-t-il P_v contenant S ? Si oui, donner $v \in \mathbb{Z}^3$ tel que P_v contient S .

Typologie des algorithmes

- arithmétique : [DR94] [M02] / [F09]
- géométrique (épaisseur/séparation) : [ST91], ..., [GJK88]
- \approx programmation linéaire : [M83], ..., [S91], simplex



Reconnaissance des plans tangents

Reconnaissance itérative [KS01][SDC04][CL11]

- on a localement un morceau de plan discret S .
- on choisit un nouveau point x (près de S) et on décide si $S \cup \{x\}$ est un morceau de plan discret.

Limites

- on ne sait pas bien comment choisir les nouveaux points x à tester,
- on ne sait pas bien décider quand s'arrêter (les morceaux de plan discret *maximaux* sont trop nombreux et pas forcément tangents).

⇒ heuristiques et paramètres cachés.

Exploration locale adaptative

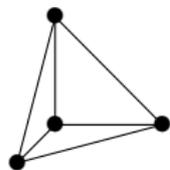
Algorithme de type *plane-probing*

Étant donné un plan discret Π et un point de départ $p \in \Pi$, un algorithme de type *plane-probing* calcule $v \in \mathbb{Z}^3$ tel que $P_v = \Pi$ en utilisant le prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

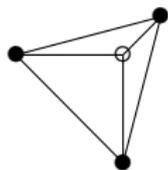
Résumé du fonctionnement

- On place un objet géométrique en p
- On l'étend en explorant les environs avec le prédicat
- Progressivement, l'objet monte, s'aplatit, s'aligne sur P_v

Panorama des algorithmes et publications



[LPR16a]



[LPR16b]

[LPR17]

H, R

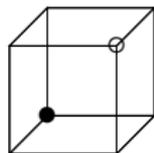
[RL19]

R1

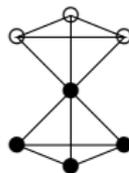
[LRC22]

L

[LRLC24]

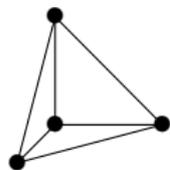


[LMR20]

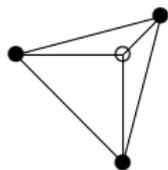


[soumission]

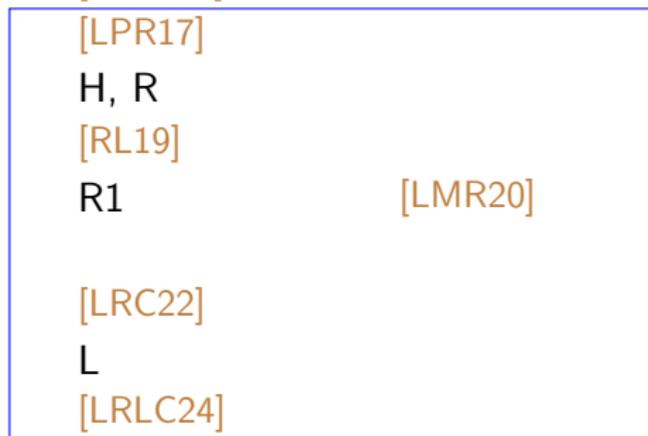
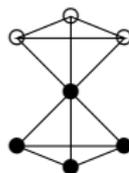
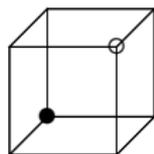
Panorama des algorithmes et publications



[LPR16a]



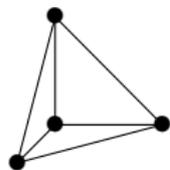
[LPR16b]



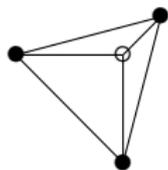
ANR JCJC PARADIS

[soumission]

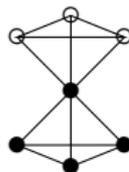
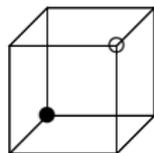
Panorama des algorithmes et publications



[LPR16a]



[LPR16b]



DGtal

[soumission]

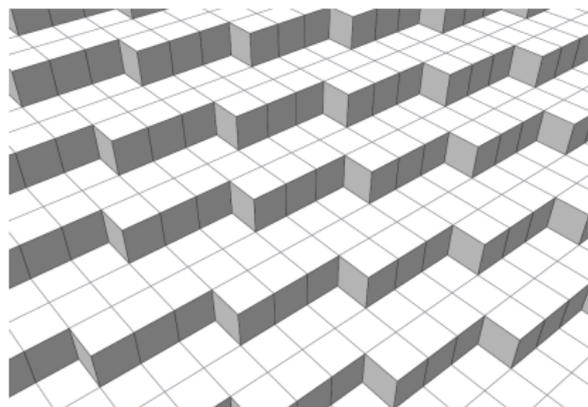
Focus sur H, R, L

-  [LPR17] J-O. Lachaud, X. Provençal, T. R. Two Plane-Probing Algorithms for the Computation of the Normal Vector to a Digital Plane. *J. Math. Imaging Vis.*, 59(1):23–39, 2017. (H et R)
-  [LR19] T. R., J-O. Lachaud, Digital Plane Recognition with Fewer Probes. *DGCI'19*, LNCS, vol. 11414, p.380–393, 2019. (R1)
-  [LRC22] J-T.Lu, T. R., D.Coeurjolly, A New Lattice-based Plane-probing Algorithm. *DGMM'22*, LNCS, vol. 13493, p.366–381, 2022. (L)
-  [LRLC24] J-T.Lu, T. R., J-O. Lachaud, D.Coeurjolly, Delaunay Property and Proximity Results of the L-algorithm for Digital Plane Probing. *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 1011, 2024. (propriétés de L)

Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

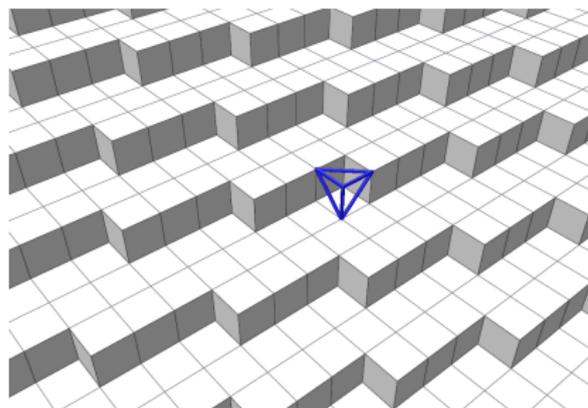
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

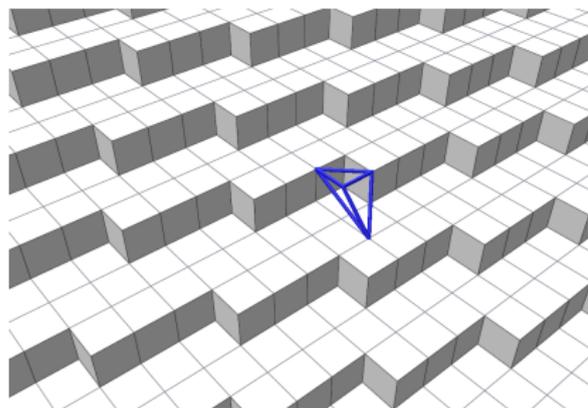
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

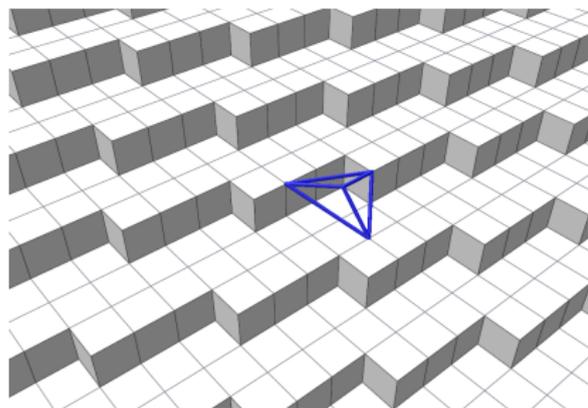
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

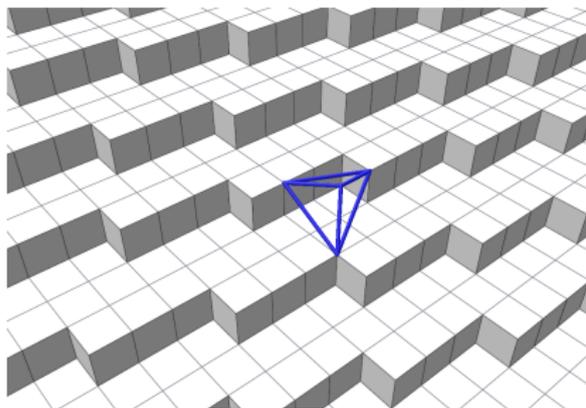
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

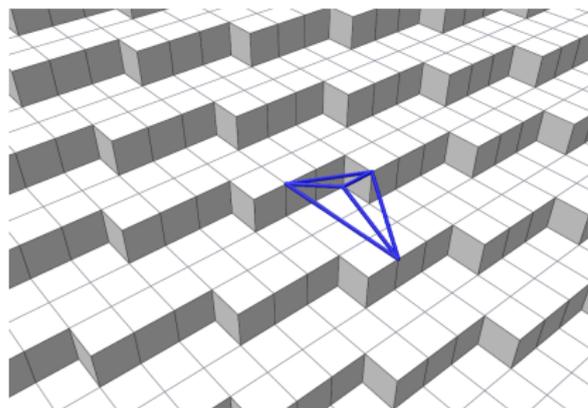
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

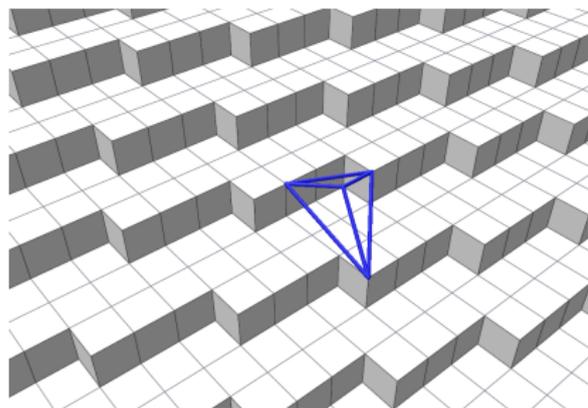
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

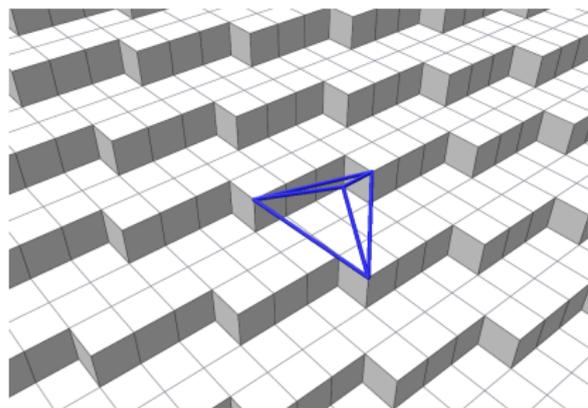
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

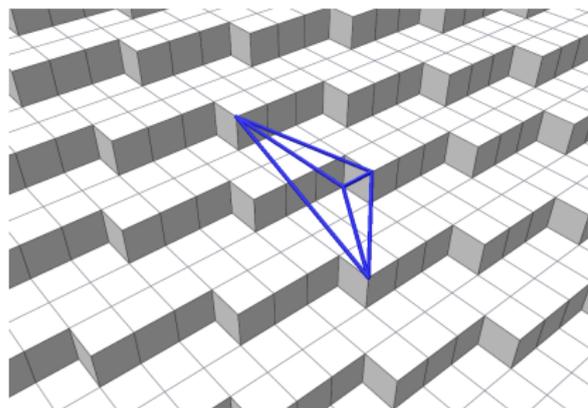
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

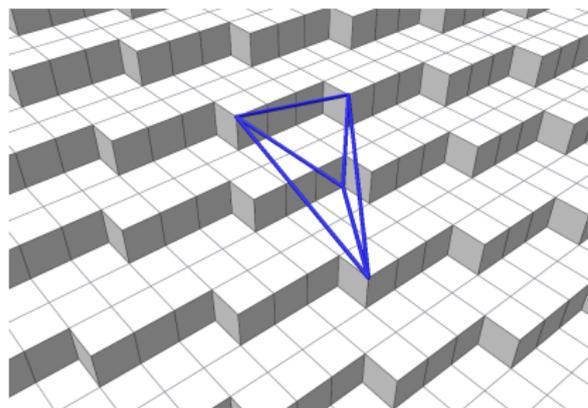
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Une procédure commune pour H, R, L

Étant donné un ensemble de points Π ,
un prédicat “est-ce que $x \in \Pi$?”.

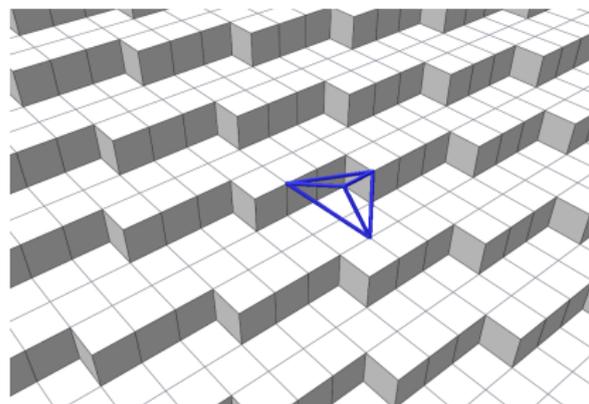
- commencer par un tétraèdre T placé dans un coin
- mettre à jour un sommet
- répéter



Mise à jour et critère d'arrêt

À une étape donnée :

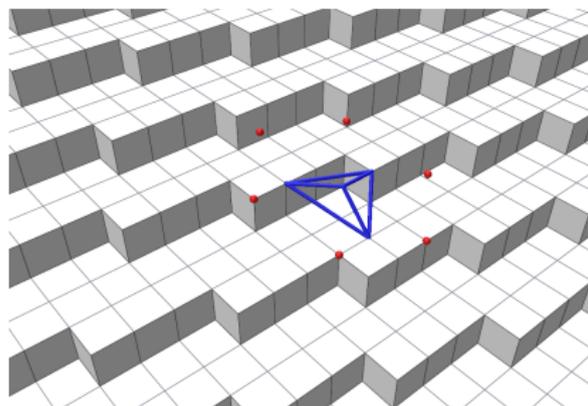
- on considère un ensemble S
- on filtre S par le prédicat
- on s'arrête si on obtient \emptyset , sinon
- on choisit un point s^* avec un critère de sphère circonscrite vide.
- on remplace un sommet de T par s^*



Mise à jour et critère d'arrêt

À une étape donnée :

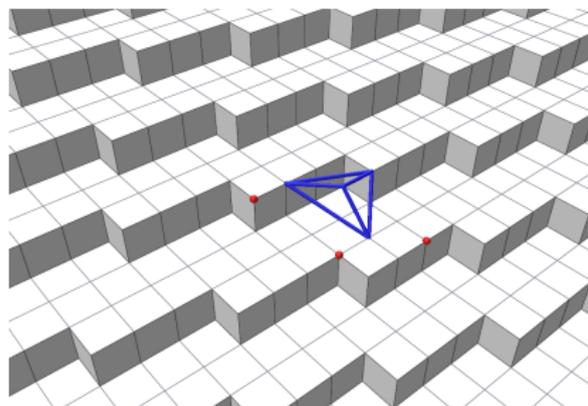
- on considère un ensemble S
- on filtre S par le prédicat
- on s'arrête si on obtient \emptyset , sinon
- on choisit un point s^* avec un critère de sphère circonscrite vide.
- on remplace un sommet de T par s^*



Mise à jour et critère d'arrêt

À une étape donnée :

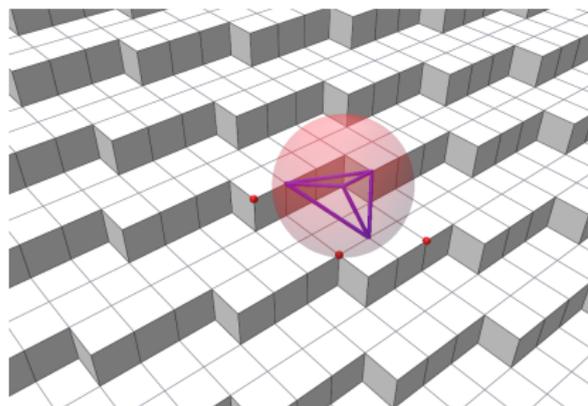
- on considère un ensemble S
- on filtre S par le prédicat
- on s'arrête si on obtient \emptyset , sinon
- on choisit un point s^* avec un critère de sphère circonscrite vide.
- on remplace un sommet de T par s^*



Mise à jour et critère d'arrêt

À une étape donnée :

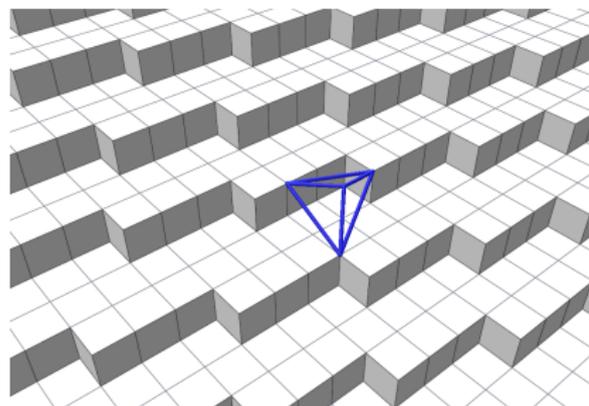
- on considère un ensemble S
- on filtre S par le prédicat
- on s'arrête si on obtient \emptyset , sinon
- on choisit un point s^* avec un critère de sphère circonscrite vide.
- on remplace un sommet de T par s^*



Mise à jour et critère d'arrêt

À une étape donnée :

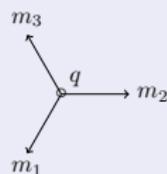
- on considère un ensemble S
- on filtre S par le prédicat
- on s'arrête si on obtient \emptyset , sinon
- on choisit un point s^* avec un critère de sphère circonscrite vide.
- on remplace un sommet de T par s^*



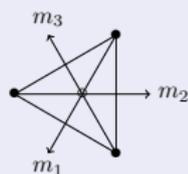
Formalisation (H)

Évolution du tétraèdre

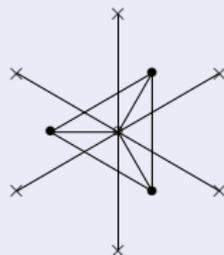
$$q, M = [m_1, m_2, m_3]$$



$$q, \{q - m_k\}$$



$$\{q \pm (m_k - m_{k+1})\}$$

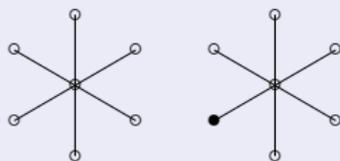


$$M'$$

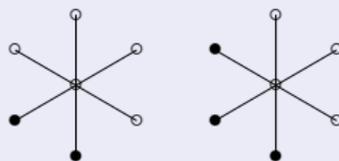


Critère d'arrêt

arrêt

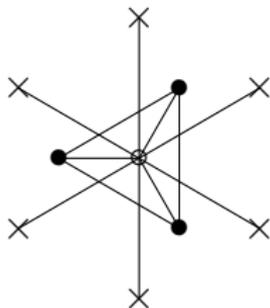


continue



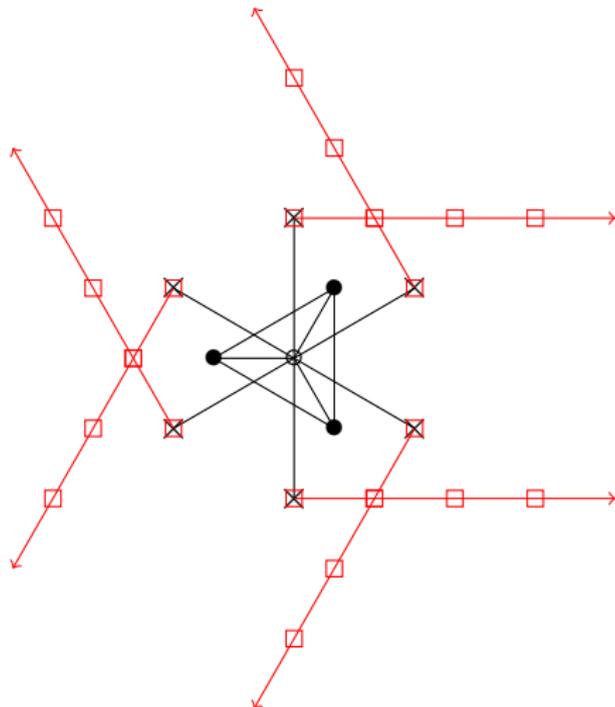
Candidats

H, R, L se distinguent par les candidats considérés à chaque mise à jour



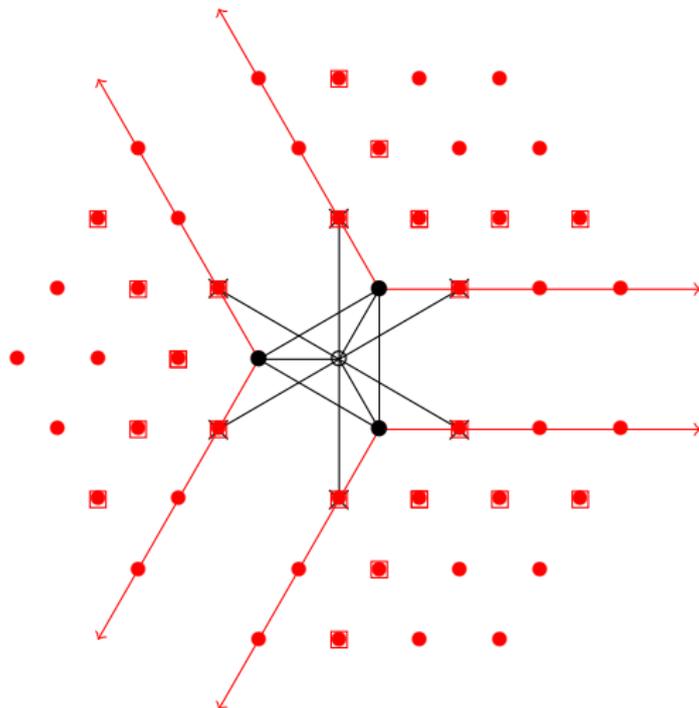
Candidats

H, R, L se distinguent par les candidats considérés à chaque mise à jour



Candidats

H, R, L se distinguent par les candidats considérés à chaque mise à jour



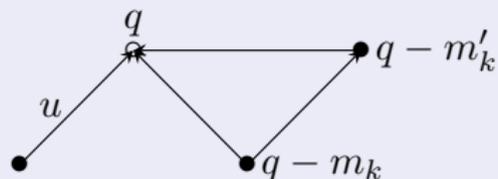
Propriétés pour H, R, L quand $\Pi = P_v$ [LPR17]

