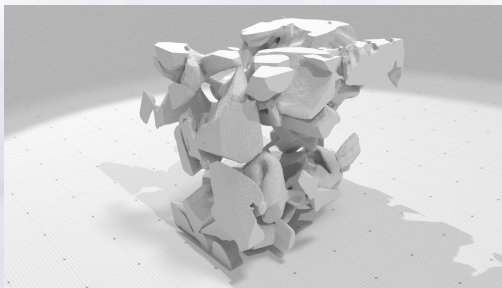


# Algorithmes de type "plane-probing" Analyse sans paramètre des surfaces digitales

Directeurs : David Coeurjolly, Tristan Roussillon  
Doctorante : Jui-Ting Lu

Université de Lyon, INSA Lyon, LIRIS, France

# PARAmeter-free Analysis of Digital Surfaces (PARADIS)



Le projet PARADIS<sup>2</sup> porte sur la géométrie des frontières des volumes 3D, appelées surfaces digitales.

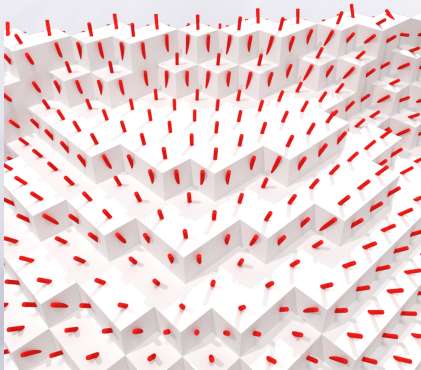
---

1. Données de neige acquises par 3SR Lab et CEN/CNRM - GAME URA 1357/Météo-France - CNRS, projet DigitalSnow

2. PARADIS ANR-18-CE23-0007-01



# Objectif de la thèse



Date de début : 1er janvier 2021.

- ≡ Implémenter les estimateurs de quantités du premier ordre.
- ≡ Étudier la convergence multigrille de ces estimateurs.
- ≡ Les applications.

# Plan

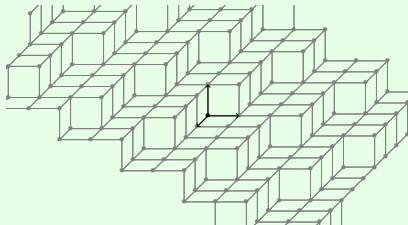
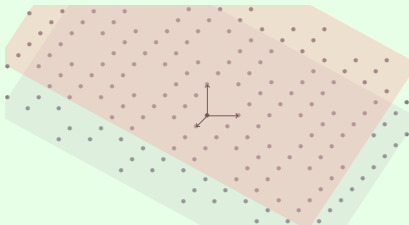
- 1 Introduction
- 2 Différents algorithmes de type "plane-probing"
- 3 Les invariants

# Plan digital

$$P(\mathbf{N}, \mu) = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid \mu \leq x \cdot \mathbf{N} < \mu + \omega\}.$$

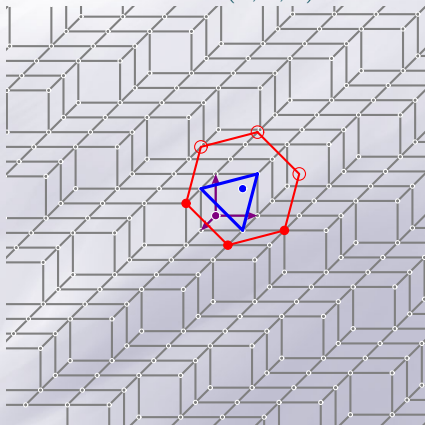
- ≡ vecteur normal  $\mathbf{N}(a, b, c)$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\gcd(a, b, c) = 1$ , on suppose que  $0 < a \leq b$  et on note l'épaisseur  $\omega := \|\mathbf{N}\|_1$ .
- ≡ décalage à l'origine  $\mu \in \mathbb{Z}$ , on suppose  $\mu = 0$ .

