V. Gledel et A. Parreau : Identification de points dans le plan avec des disques

Valentin Gledel, LIRIS, Lyon, valentin.gledel@univ-lyon1.fr
Aline Parreau, LIRIS, Lyon, aline.parreau@univ-lyon1.fr

On dit qu'un ensemble de disques *identifie* un ensemble de points du plan si chaque point appartient à au moins un disque et si, pour chaque paire de points, les ensembles de disques contenant chacun des points sont différents. Ainsi, la simple connaissance des disques contenant un point nous permet de savoir de quel point il s'agit. La figure 1 est un exemple d'identification de points par des disques.

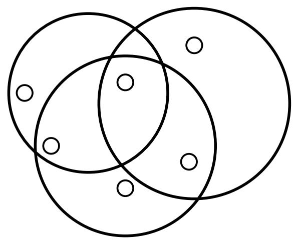

FIGURE 1 – Six points identifiés par trois disques

On peut rapidement observer que chaque ensemble de points possède au moins un ensemble de disques l'identifiant, en effet il suffit d'entourer chaque point par un disque suffisamment petit pour qu'il n'en contienne pas d'autres. Le problème auquel nous allons donc nous intéresser est de chercher le nombre minimum de disques permettant d'identifier un ensemble donné de points du plan.

Ce problème est un problème de codes identifiants. En particulier, si l'on pense aux ensembles de points pouvant être séparés des autres points par un disque comme les hyperarêtes d'un hypergraphe, notre problème devient un sous-problème des tests couvrants ou des codes identifiants dans les hypergraphes.

Nous avons prouvé que $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ est le maximum de disques nécessaires lorsqu'il y a n points. Cette borne est atteinte lorsque les points sont alignés. En position générale, on peut même réduire cette borne haute à $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$. Nous montrons, de plus, que la borne basse pour le nombre de disques nécessaires est $\left\lceil \frac{1+\sqrt{1+4(n-1)}}{2} \right\rceil$ et que cette borne est atteinte. Nous avons résolu le cas des grille $2 \times n$ et nous prouvons que le problème est NP-complet lorsque la taille des disques est fixée.