Invariants

- $q \notin \Pi$, $q - m_1, q - m_2, q - m_3 \in \Pi$
- q se projette dans le triangle $(q - m_1, q - m_2, q - m_3)$ selon $(1, 1, 1)$
- la matrice M vérifie $\det M = 1$ (unimodulaire)

Mise à jour

- $(q - m'_k) \cdot v > (q - m_k) \cdot v$ quand $m'_k \leftarrow m_k$ (on “monte”)



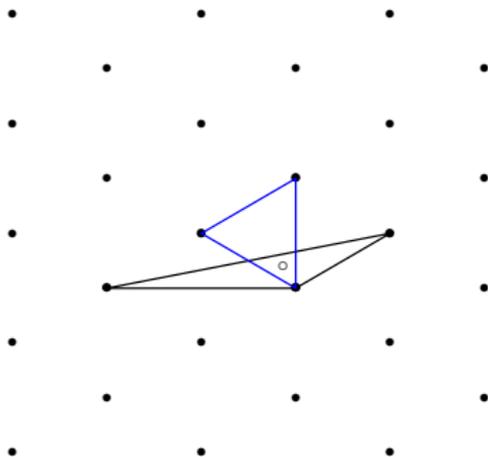
Terminaison

- si $q \cdot v = \|v\|_1$, alors à la fin $\forall k, (q - m_k) \cdot v = \|v\|_1 - 1$
 \Rightarrow la normale du triangle $(q - m_1, q - m_2, q - m_3)$ est v
- nombre d'étapes $\leq \|v\|_1 - 3$

Remarque

- Ces résultats ne dépendent pas des candidats choisis !
- Mais les candidats choisis influencent la forme du dernier triangle.

Triangle final



Triangle final

Théorème [LRLC24]

Il y a un unique triangle $(q - m_1, q - m_2, q - m_3)$ qui

- (P1) contient le projeté de q selon $(1,1,1)$
- (P2) ne contient aucun autre point de même hauteur
- (P3) n'a que des angles aigus

NB: (P2) + (P3) \Rightarrow critère de cercle circonscrit vide (Delaunay)

Triangle final

Théorème [LRLC24]

Il y a un unique triangle $(q - m_1, q - m_2, q - m_3)$ qui

- (P1) contient le projeté de q selon $(1,1,1)$ ✓
- (P2) ne contient aucun autre point de même hauteur ✓
- (P3) n'a que des angles aigus \Rightarrow dépend des candidats choisis

NB: (P2) + (P3) \Rightarrow critère de cercle circonscrit vide (Delaunay)

Triangle final

- **sans** le critère de sphère circonscrite vide :
 $\approx 50\%$ de triangles "aigus"
- **avec** le critère de sphère circonscrite vide :

Alg.	triangles "aigus"
H	$\approx 99\%$
R	100 %
L	100 %

Principales différences entre H, R, L

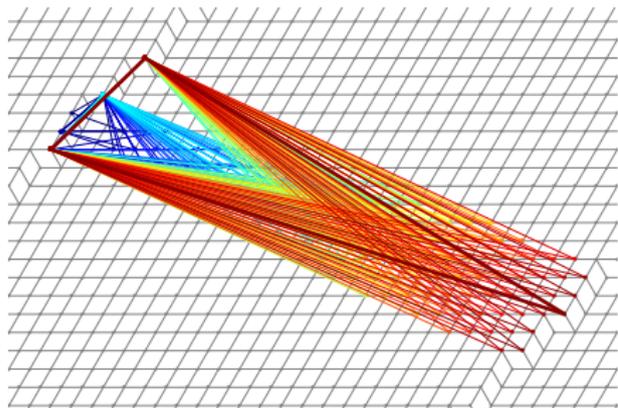
Alg.	H	R	L
complexité	$O(\ v\ _1)$	$O(\ v\ _1 \log \ v\ _1)^1$	$O(\ v\ _1 \log \ v\ _1)$
triangle "aigu"	✘	✓(conjecture)	✓[LRLC24]
propriété "Delaunay" ²	✘	✘	✓[LRLC24]

¹R1 en $O(\|v\|_1)$

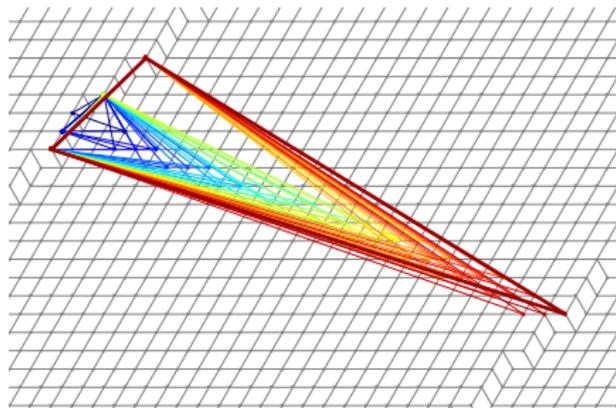
²La sphère circonscrite à deux triangles consécutifs ne contient aucun point de P_v dans son intérieur.

Exemples $(2, 5, 156)^T$ [LRLC24]

H

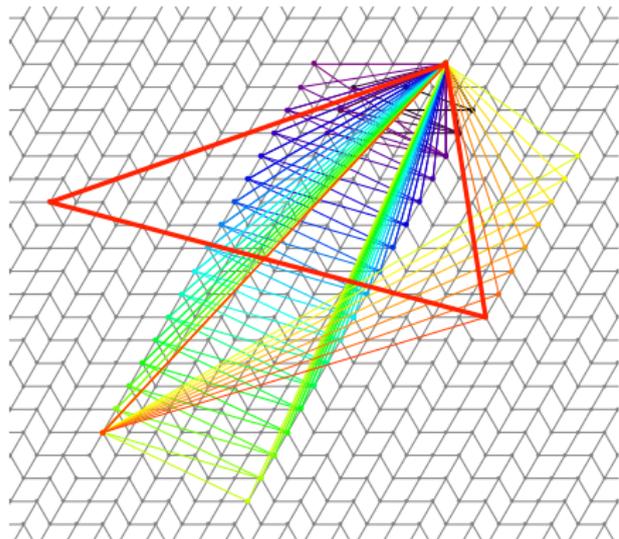


L

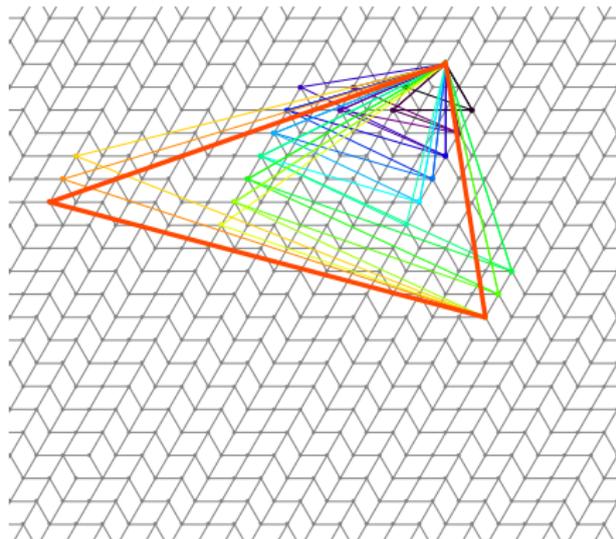


Exemples $(1, 73, 100)^T$ [LRLC24]

H



L



Organisation de la présentation

1 Plans discrets

2 Exploration locale adaptative

- Algorithmes H, R et L
- Estimation de normale
- Détection de points localement extrémaux

Objectifs

- sans paramètre utilisateur
- avec garanties théoriques
 - ▶ exacte sur les parties planes
 - ▶ convergente sur les parties lisses quand le pas de grille diminue
- qui préserve les arêtes vives

Extension aux surfaces discrètes

Nouveau prédicat

- S , l'ensemble des sommets d'une surface discrète (finie).
- on considère le prédicat "est-ce que $x \in S$?"
- implémentation : arbre de recherche, image binaire, etc.

Remarque

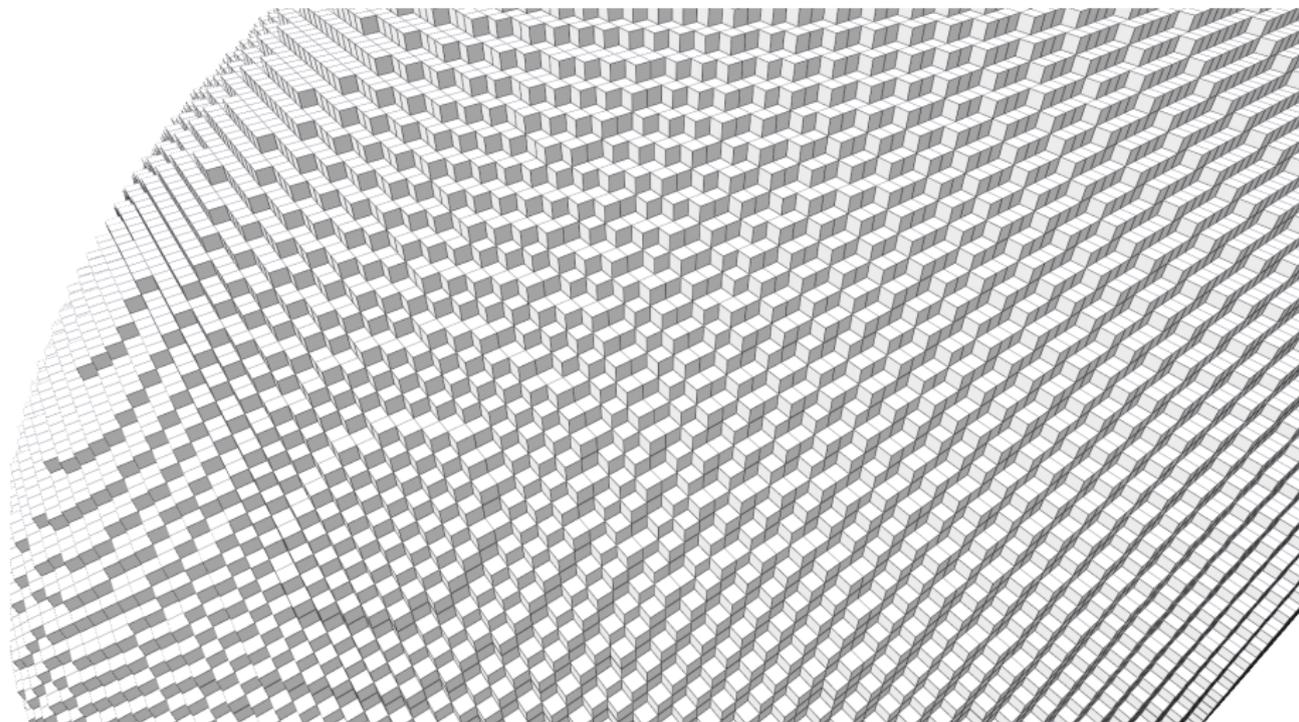
Plus grande combinatoire des configurations possibles :



⇒ variantes sur le critère d'arrêt et la mise à jour.

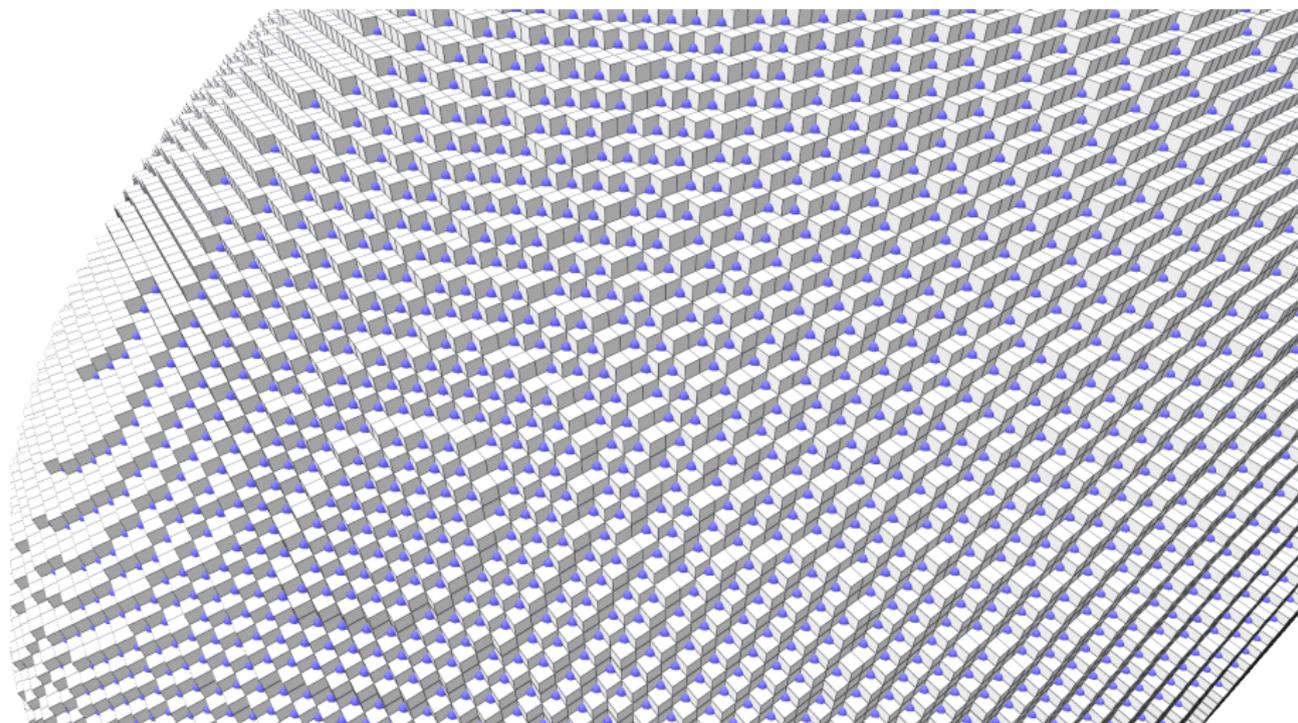
Discretisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

surface



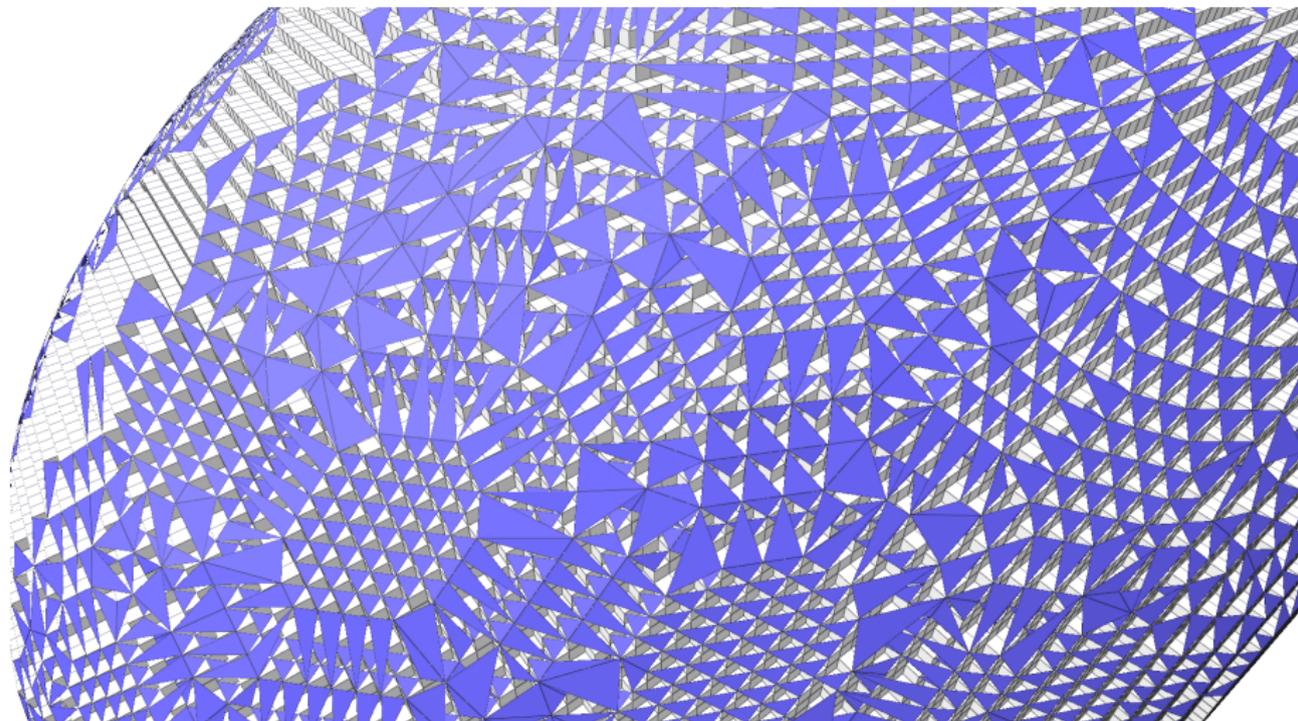
Discrétisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

points de départ



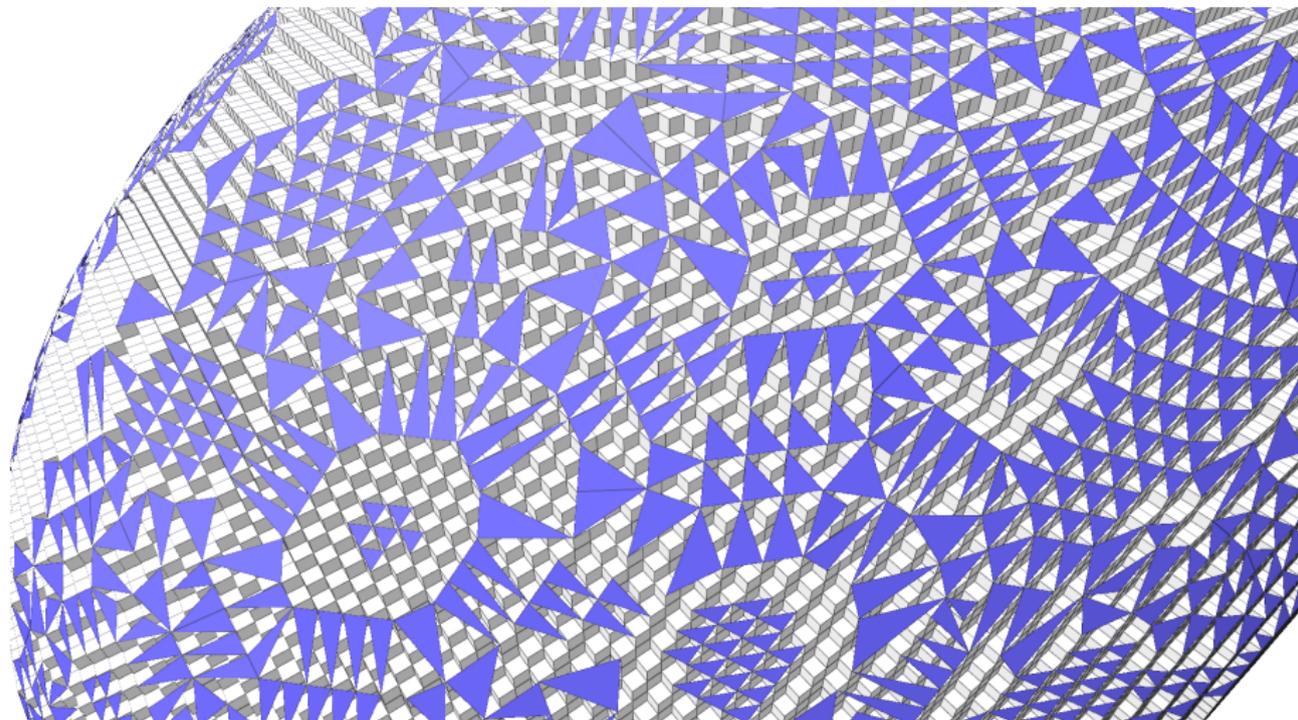
Discrétisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

triangles



Discrétisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

triangles filtrés [PLR17]