## Plan digital de normale (2, 6, 15)



# Plane-probing

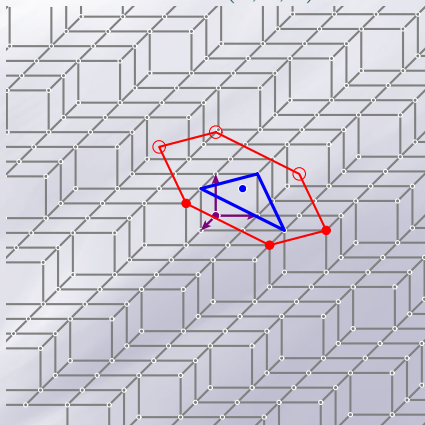
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :  
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$  ?
- ≡ Un voisinage  $\mathcal{N}$ .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison :  $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$ .
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

# Plane-probing

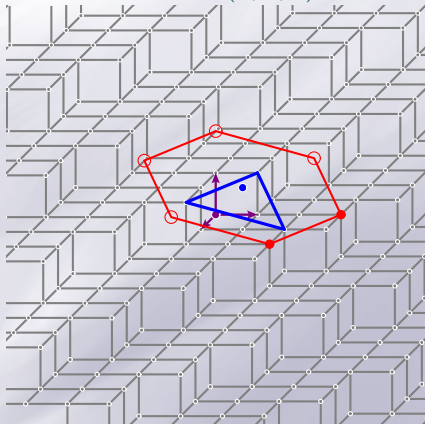
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :  
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$  ?
- ≡ Un voisinage  $\mathcal{N}$ .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison :  $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$ .
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

# Plane-probing

Normale (1, 2, 5)

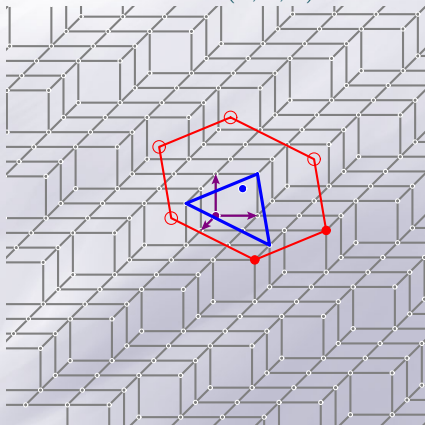


- ≡ Un prédicat **InPlane** :  
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$  ?
- ≡ Un voisinage  $\mathcal{N}$ .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison :  $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$ .
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library



# Plane-probing

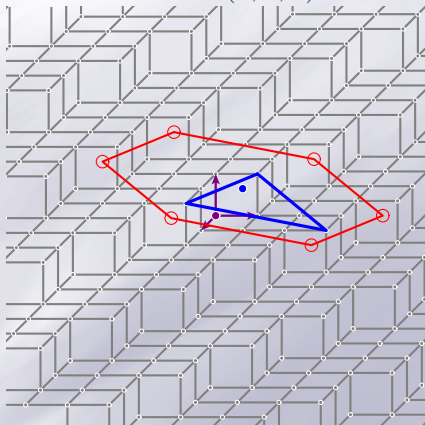
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :  
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$  ?
- ≡ Un voisinage  $\mathcal{N}$ .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison :  $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$ .
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

# Plane-probing

Normale (1, 2, 5)



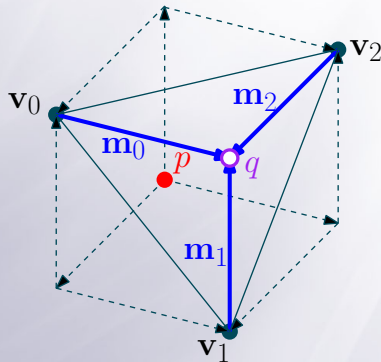
- ≡ Un prédicat **InPlane** :  
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$  ?
- ≡ Un voisinage  $\mathcal{N}$ .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison :  $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$ .
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

# Initialisation

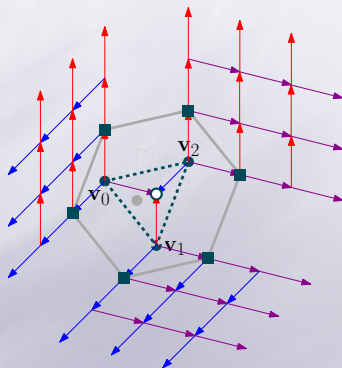
Étant donné un point initial  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ , on a un triangle initial  $\mathbf{T}^{(0)} := (\mathbf{v}_k^{(0)})_{k \in \{0,1,2\}}$  tel que  $(\forall k) \mathbf{v}_k^{(0)} := \mathbf{p} + \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}$ , où  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{Z}^3$ .