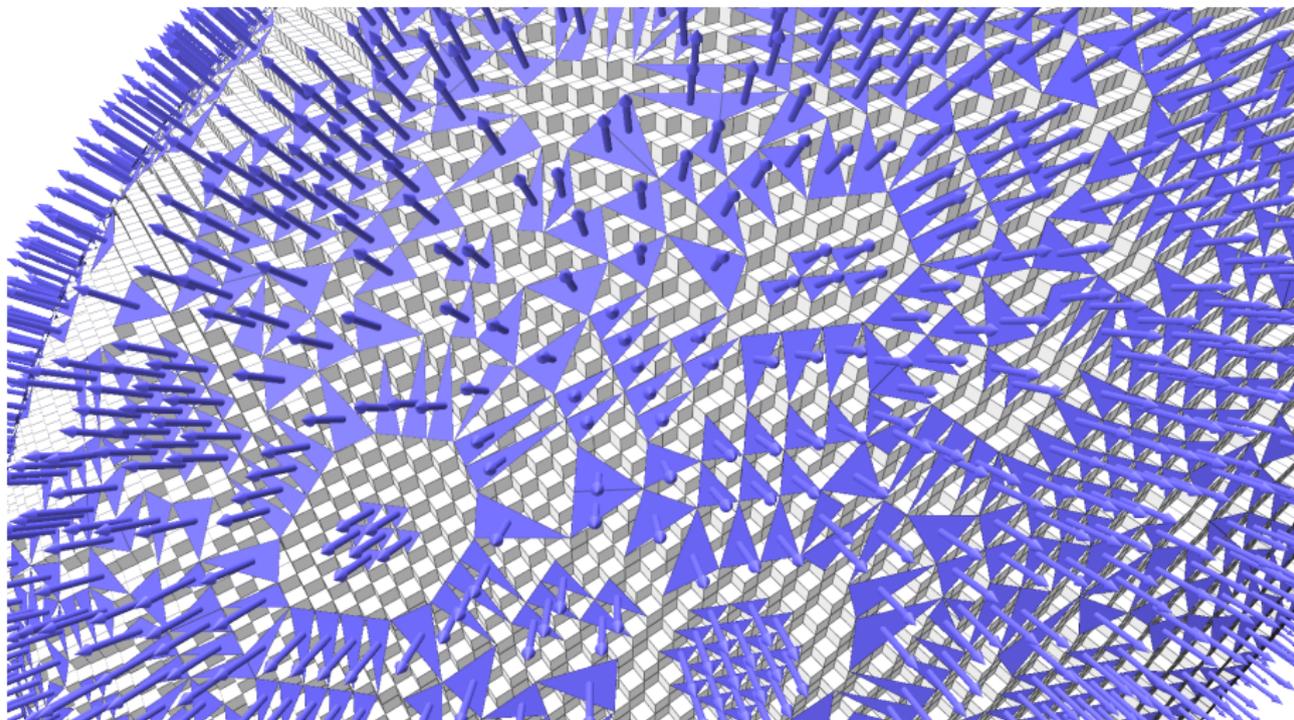
Discretisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

triangles filtrés vs env. conv.



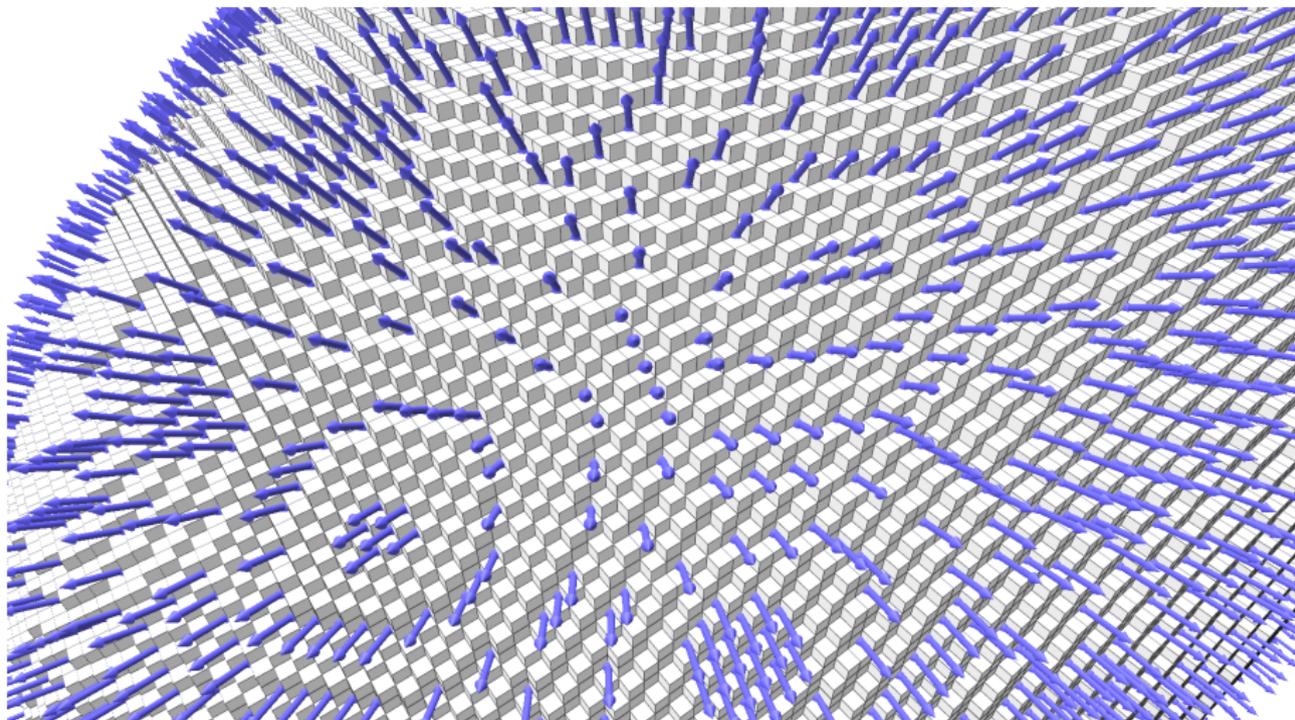
Discrétisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

estimations



Discrétisation de forme lisse et convexe (ellipsoïde)

estimations



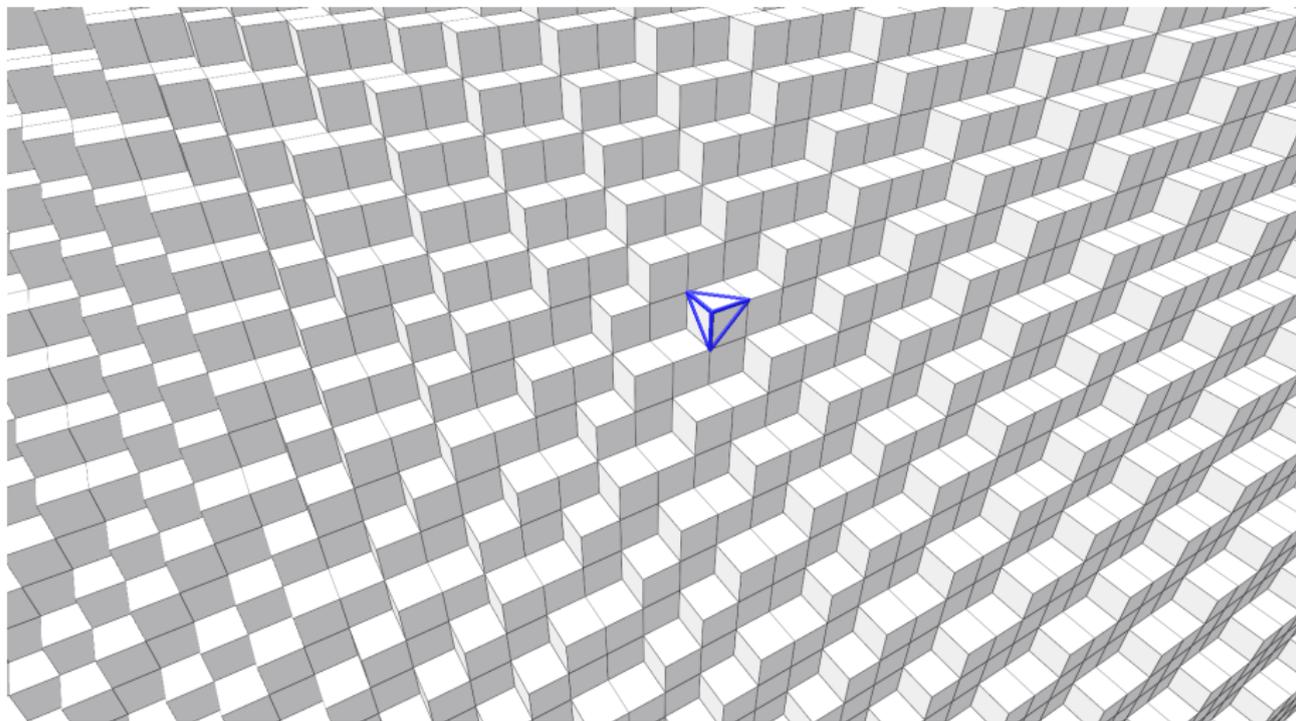
Organisation de la présentation

1 Plans discrets

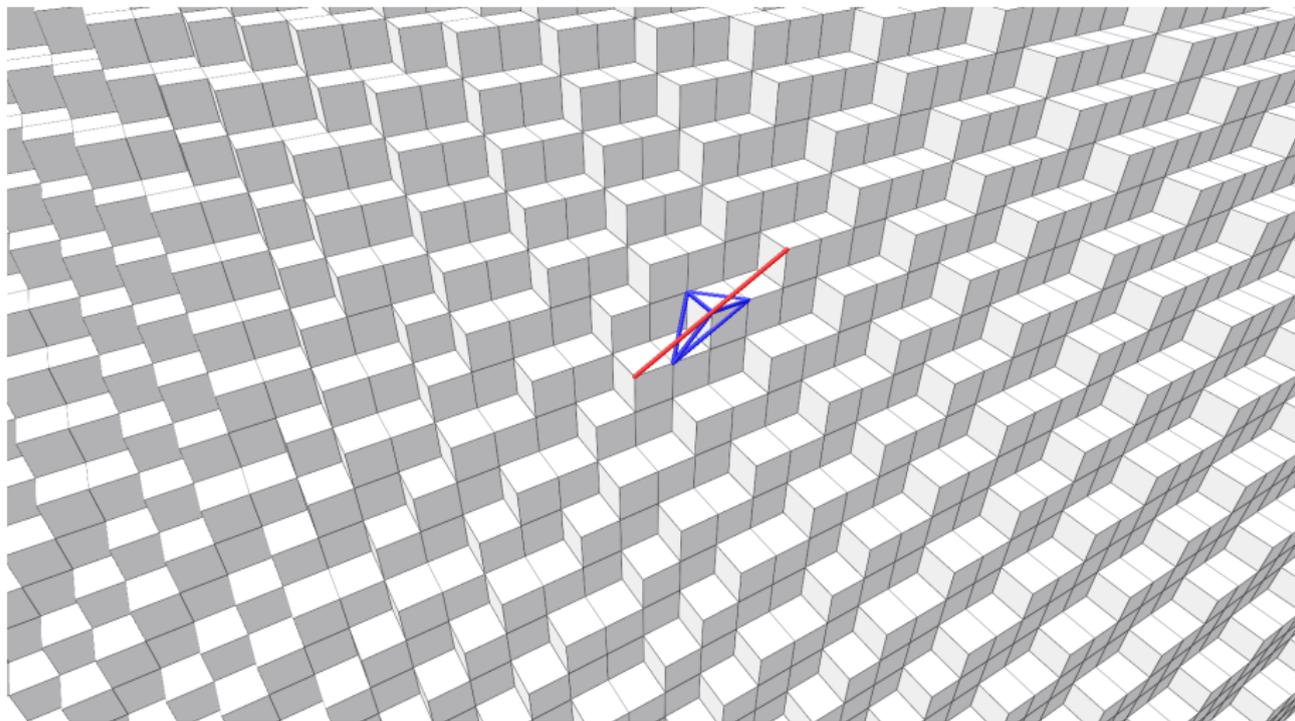
2 Exploration locale adaptative

- Algorithmes H, R et L
- Estimation de normale
- Détection de points localement extrémaux

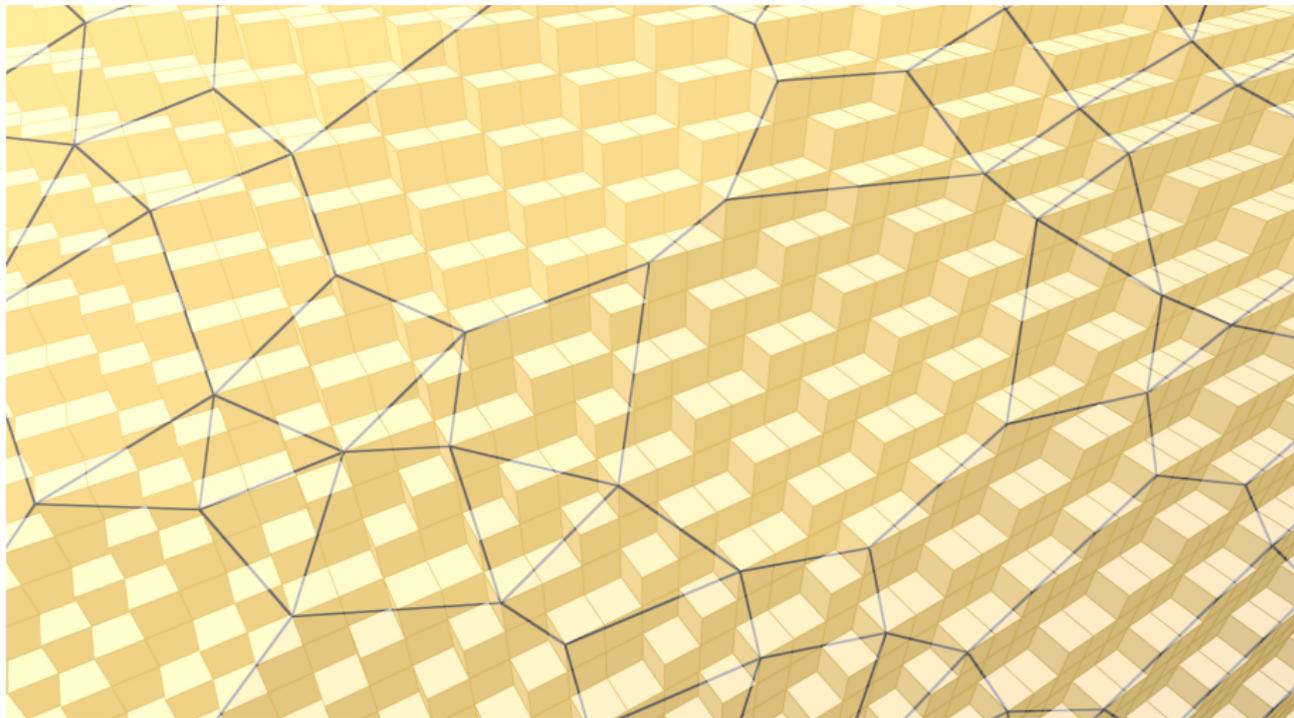
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



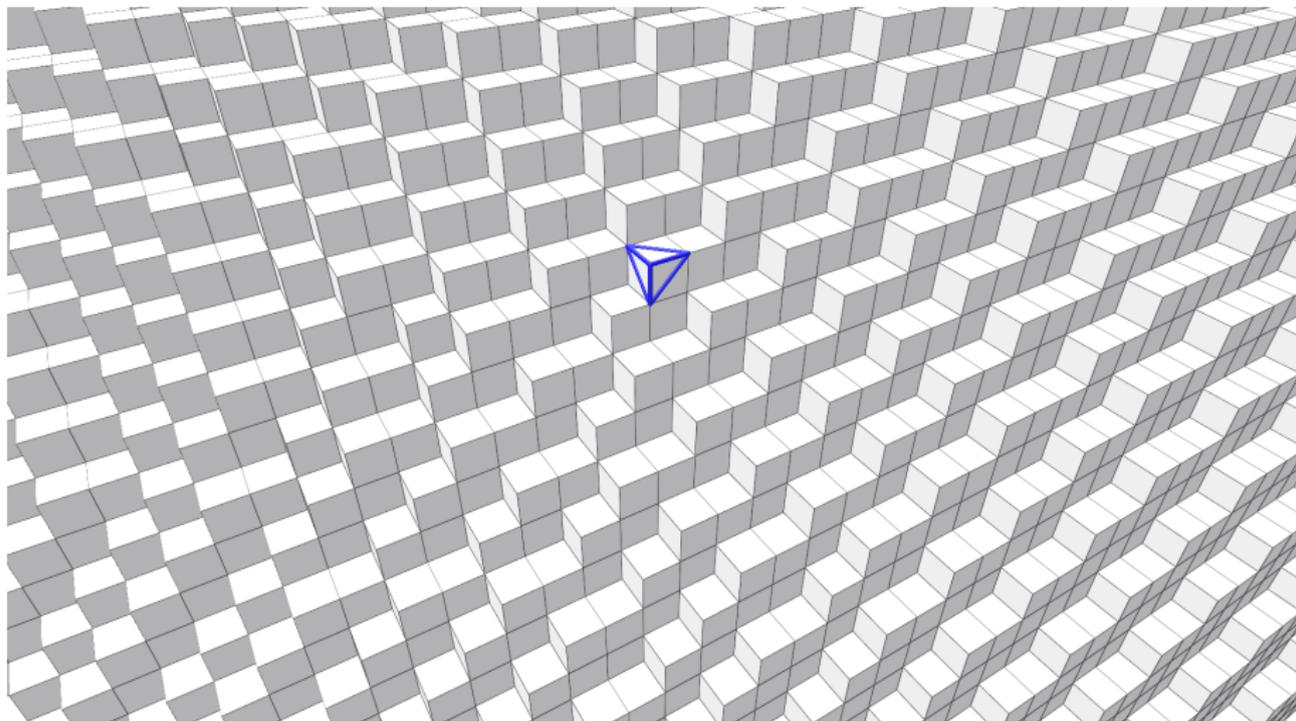
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



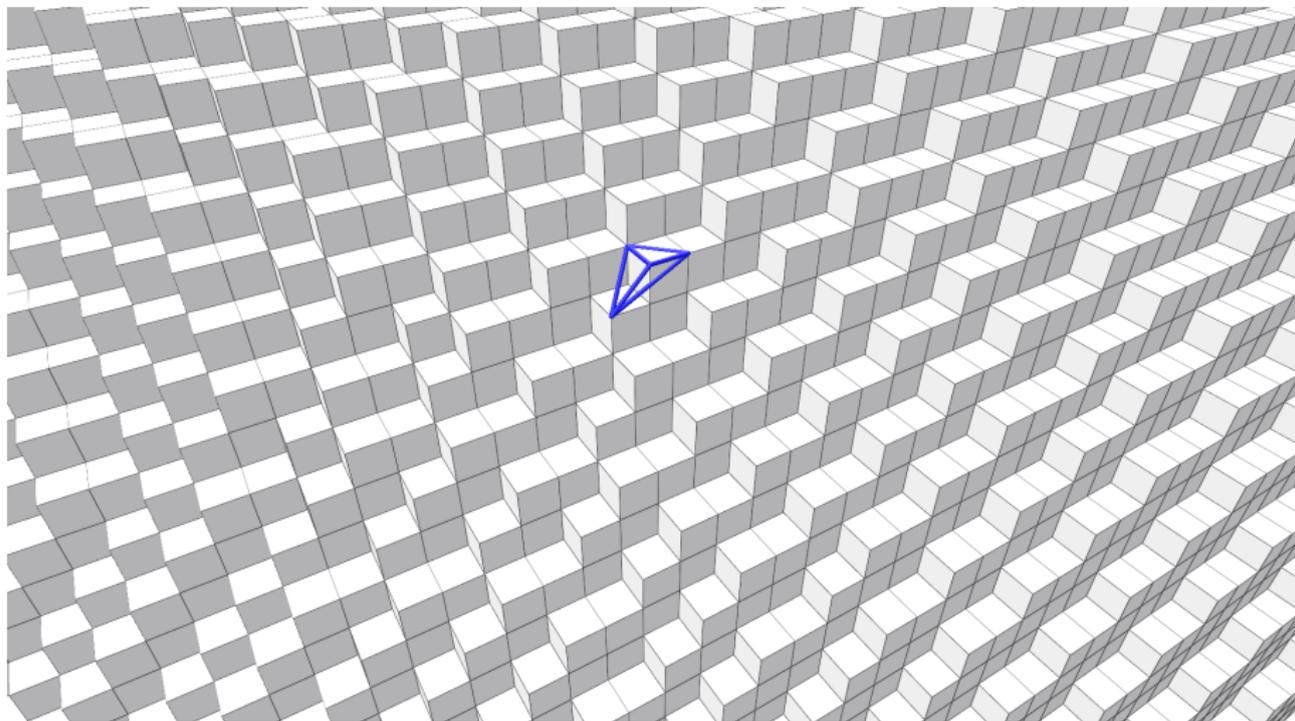
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



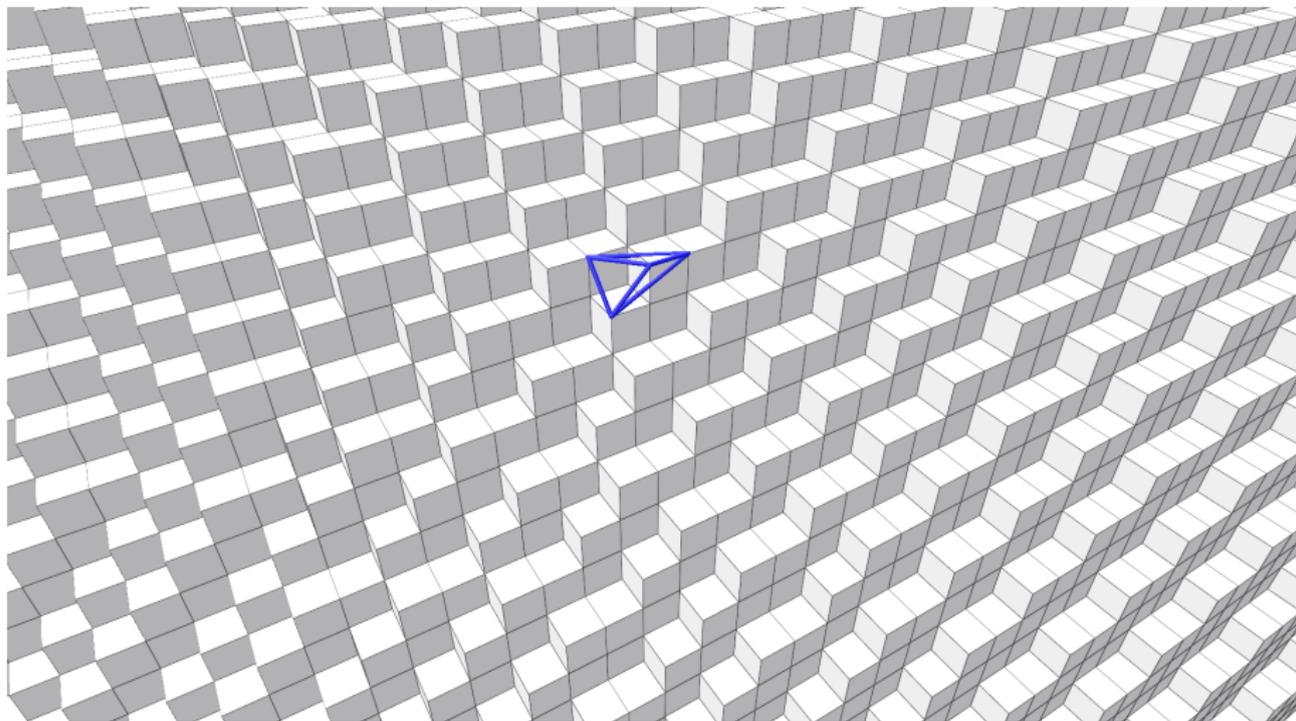
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



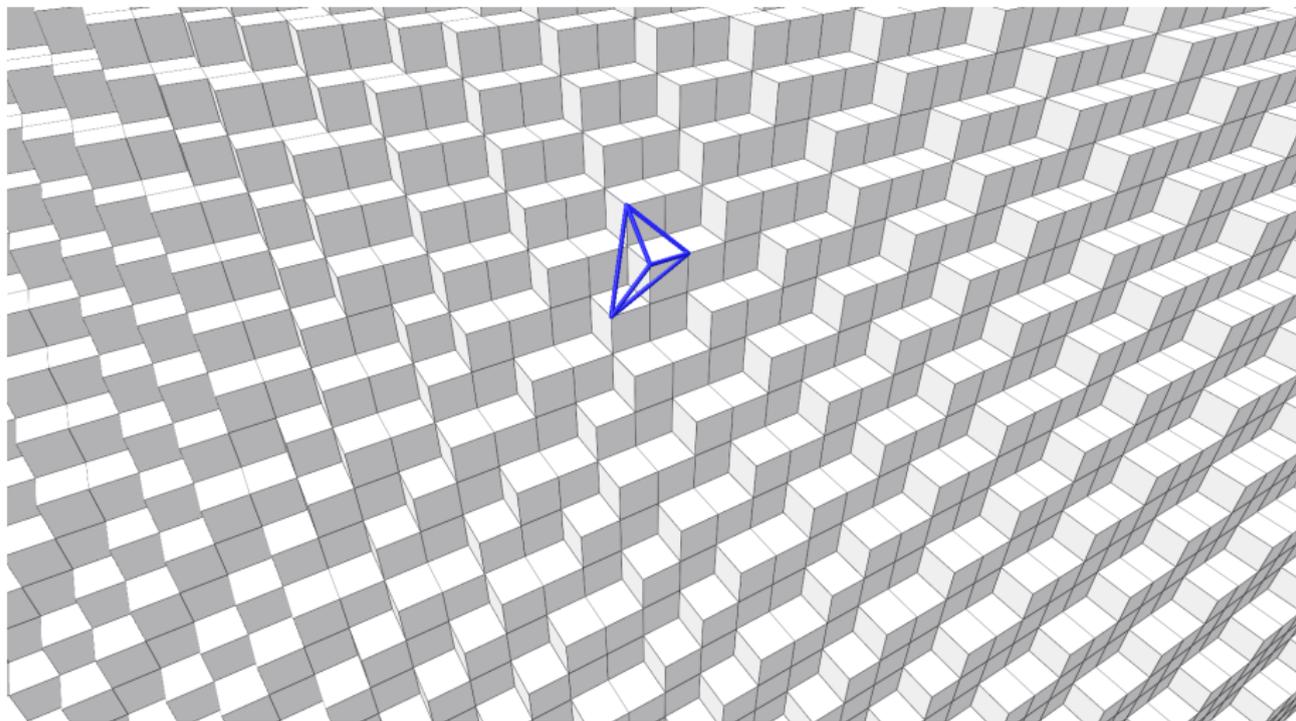
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



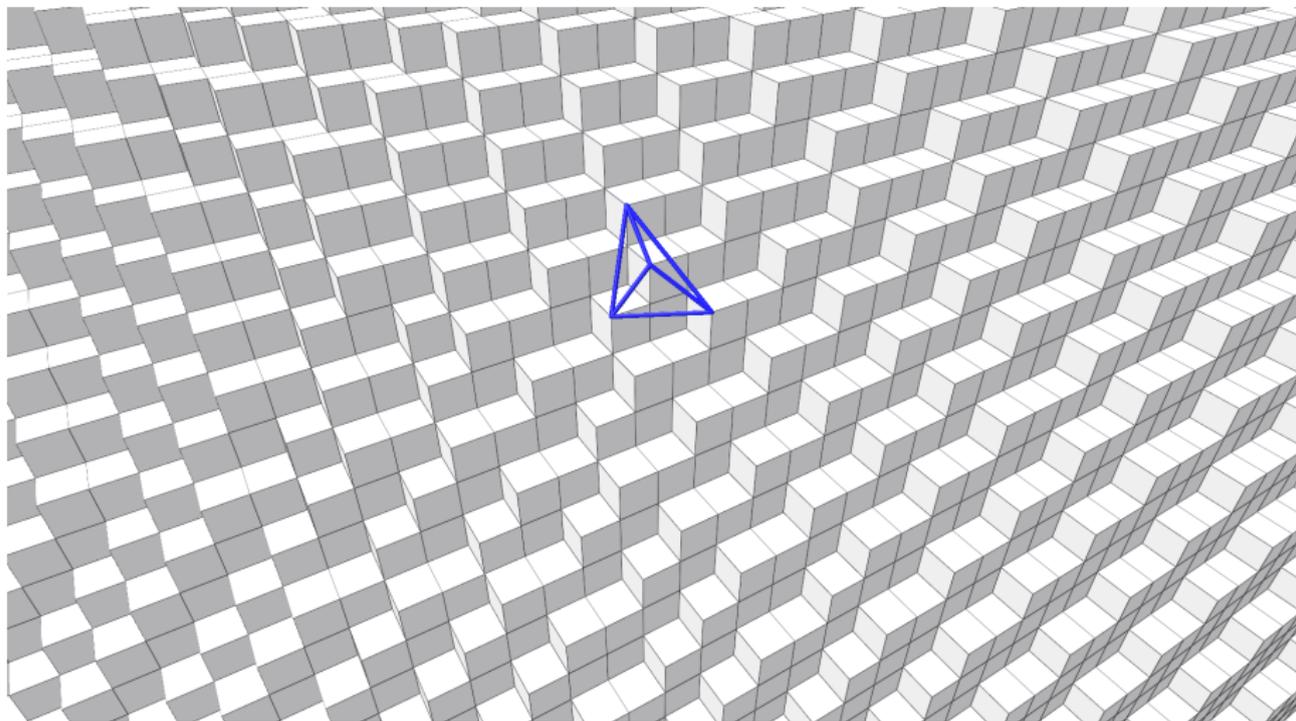
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



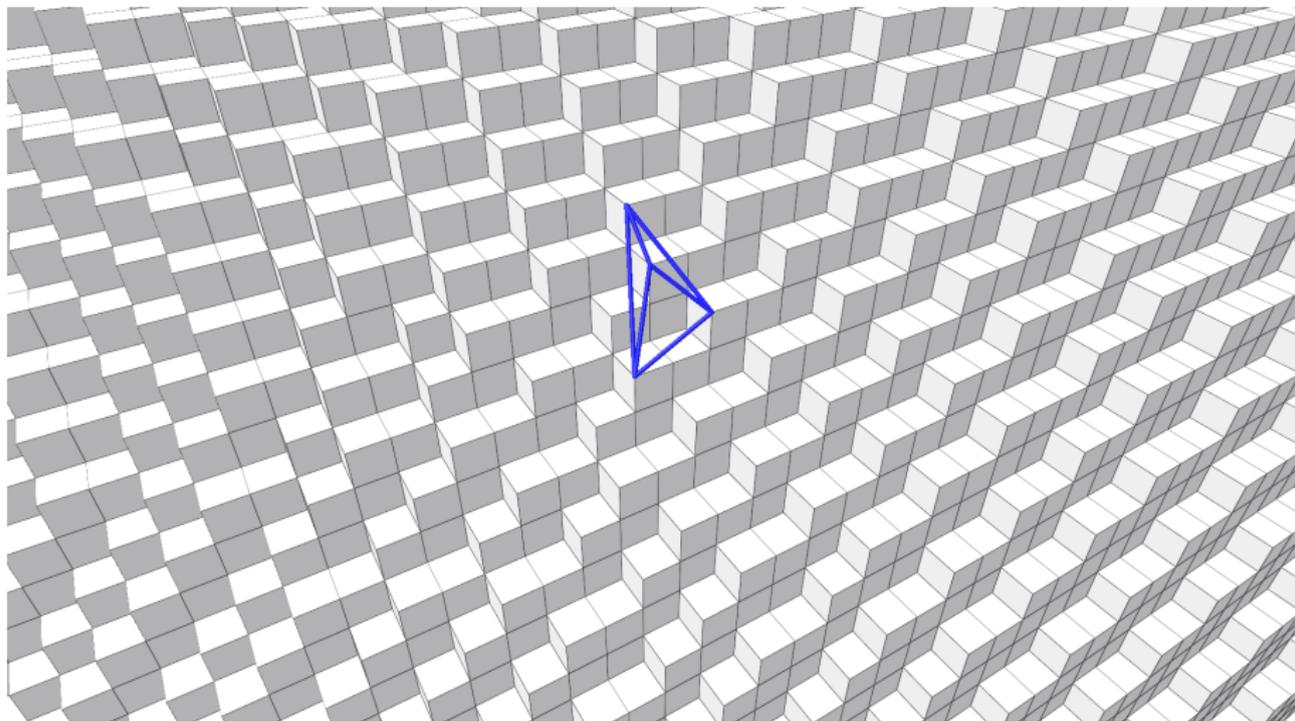
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



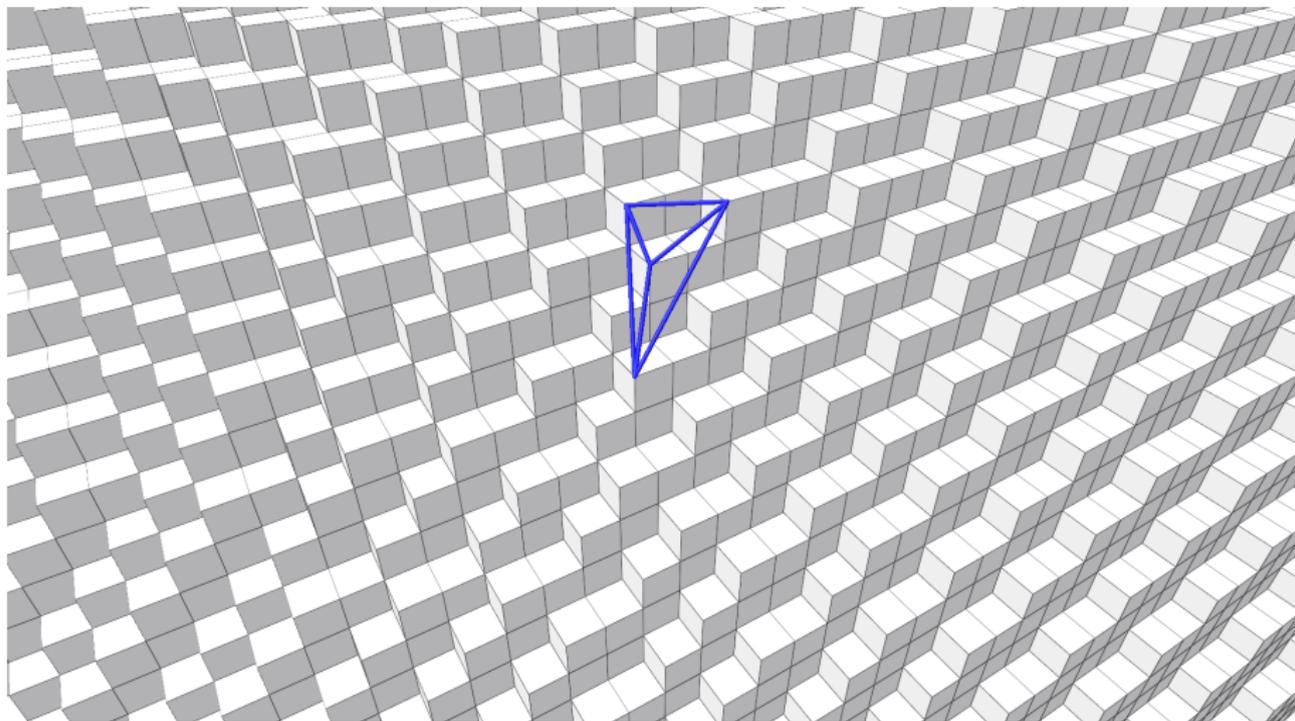
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



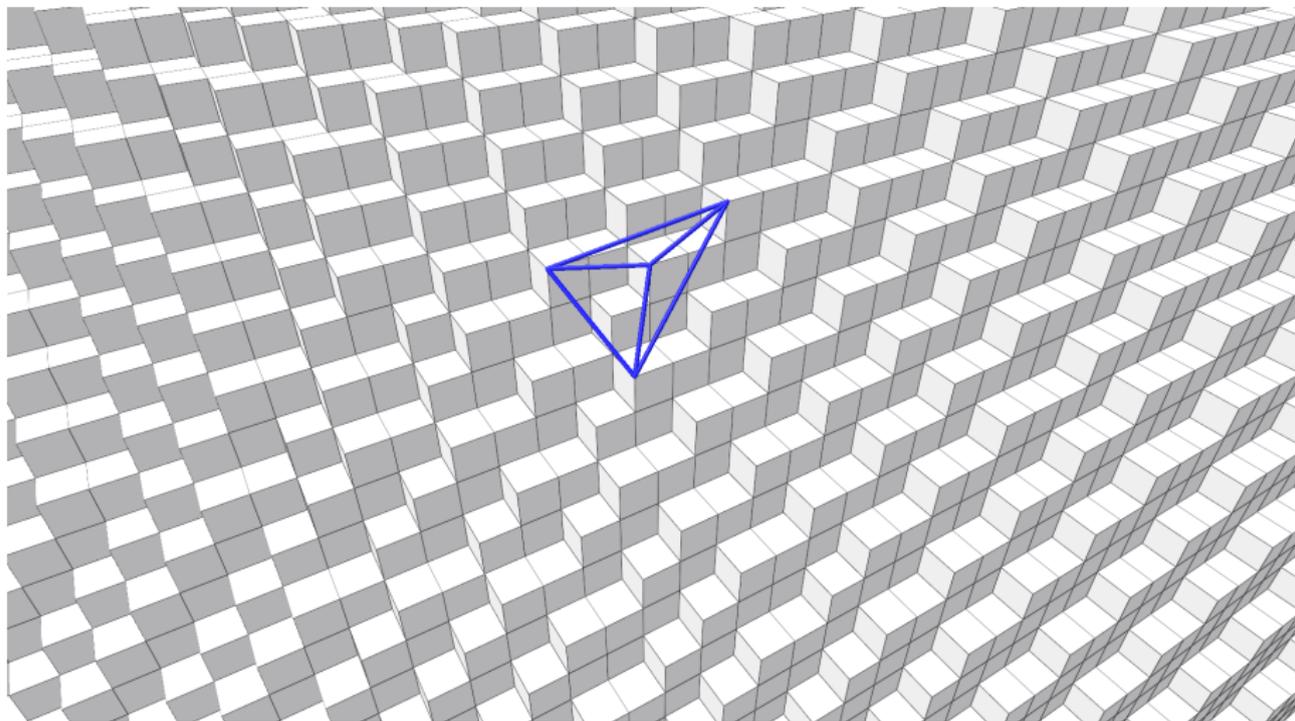
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