$$\mathbf{q} := \mathbf{p} + \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \notin \mathbf{P},$$

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \mathbf{m}_k^{(i)} = \mathbf{q} - \mathbf{v}_k^{(i)}.$$

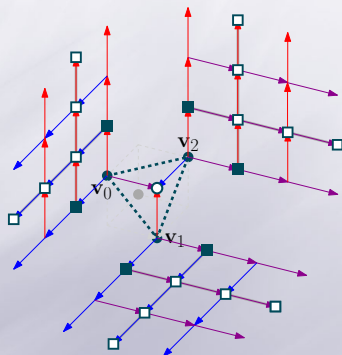


# Algorithme H



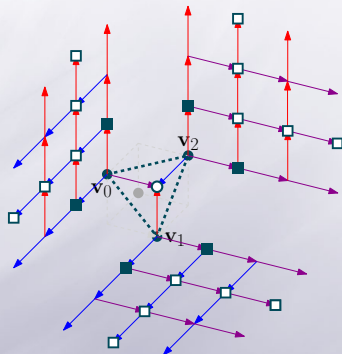
$$\mathcal{N}_H = \left\{ \mathbf{v}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

# Algorithme R/R1



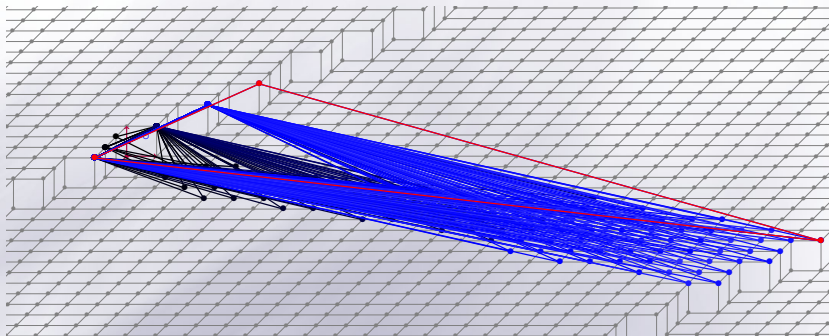
$$\mathcal{N}_R = \left\{ \mathbf{v}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \lambda \mathbf{m}_{k+2}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)} + \lambda \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \mid \lambda \in \mathbb{N}; k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

# Algorithme Rnew



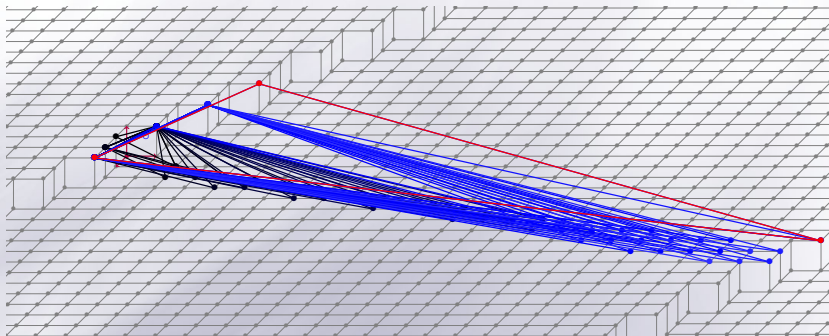
$$\mathcal{N}_{Rnew} = \left\{ \mathbf{v}_k^{(i)} + \alpha \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \beta \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}; k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

# Exemple : Normale (3, 7, 179)



Nombre d'itération :  
 $H > R/R1 > R_{new}$

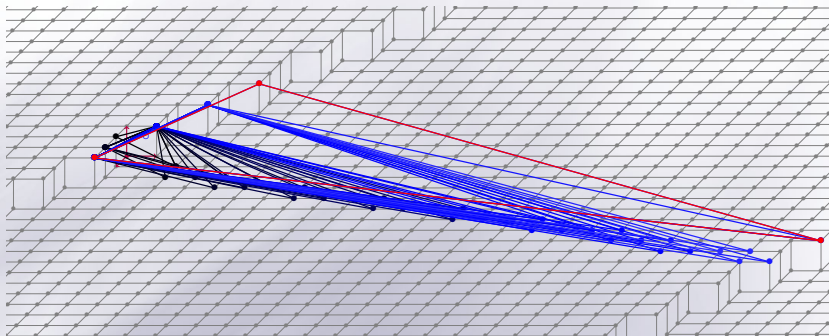
# Exemple : Normale (3, 7, 179)



Nombre d'itération :  
 $H > R/R1 > R_{new}$



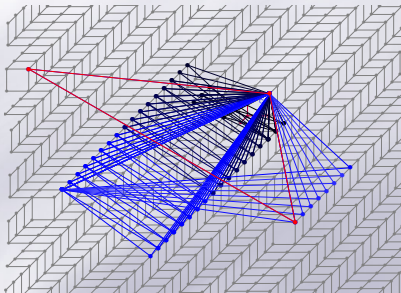
# Exemple : Normale (3, 7, 179)



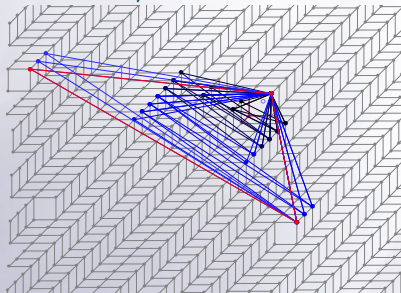
Nombre d'itération :  
 $H > R/R1 > R_{\text{new}}$

# Exemple : Normale (1, 73, 100)

H



R/R1 et Rnew



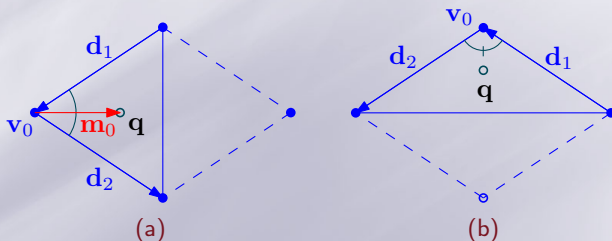
L'algorithme R est plus local que l'algorithme H.

# Propriétés

## Propriétés losanges

Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $k = 0, 1, 2$ ,

$$P_{\diamond_k}^{(i)} := \mathbf{d}_{k+1}^{(i)} \cdot \mathbf{d}_{k+2}^{(i)} \leq 0 \text{ or } \mathbf{q} - \mathbf{m}_k^{(i)} - \mathbf{d}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{d}_{k+2}^{(i)} \notin \mathbf{P}.$$



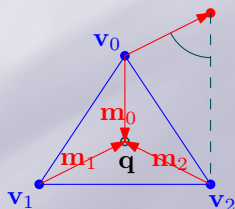
# Propriétés

## Propriétés triangles

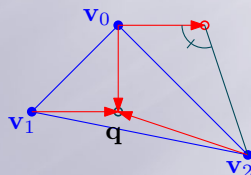
Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $k = 0, 1, 2$ ,

$$P_{\triangleright_k}^{(i)} := \mathbf{q} - \mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} \notin \mathbf{P} \text{ ou } \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} \cdot \left( -\mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \right) \geq 0,$$

$$P_{\triangleleft_k}^{(i)} := \mathbf{q} - \mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \notin \mathbf{P} \text{ ou } \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \cdot \left( -\mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \right) \geq 0.$$



(c)



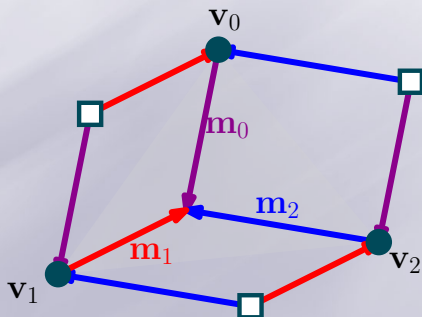
(d)