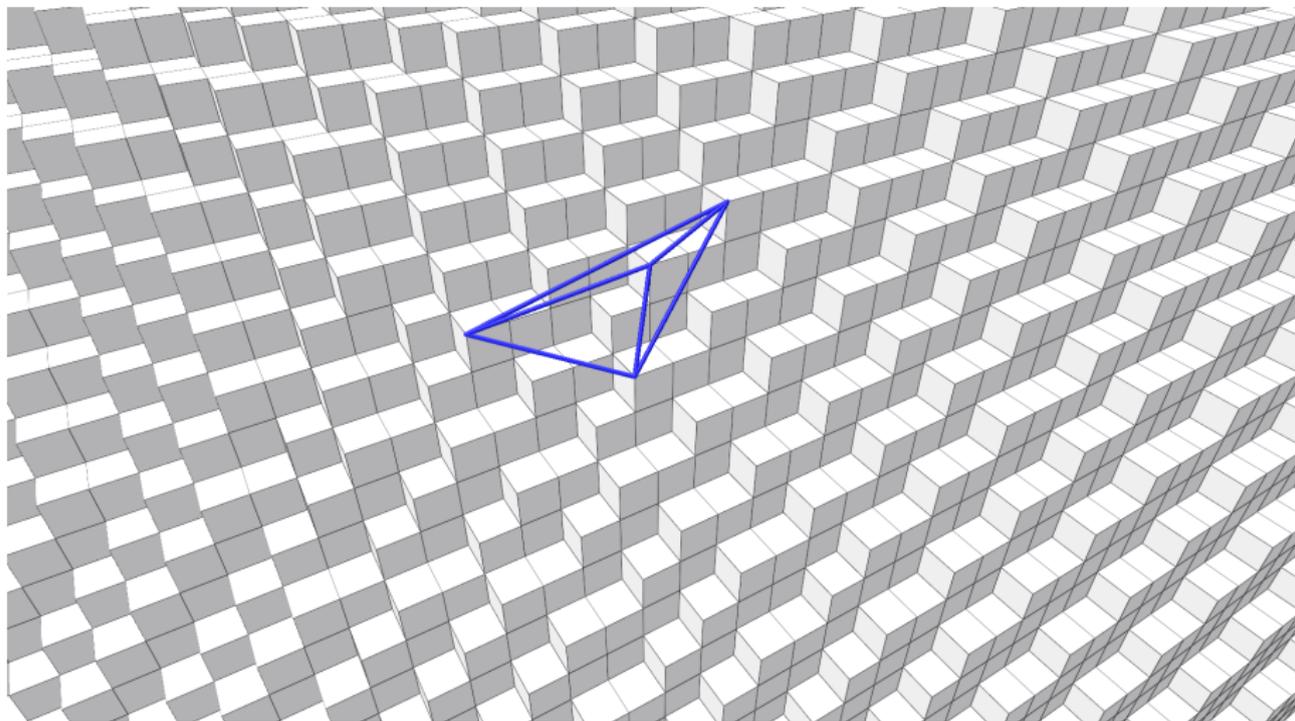
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



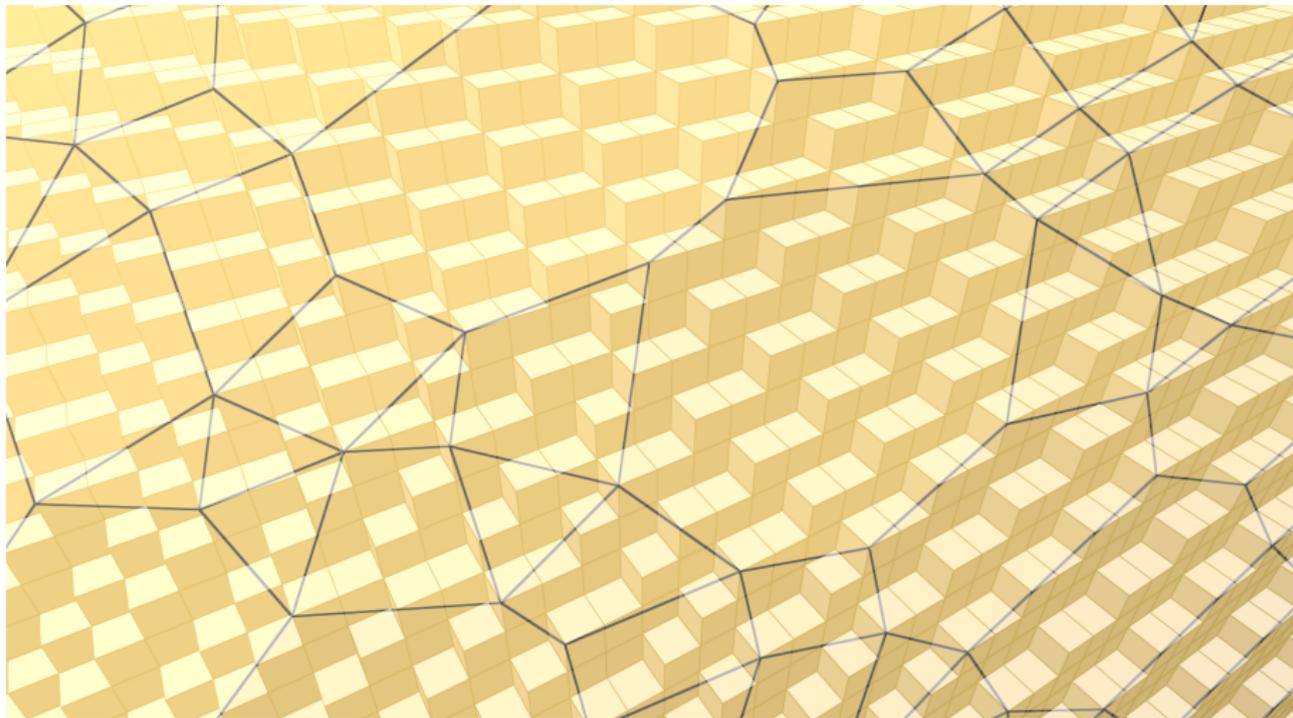
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



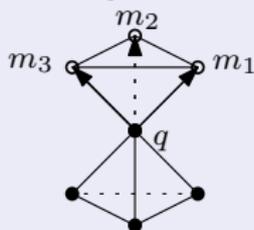
Algorithme ESTEXTREMAL [soumission DGMM]



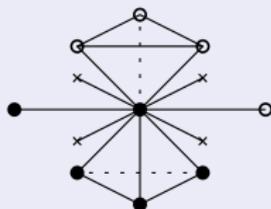
Formalisation

Évolution du tétraèdre

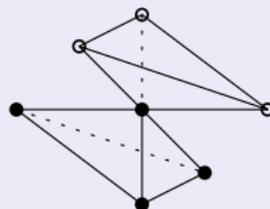
$q, M = [m_1, m_2, m_3]$



$\{q \pm (m_k - m_{k+1})\}$

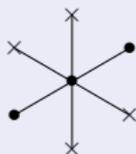


M'

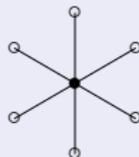


Réponse

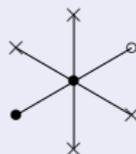
Non



Oui



continue

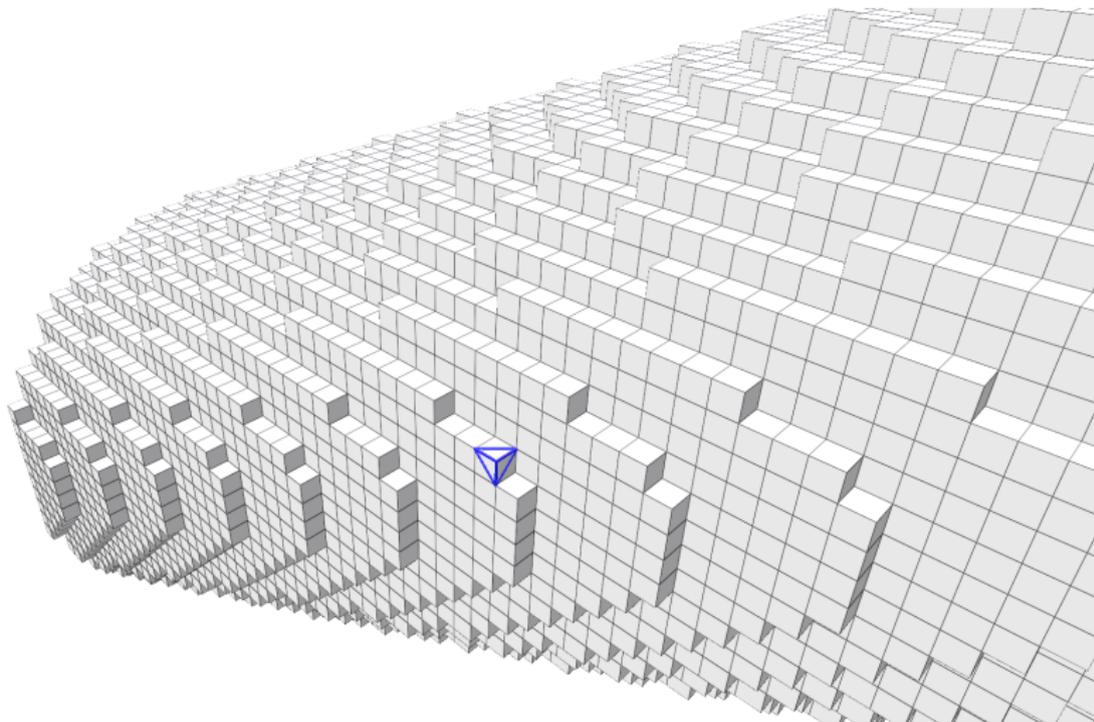


Remarque

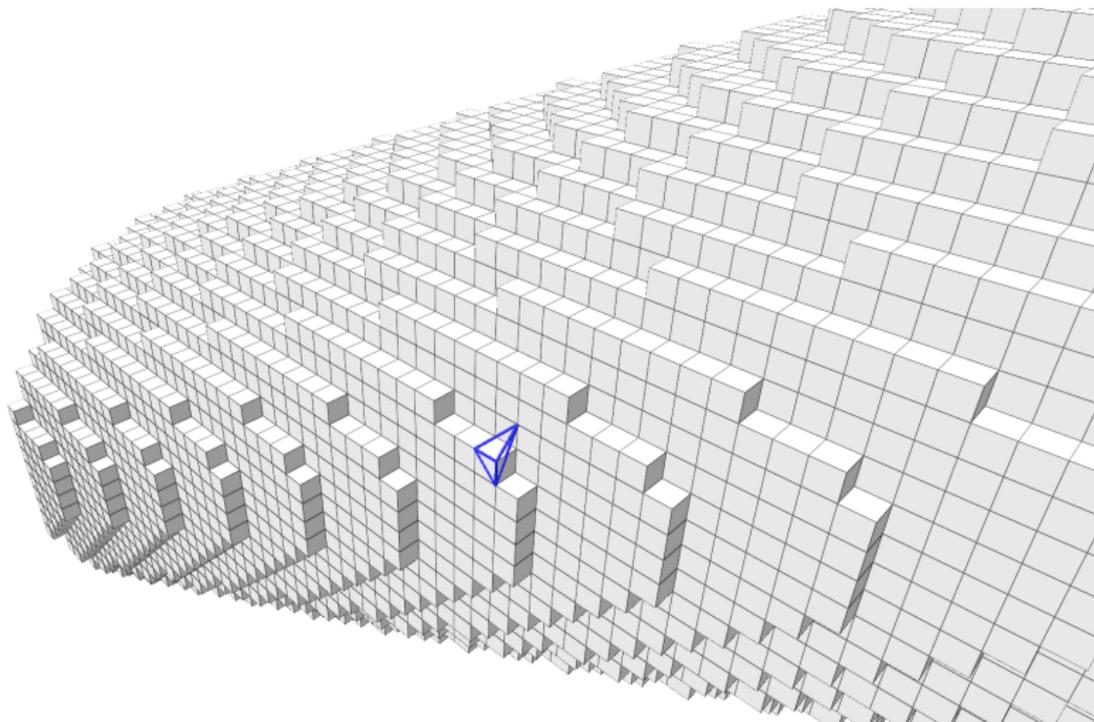
Très efficace sur des discrétisations de formes lisses (ellipsoïdes) :

h	$ S $	n_{init}	n_{final}	$ CvxH(S) $
0.5	984	112	112	112
0.1	24.808	2.032	1.128	1.128
0.05	99.448	7.784	3.064	3.064
0.01	2.488.104	186.664	33.864	33.784