# Propriétés

## Propriétés Delaunay

Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $k = 0, 1, 2$ , en notant  $S^{(i)}$  la sphere circonscrite qui passe par les sommets des triangles  $\mathbf{T}^{(i)}$  et  $\mathbf{T}^{(i+1)}$ ,

$$P_{\text{DEL}_k}^{(i)} := \mathbf{q} - \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \notin S^{(i)}.$$



# Invariants et algorithmes

Algo.	$P_{\diamond_k}^{(i)}$	$P_{\triangleright_k}^{(i)}, P_{\triangleleft_k}^{(i)}$	$P_{\text{DEL}_k}^{(i)}$
H	x	x	x
R/R1	o	o	x
Rnew	o	o	o

Pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $k = 0, 1, 2$ , les propriétés  $P_{\triangleright_k}^{(i)}$ ,  $P_{\triangleleft_k}^{(i)}$ ,  $P_{\diamond_k}^{(i)}$  et  $P_{\text{DEL}_k}^{(i)}$  sont vraies pour l'algorithme  $R_{\text{new}}$ .

## Preuve

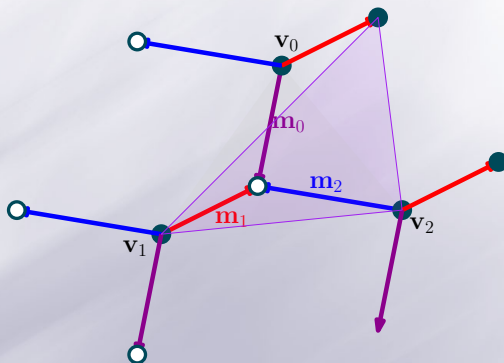
Par récurrence.

## Conditions

	$\mathbf{v}_0^{(i+1)} = \mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_1^{(i)} \in \mathcal{N}_H$	$\mathbf{v}_0^{(i+1)} \notin \mathcal{N}_H$
$\angle 1^{(i+1)}$	$P_{\diamond_1}^{(i)}$	—
$\angle 2^{(i+1)}$	$\mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_2^{(i)} \in \mathbf{P}$	—
$\angle 0^{(i+1)}$	$P_{\triangleright_0}^{(i)}$	$P_{\text{DEL}_0}^{(i)}$

Soit  $n$  la dernière étape et on suppose que 0 est l'indice du sommet mise à jour à l'étape  $n - 1$ . Si  $\mathbf{v}_0^{(n-1)} + \mathbf{m}_1^{(n-1)} \in \mathbf{P}$  et  $\mathbf{v}_0^{(n-1)} + \mathbf{m}_2^{(n-1)} \in \mathbf{P}$  alors  $\mathbf{T}^{(n)}$  est un triangle aigu.

$Card(\mathcal{N}_H \cap \mathbf{P}) = 2$  ou  $3$  et les points de  $\mathcal{N}_H \cap \mathbf{P}$  sont consécutifs autour de  $\mathbf{q}$ .



Si  $\mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_2^{(i)} \notin \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_1^{(i)} \in \mathbf{P}$  et  $\mathbf{v}_2^{(i)} + \mathbf{m}_1^{(i)} \in \mathbf{P}$ , alors  $i + 1 \neq n$  car  $\mathbf{v}_2^{(i+1)} + \mathbf{m}_1^{(i+1)} \in \mathbf{P}$ .



# Base réduite

## Lemme

Soit  $n$  la dernière étape. Le dernier triangle  $\mathbf{T}^{(n)}$  est un **triangle aigu**.

## Définition

Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs du plan digital.  $(u, v)$  forme une **base réduite** si

$$\max(\|u\|, \|v\|) \leq \min(\|u + v\|, \|v - u\|). \quad (1)$$

## Théorème

Les algorithmes R et Rnew donnent une base réduite.

- ≡ On est maintenant capables de montrer que pour R et Rnew :
  - L'angle du sommet mis à jour est toujours aigu.
  - Le dernier triangle  $\mathbf{T}^{(n)}$  est un triangle aigu.
  - Les algorithmes R et Rnew donnent une base réduite.
- ≡ Perspectives à court terme :
  - Comparer R et Rnew en temps et qualité.
  - Étudier le lien entre Rnew et triangulation de Delaunay.