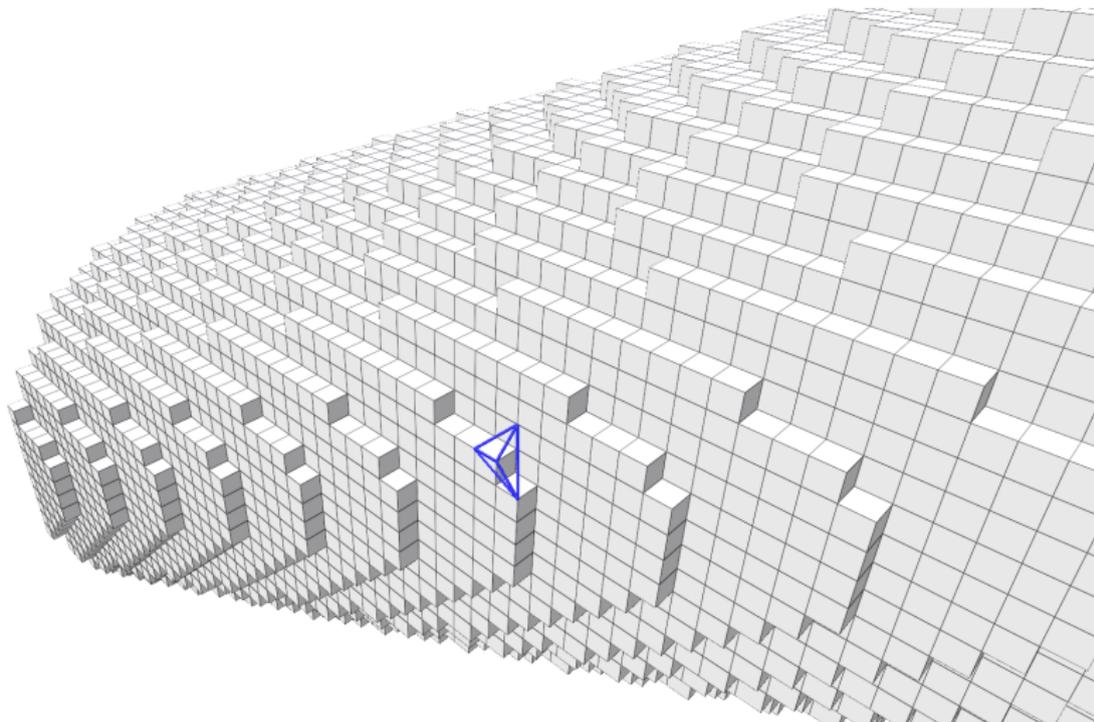
Faux positifs



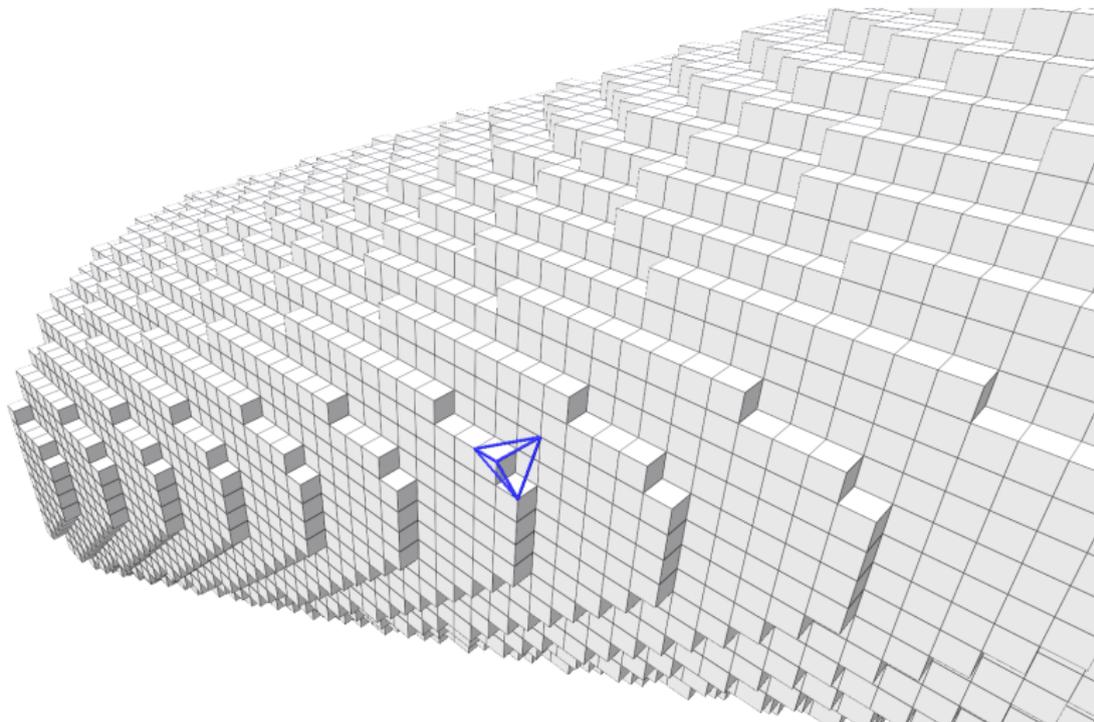
Faux positifs



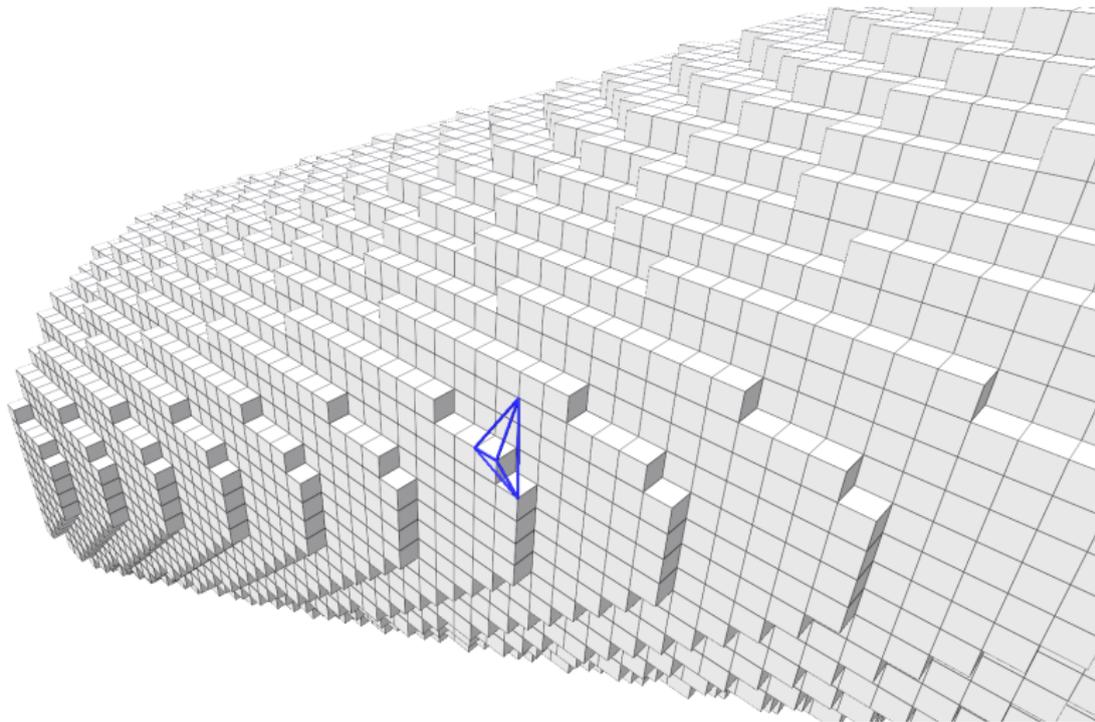
Faux positifs



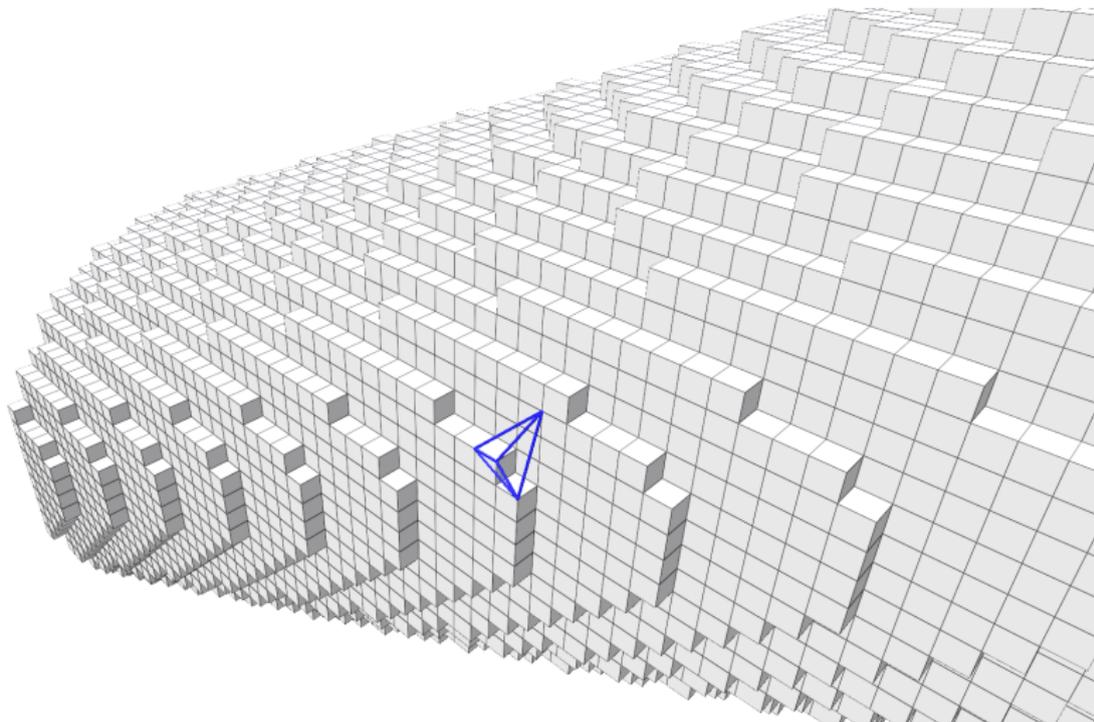
Faux positifs



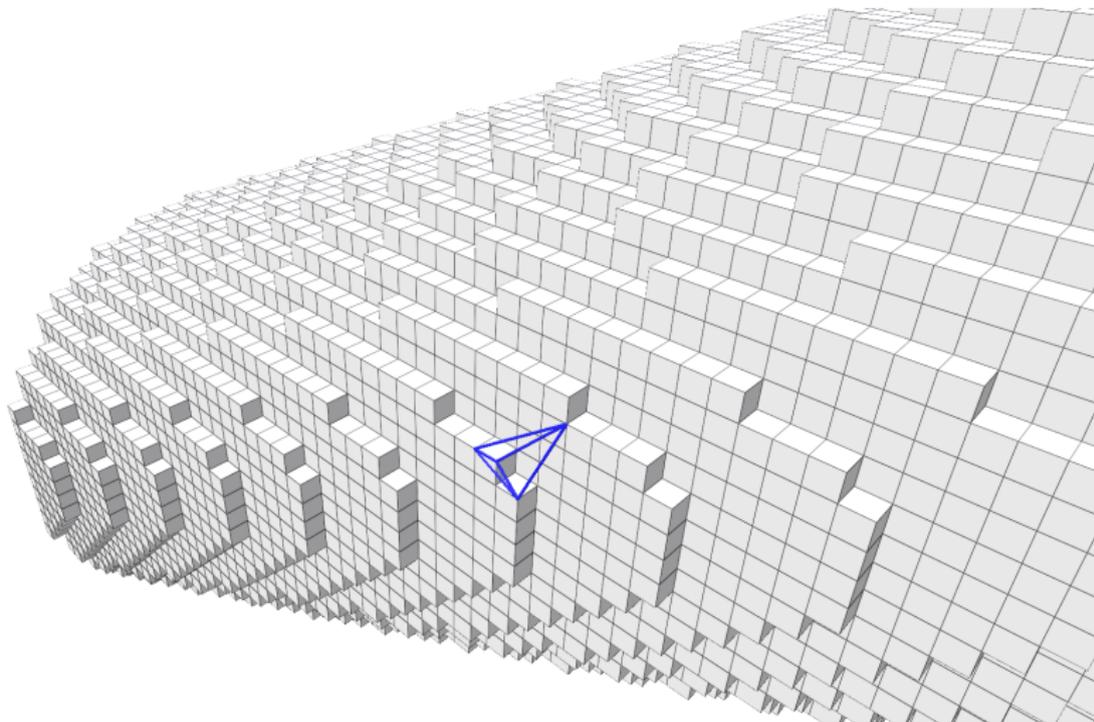
Faux positifs



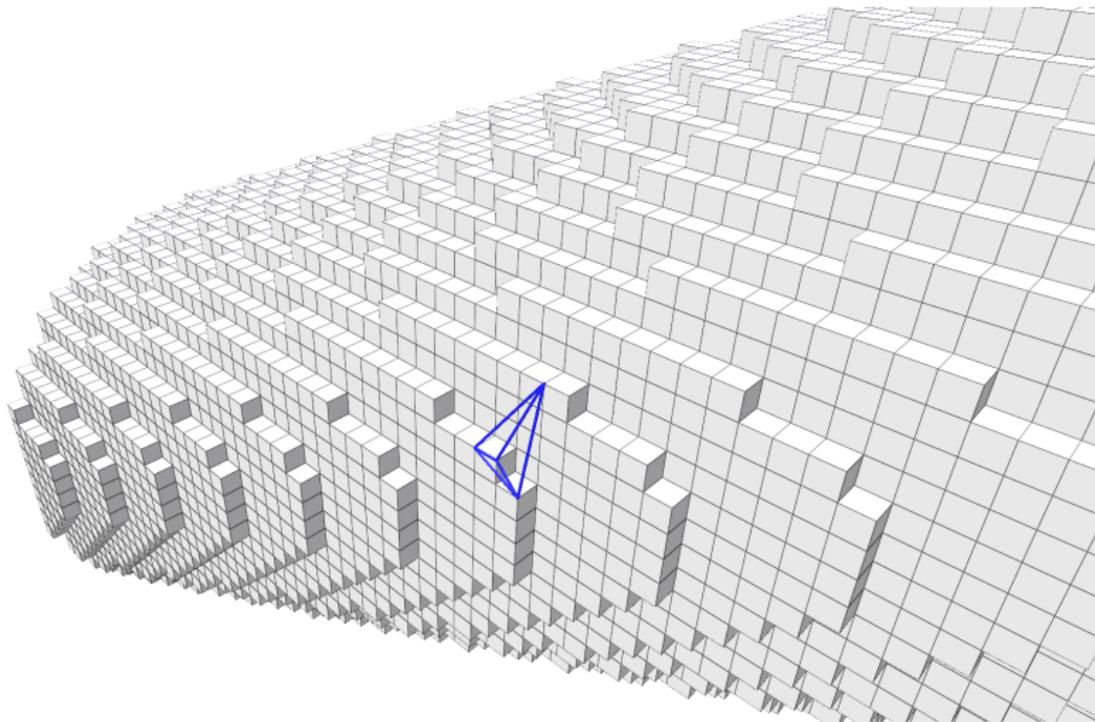
Faux positifs



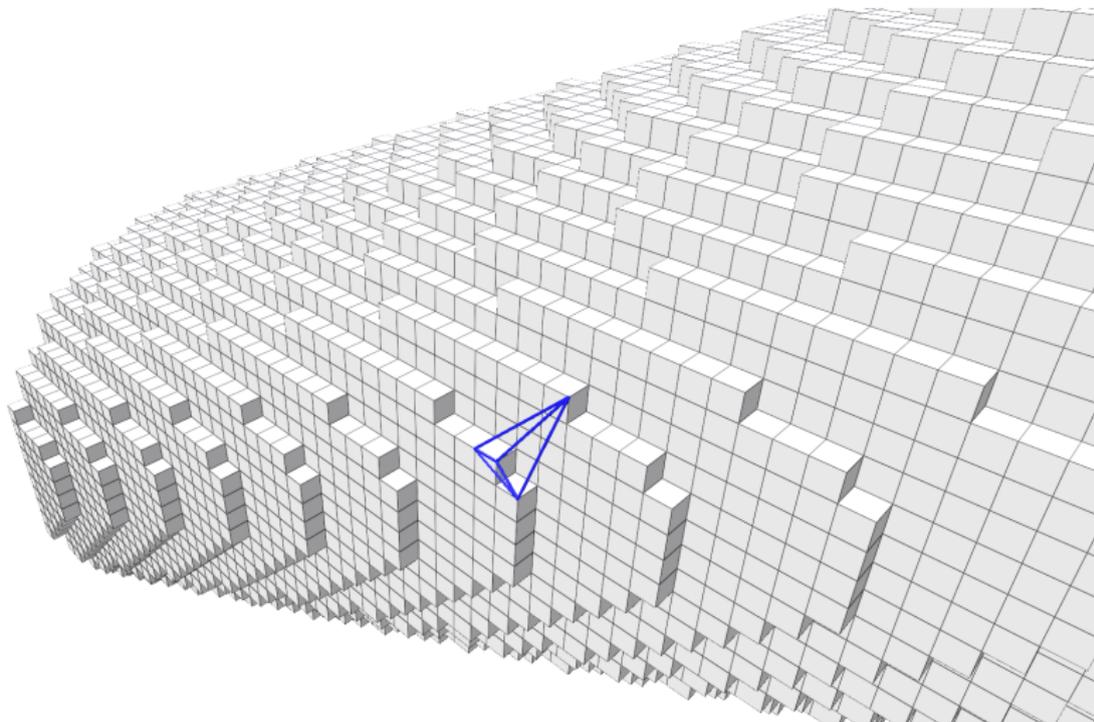
Faux positifs



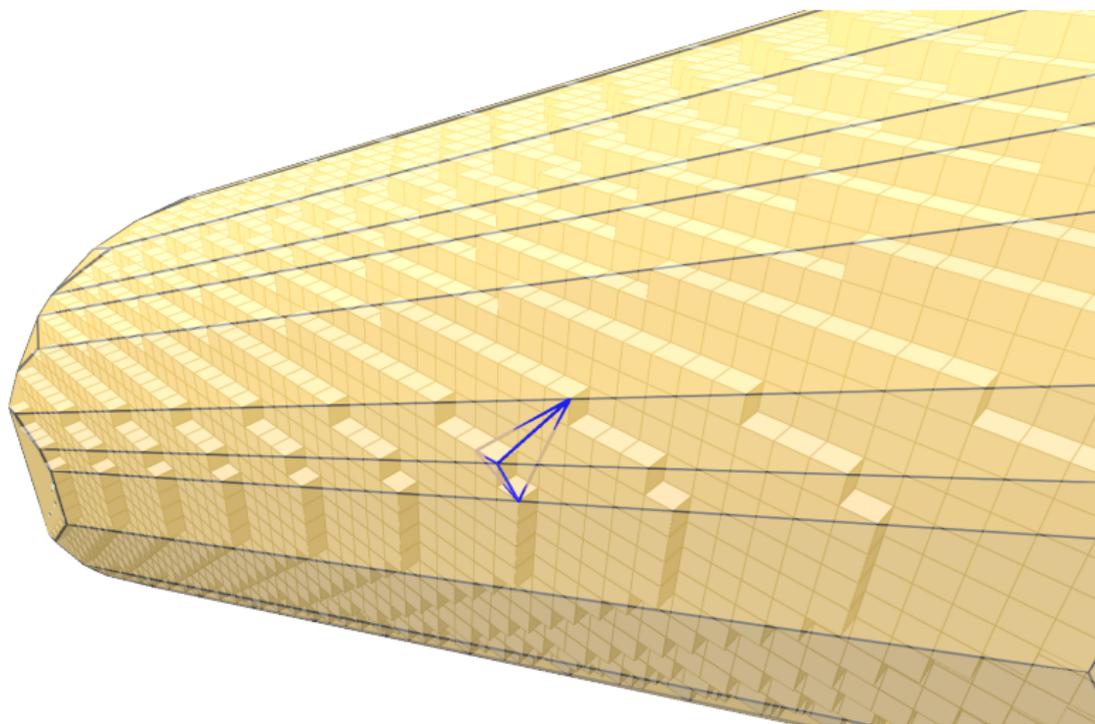
Faux positifs



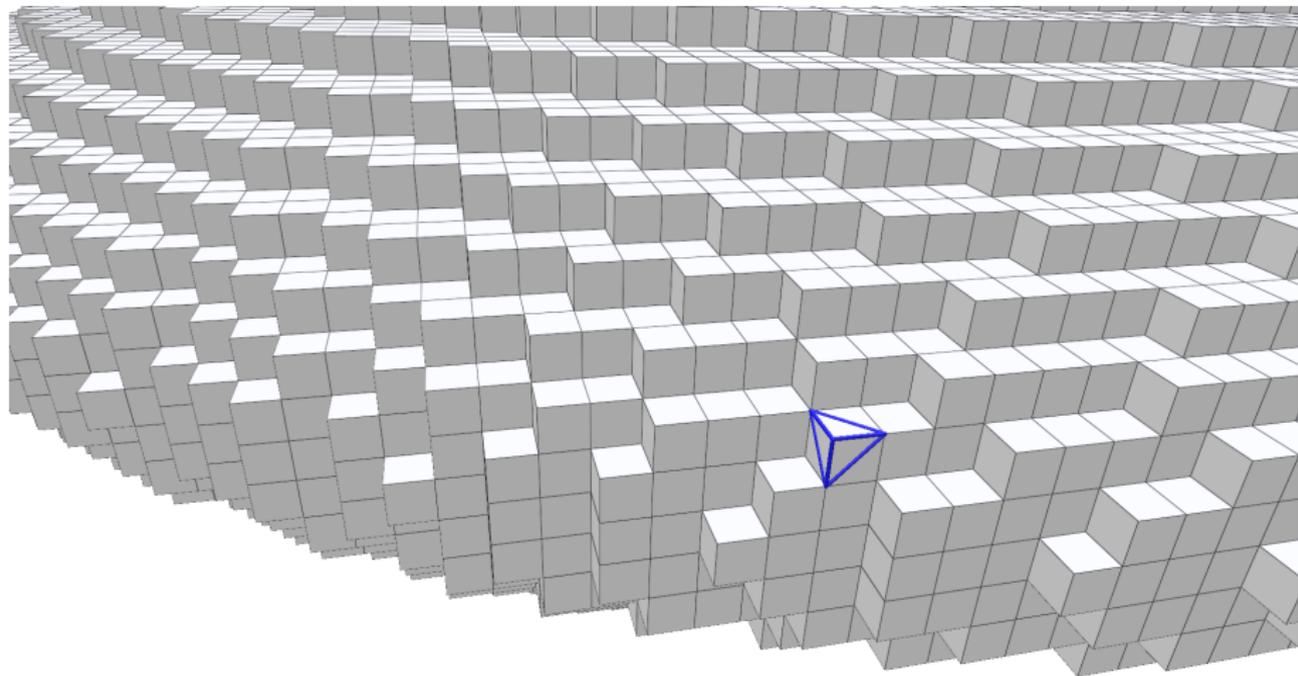
Faux positifs



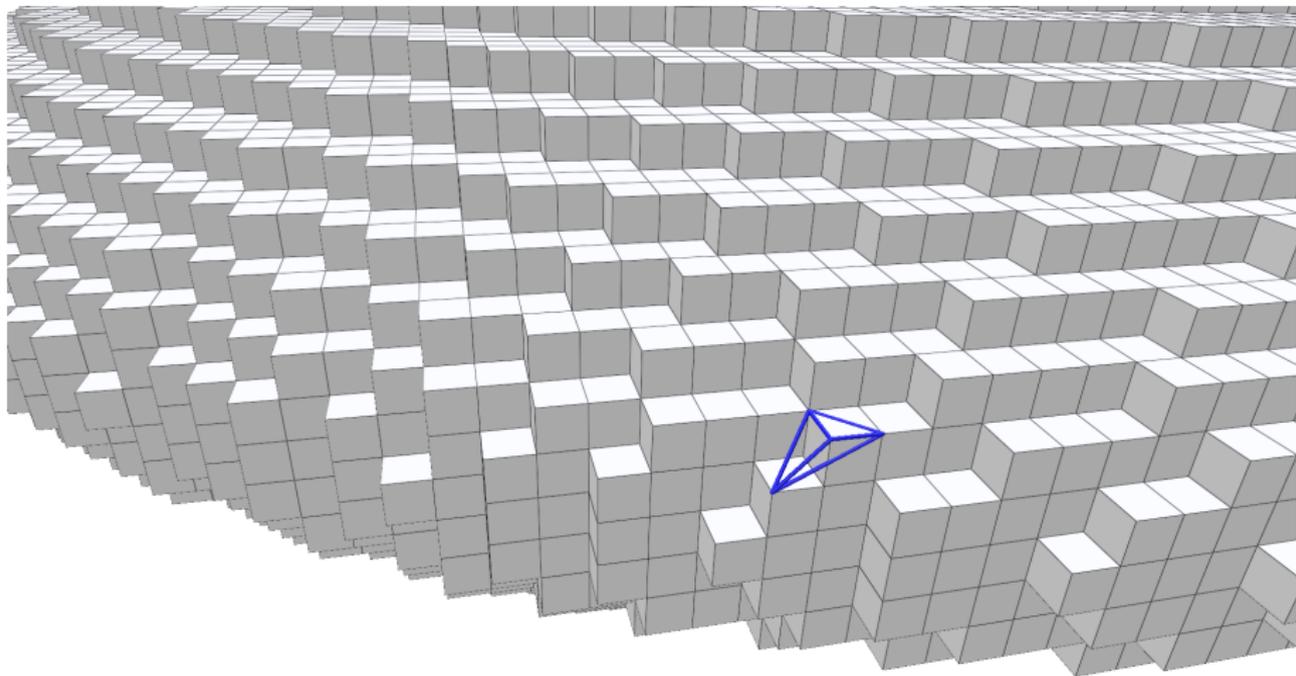
Faux positifs



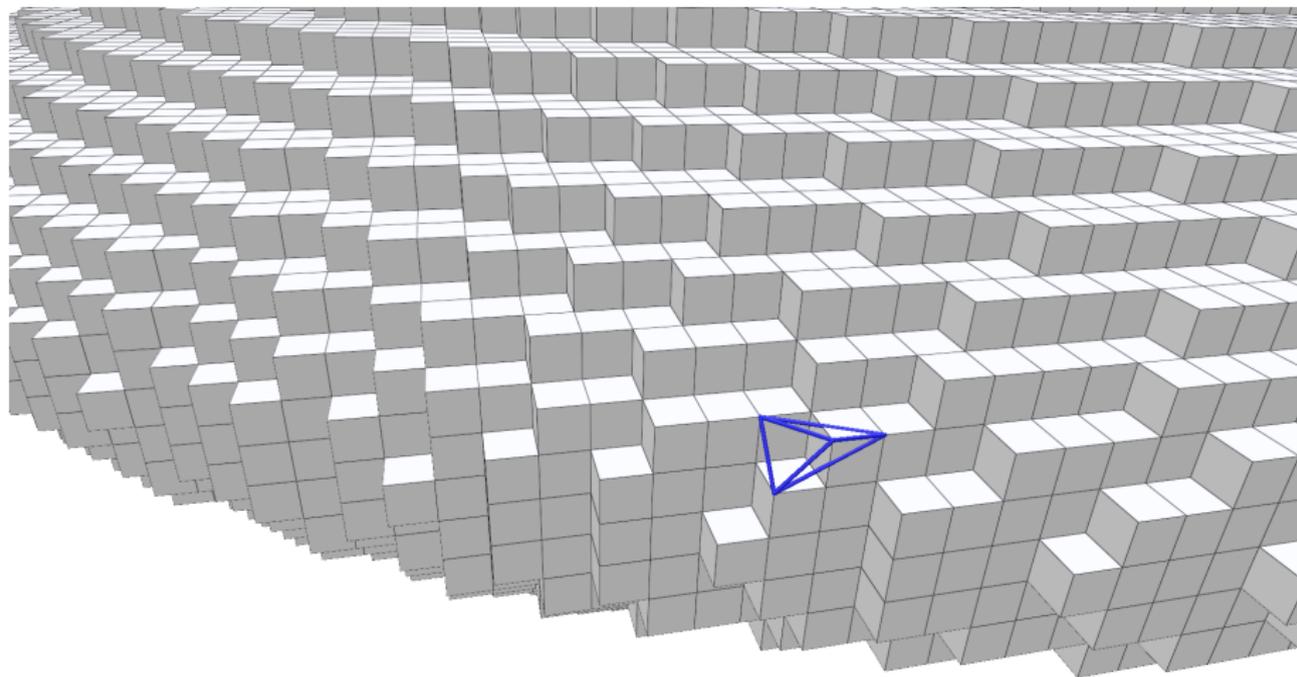
Faux positifs



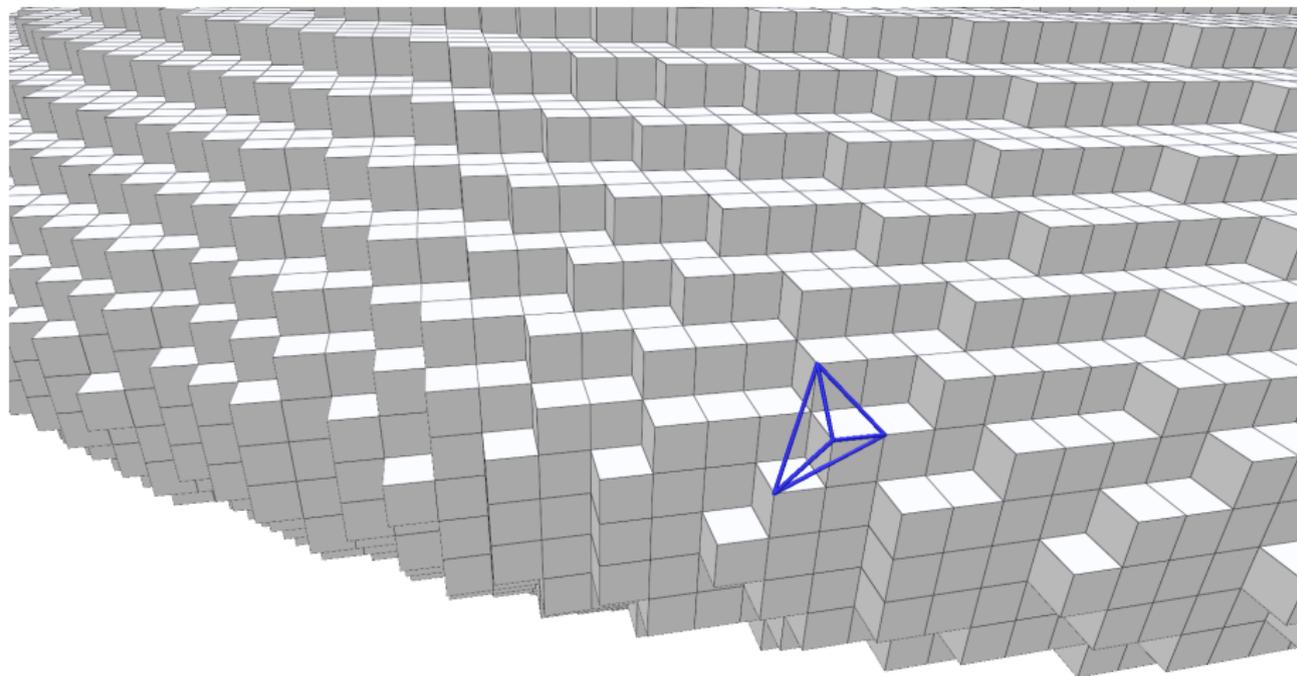
Faux positifs



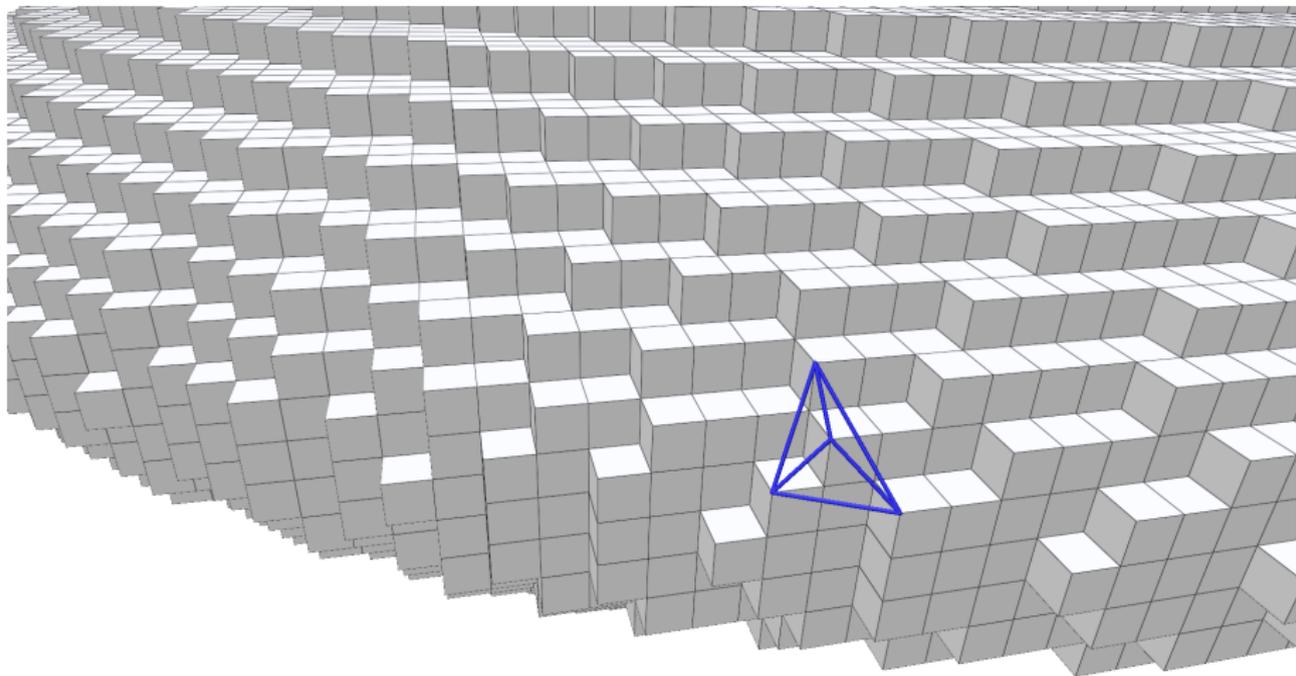
Faux positifs



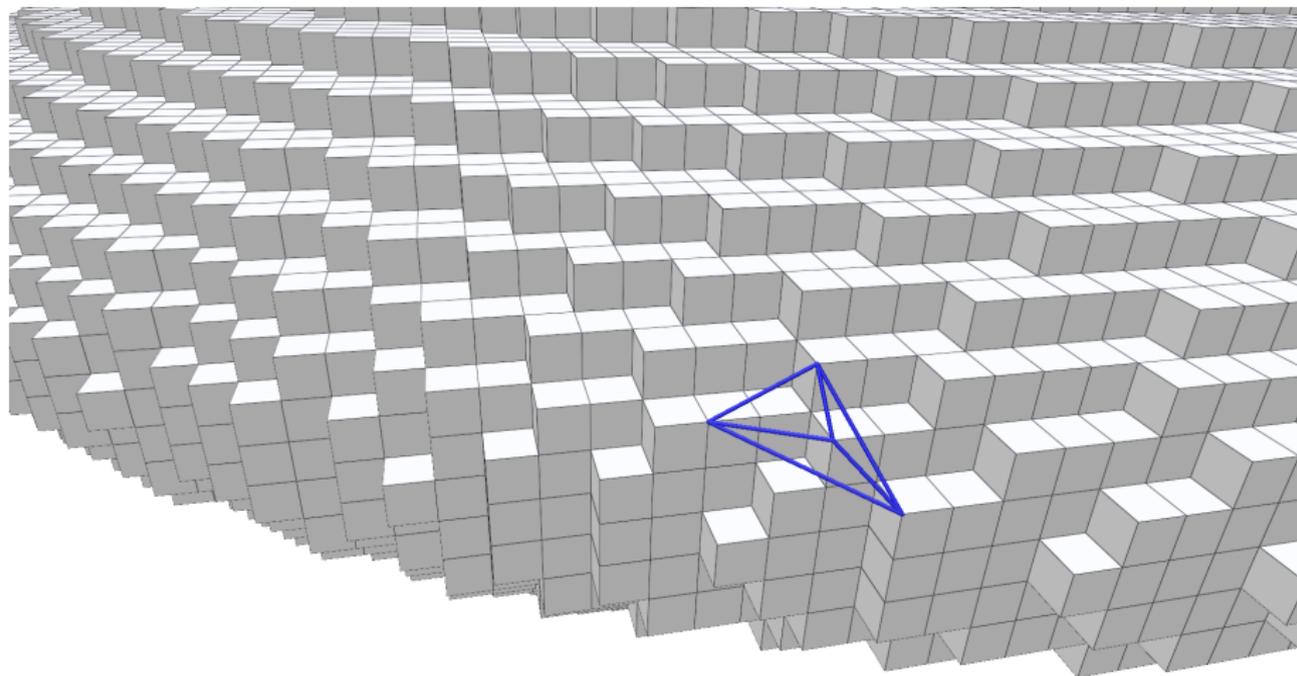
Faux positifs



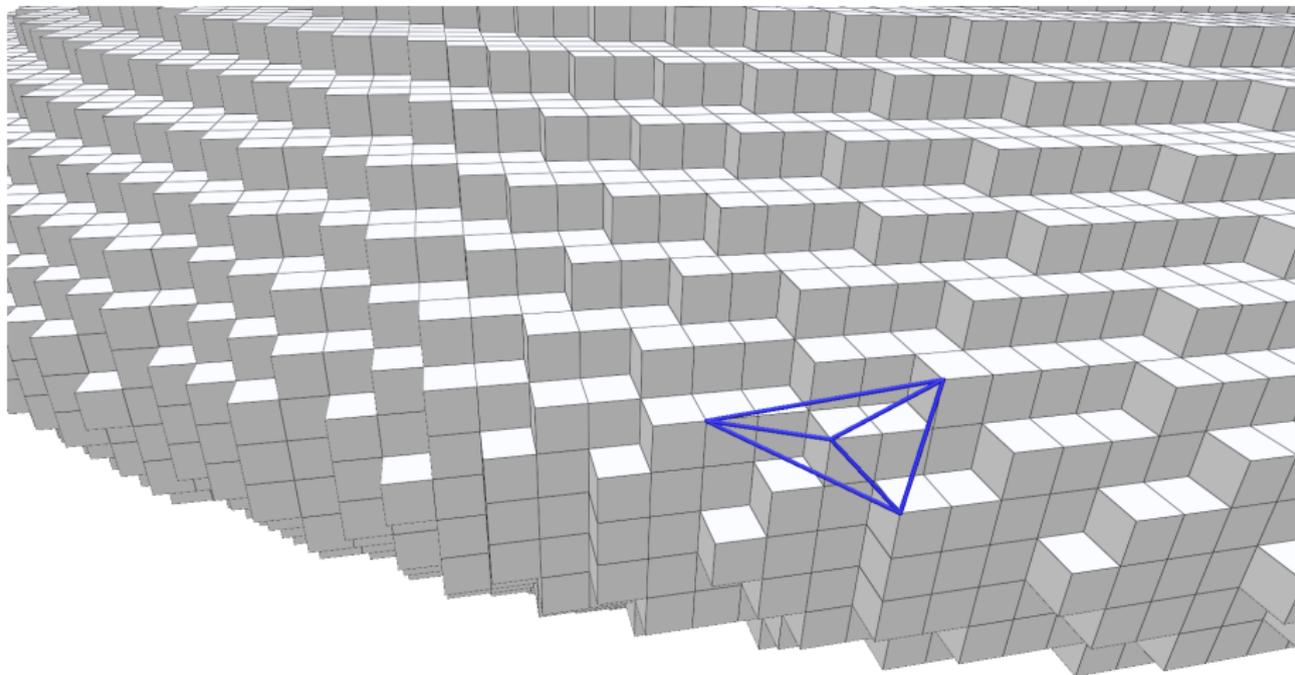
Faux positifs



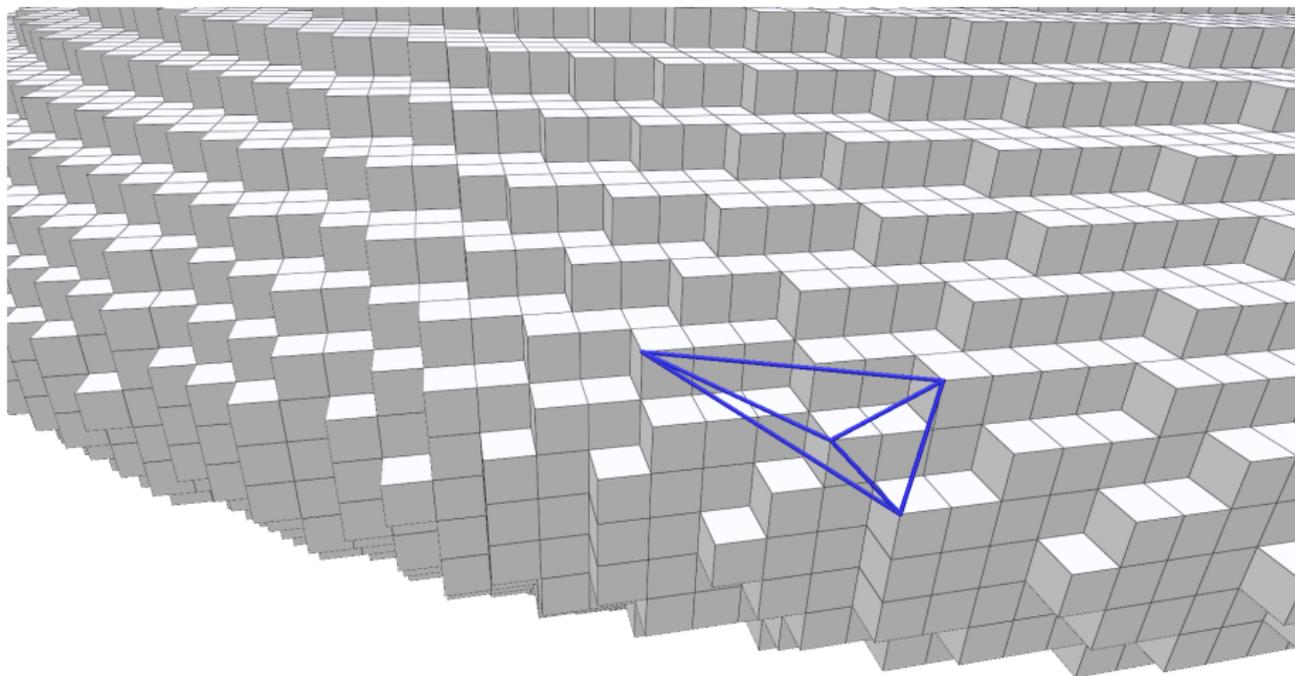
Faux positifs



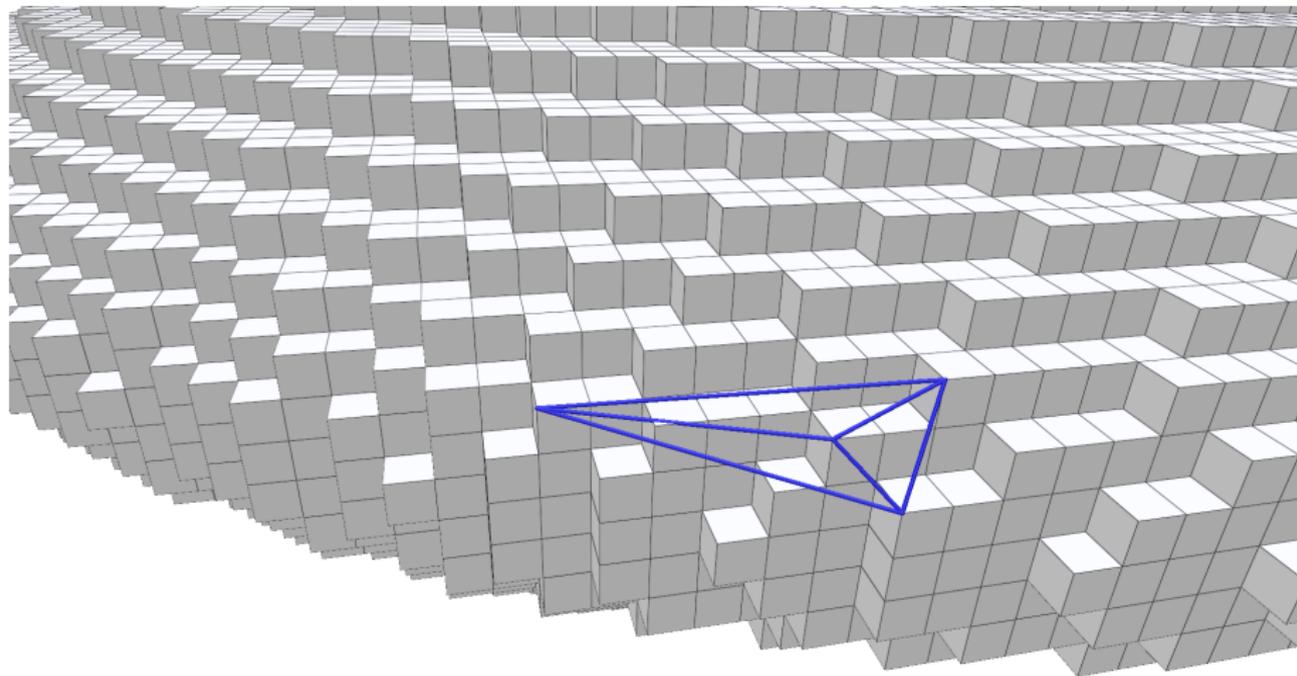
Faux positifs



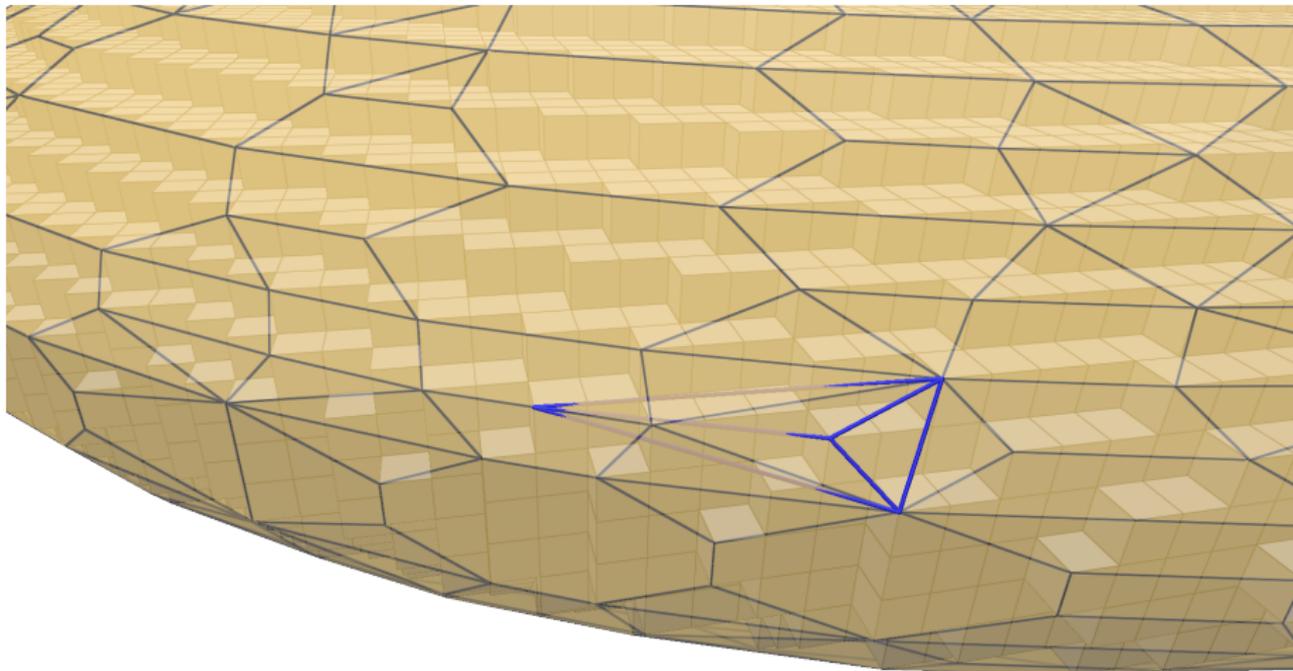
Faux positifs



Faux positifs



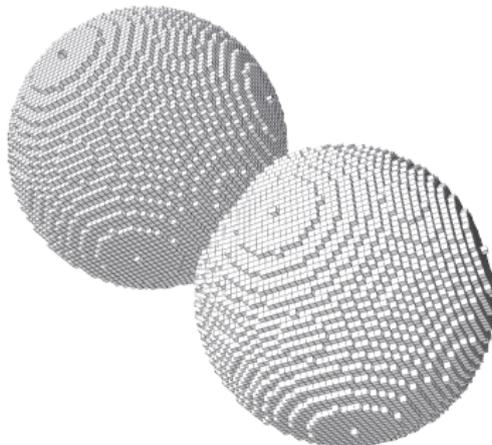
Faux positifs



Extraction des parties convexes et concaves

ESTEXTREMAL et Visibilité [L21],[L22]

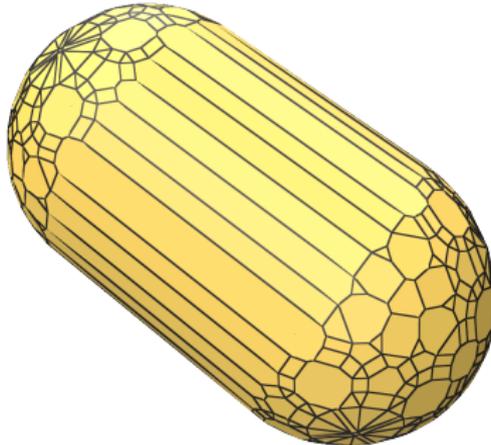
- identification parties convexes/concaves
- représentation polygonale de ces parties
- env. conv. si convexe discret



Extraction des parties convexes et concaves

ESTEXTREMAL et Visibilité [L21],[L22]

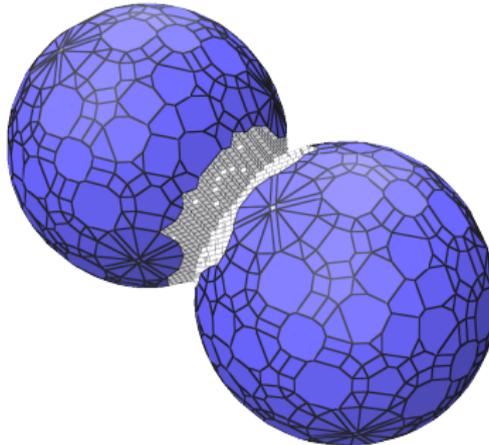
- identification parties convexes/concaves
- représentation polygonale de ces parties
- env. conv. si convexe discret



Extraction des parties convexes et concaves

ESTEXTREMAL et Visibilité [L21],[L22]

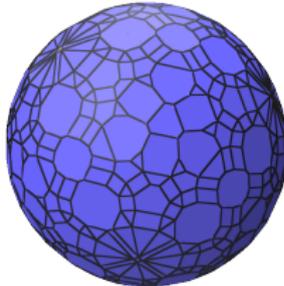
- identification parties convexes/concaves
- représentation polygonale de ces parties
- env. conv. si convexe discret



Extraction des parties convexes et concaves

ESTEXTREMAL et Visibilité [L21],[L22]

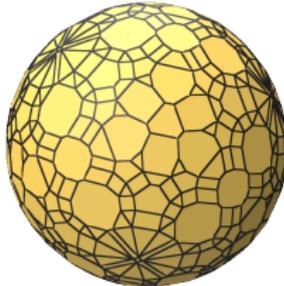
- identification parties convexes/concaves
- représentation polygonale de ces parties
- env. conv. si convexe discret



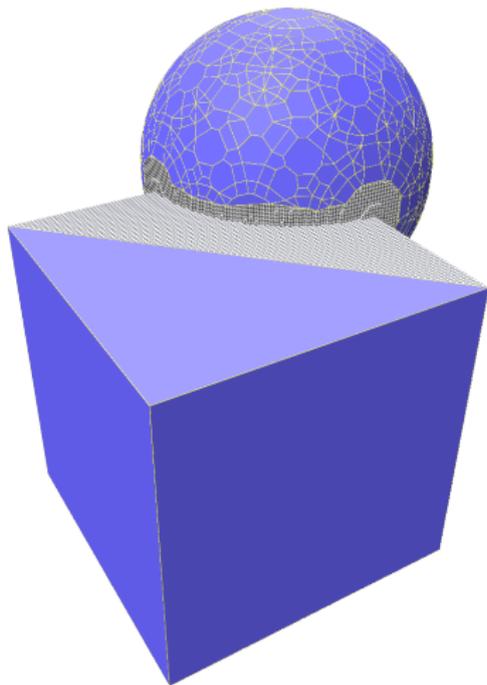
Extraction des parties convexes et concaves

ESTEXTREMAL et Visibilité [L21],[L22]

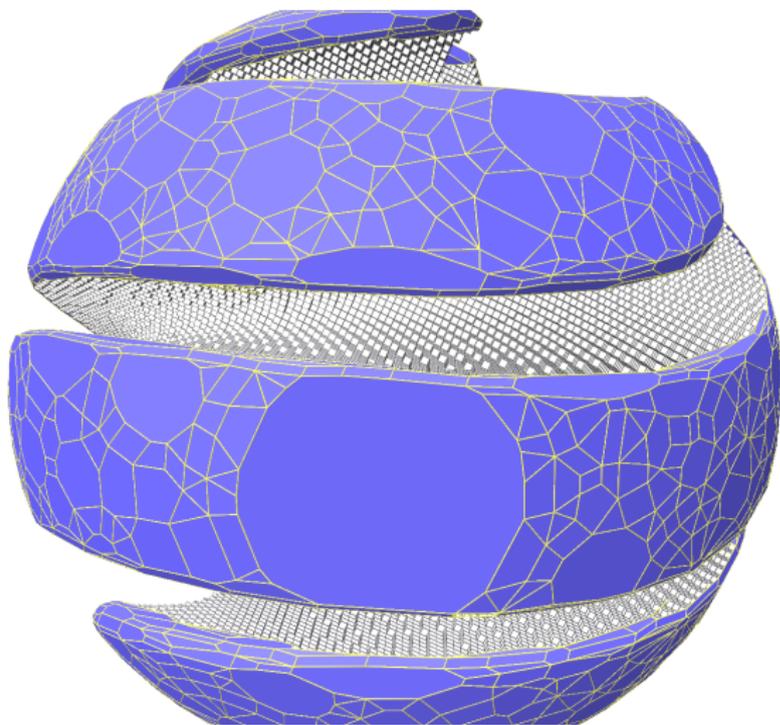
- identification parties convexes/concaves
- représentation polygonale de ces parties
- env. conv. si convexe discret



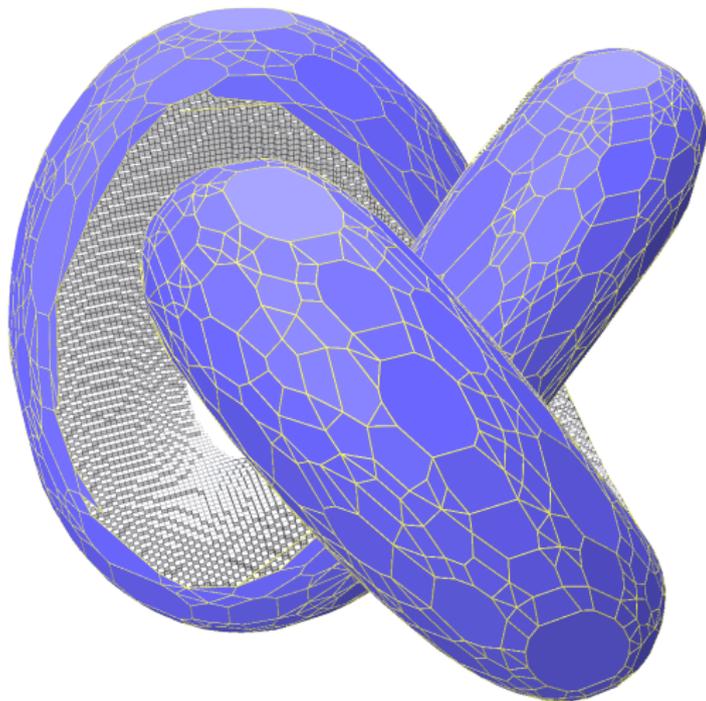
Quelques résultats



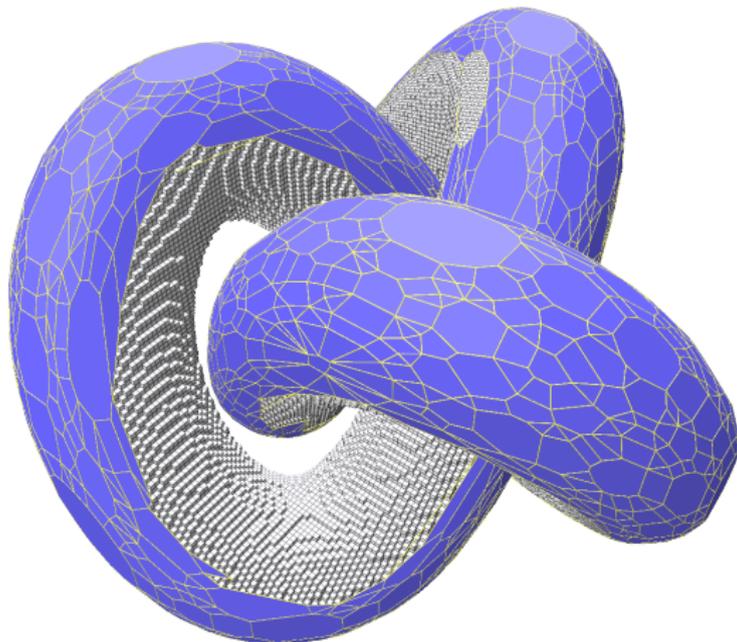
Quelques résultats



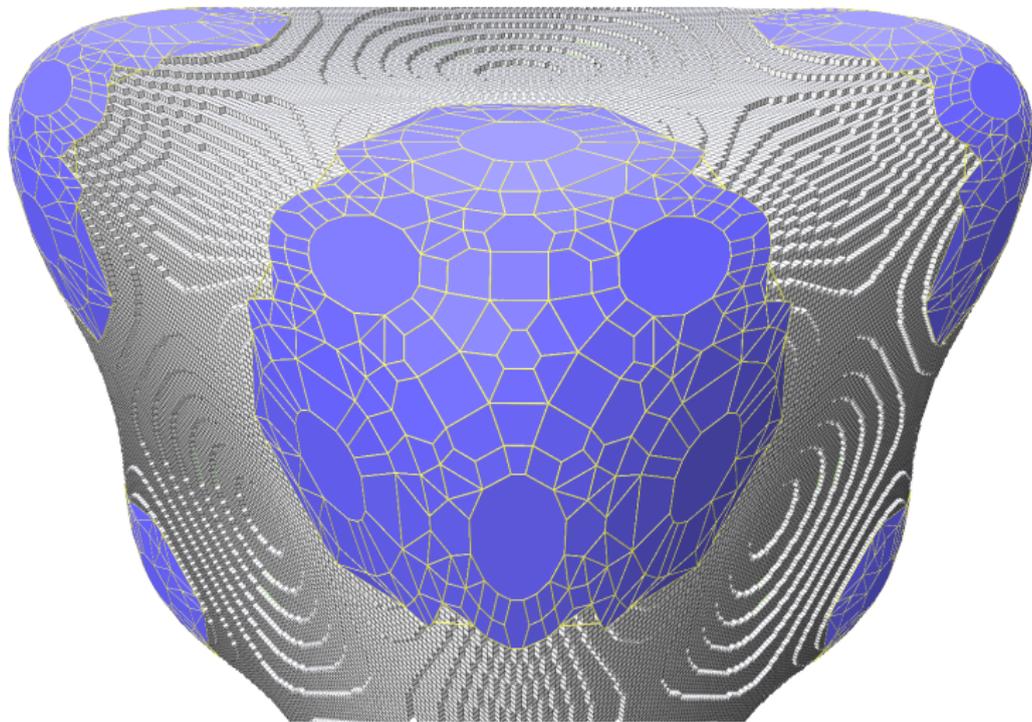
Quelques résultats



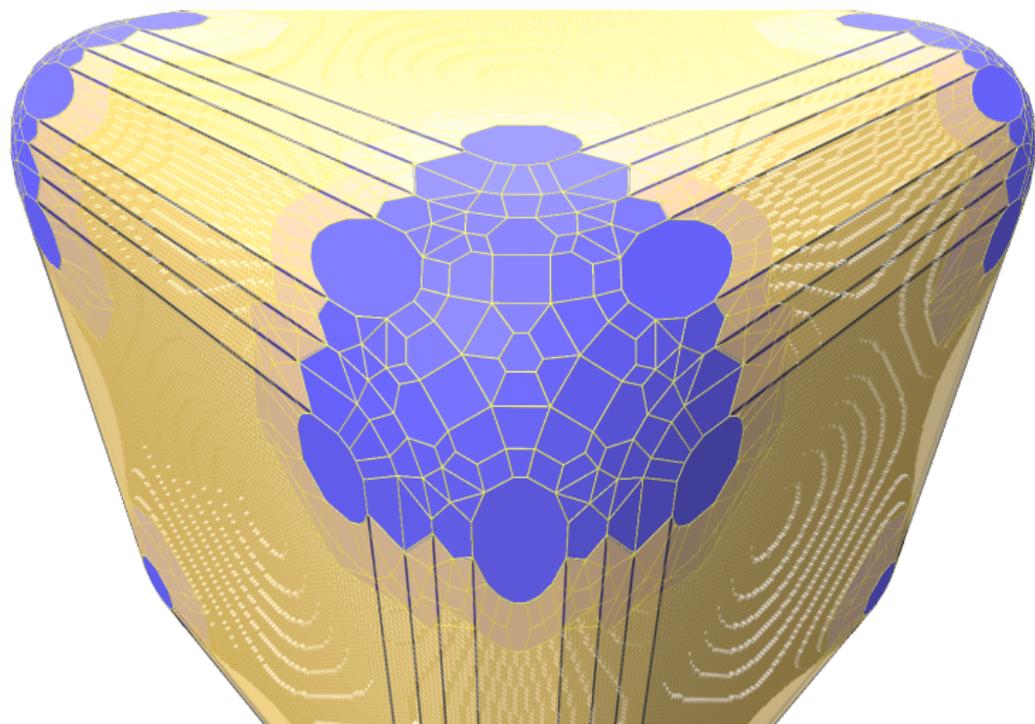
Quelques résultats



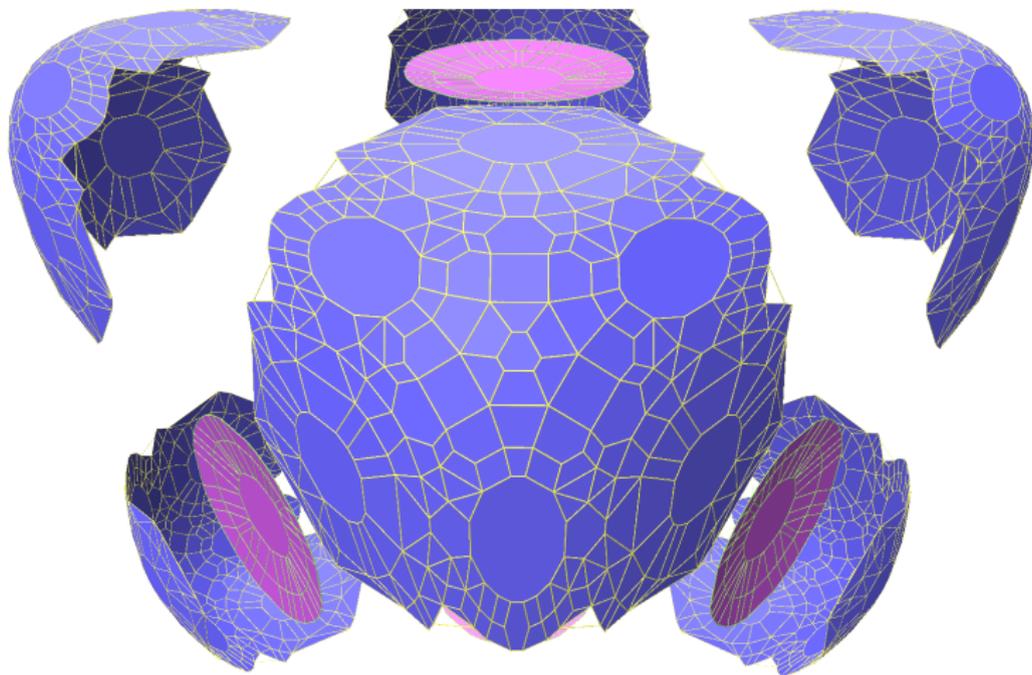
Quelques résultats



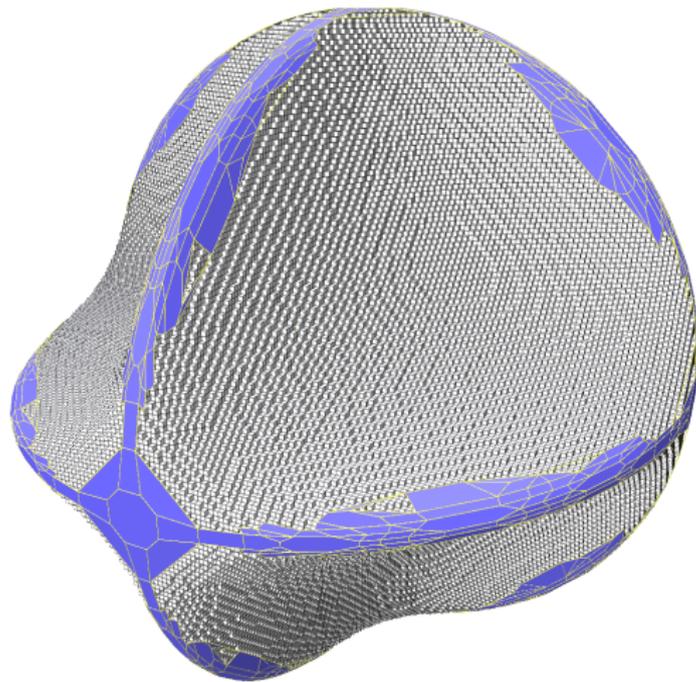
Quelques résultats



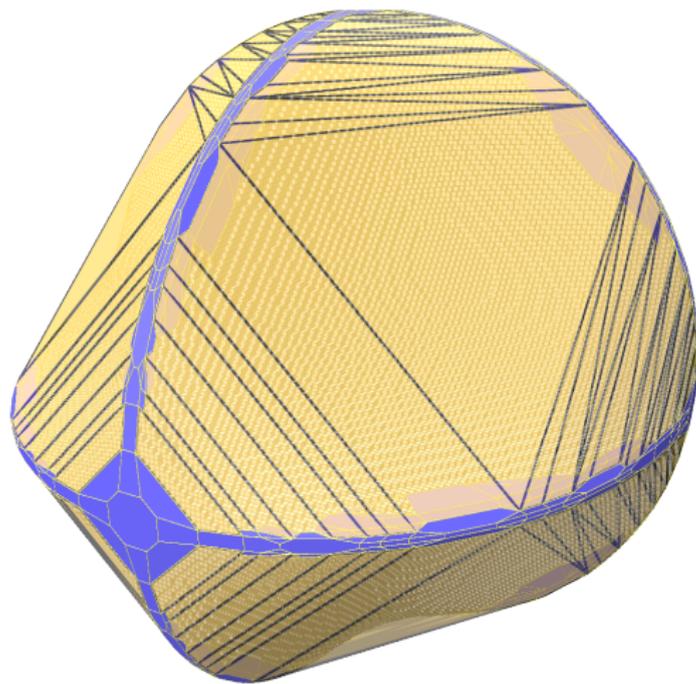
Quelques résultats



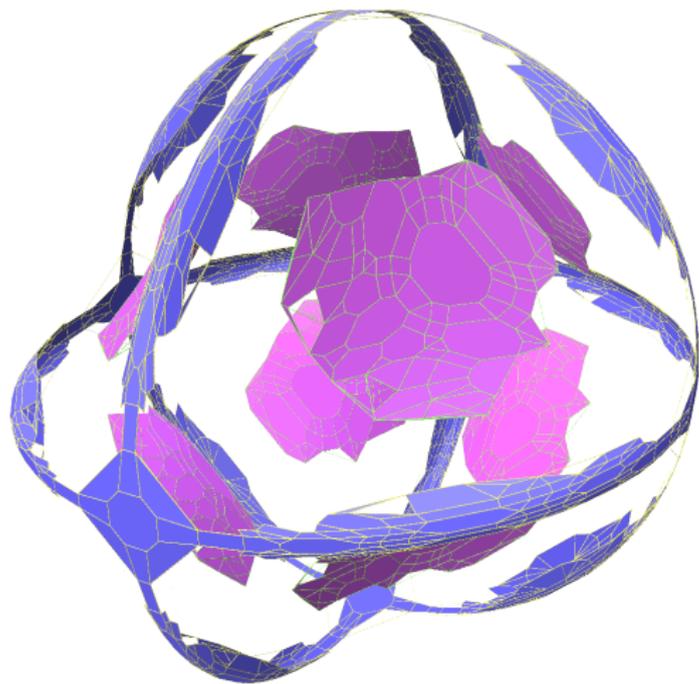
Quelques résultats



Quelques résultats



Quelques résultats



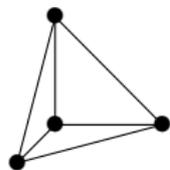
Conclusion

Contribution principale

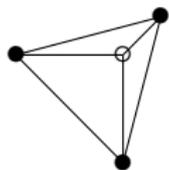
Algorithmes efficaces

- qui donnent des points, adaptés à la géométrie locale
- qui retournent v sur $\Pi = P_v$,
- qui sont aussi utiles sur une surface S
 - ▶ pour une estimation des normales,
 - ▶ pour une reconstruction polygonale.

Fin



[LPR16a]



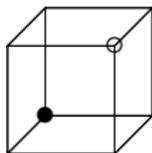
[LPR16b]

[LPR17]

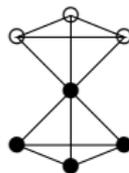
H, R

[RL19]

R1



[LMR20]



[LRC22]

L

[LRLC24]



[soumission]