

# Identification de points dans le plan avec des disques

Valentin Gledel et Aline Parreau

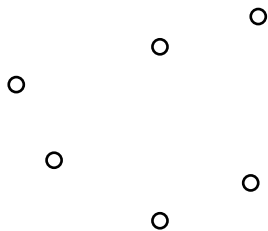
JGA - 18 novembre 2016



# Présentation du problème

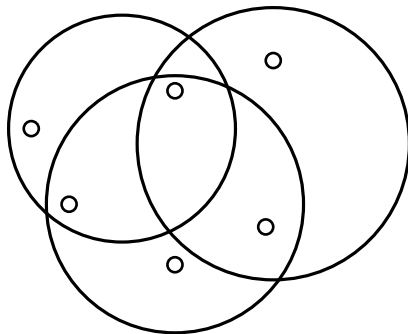
# Des points et des disques...

Des points et des disques...



Des points et des disques...

Des points et des disques...



# Un peu plus formellement

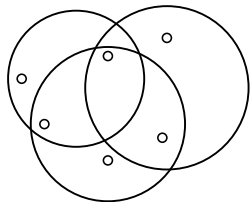
## Donnée du problème

$\mathcal{P}$  un ensemble de points du plan

## Résultat souhaité

$\mathcal{D}$  un ensemble de disques fermés vérifiant :

- Chaque point de  $\mathcal{P}$  doit appartenir à au moins un disque de  $\mathcal{D}$ . (Domination)
- Deux points de  $\mathcal{P}$  doivent appartenir à des sous-ensembles différents de  $\mathcal{D}$ . (Séparation)



$\gamma_D^{ID}(\mathcal{P})$  : Nombre minimum de disques nécessaires pour identifier  $\mathcal{P}$ .

# Un peu plus formellement

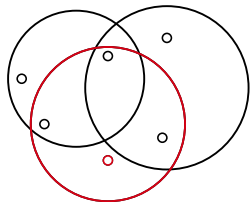
## Donnée du problème

$\mathcal{P}$  un ensemble de points du plan

## Résultat souhaité

$\mathcal{D}$  un ensemble de disques fermés vérifiant :

- Chaque point de  $\mathcal{P}$  doit appartenir à au moins un disque de  $\mathcal{D}$ . (Domination)
- Deux points de  $\mathcal{P}$  doivent appartenir à des sous-ensembles différents de  $\mathcal{D}$ . (Séparation)



$\gamma_D^{ID}(\mathcal{P})$  : Nombre minimum de disques nécessaires pour identifier  $\mathcal{P}$ .

# Un peu plus formellement

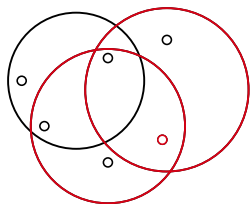
## Donnée du problème

$\mathcal{P}$  un ensemble de points du plan

## Résultat souhaité

$\mathcal{D}$  un ensemble de disques fermés vérifiant :

- Chaque point de  $\mathcal{P}$  doit appartenir à au moins un disque de  $\mathcal{D}$ . (Domination)
- Deux points de  $\mathcal{P}$  doivent appartenir à des sous-ensembles différents de  $\mathcal{D}$ . (Séparation)



$\gamma_D^{ID}(\mathcal{P})$  : Nombre minimum de disques nécessaires pour identifier  $\mathcal{P}$ .

# Problèmes liés

- Séparer des points par des disques (Gebner et Toth, 2012)
- Code identifiant dans un hypergraphe (Moncel, 2005)
- Code identifiant dans un graphe (Karpovsky, Chakrabarty et Levitin, 1998)
  - ▶ Graphe disque unitaire (Müller et Sereni, 2009)
  - ▶ Graphe intervalle unitaire (Foucaud, Mertzios, Naserasr, Parreau et Valicov, 2015).
- Séparer des points par des lignes parallèles aux axes (Calinescu, Dumitrescu, Karloff et Wan, 2005)



# Plan

## Quelques cas particuliers

- Les points sont tous alignés

- Les points sont disposés dans une grille

## Cas extrémaux

- Borne basse

- Borne haute

- Borne haute en position générale

## Complexité dans le cas où le rayon est fixé

- Cas général

- Les points sont alignés

# Quelques cas particuliers

## Les points sont tous alignés

### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points alignés,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .

Les disques doivent passer par  $n + 1$  zones sur une même ligne pour passer entre chaque point et entourer tous les points.



# Les points sont tous alignés

## Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points alignés,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .

Les disques doivent passer par  $n + 1$  zones sur une même ligne pour passer entre chaque point et entourer tous les points.

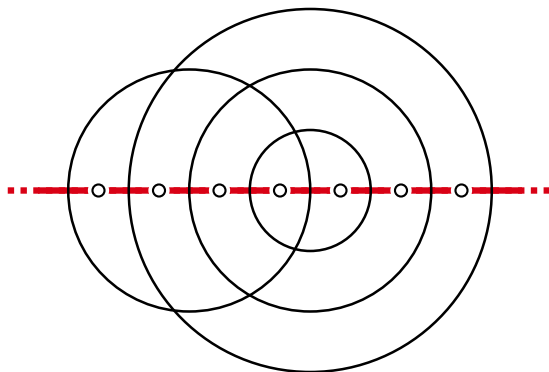


# Les points sont tous alignés

## Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points alignés,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .

Les disques doivent passer par  $n + 1$  zones sur une même ligne pour passer entre chaque point et entourer tous les points.

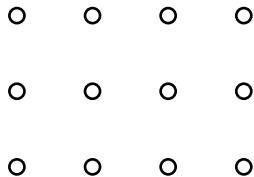


## Grille $n \times m$ et demi-plans

$\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P})$  : Nombre minimum de demi-plans pour identifier  $\mathcal{P}$ .

### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de points disposés dans une grille de taille  $n \times m$ ,  $\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P}) = m + n - 2$ .

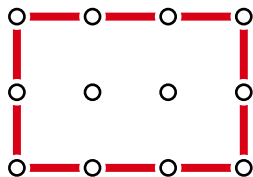


## Grille $n \times m$ et demi-plans

$\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P})$  : Nombre minimum de demi-plans pour identifier  $\mathcal{P}$ .

### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de points disposés dans une grille de taille  $n \times m$ ,  $\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P}) = m + n - 2$ .



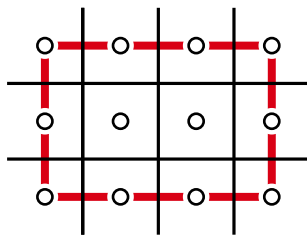
$2(m + n - 2)$  zones

## Grille $n \times m$ et demi-plans

$\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P})$  : Nombre minimum de demi-plans pour identifier  $\mathcal{P}$ .

### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de points disposés dans une grille de taille  $n \times m$ ,  $\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P}) = m + n - 2$ .

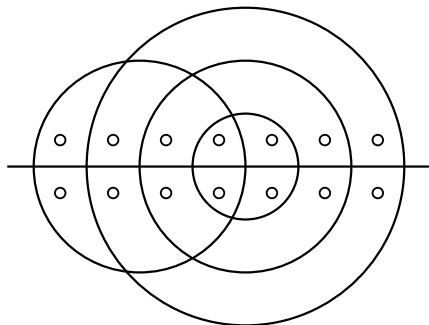


$2(m + n - 2)$  zones



## Grille de largeur 2

Un découpage rapide est le suivant :



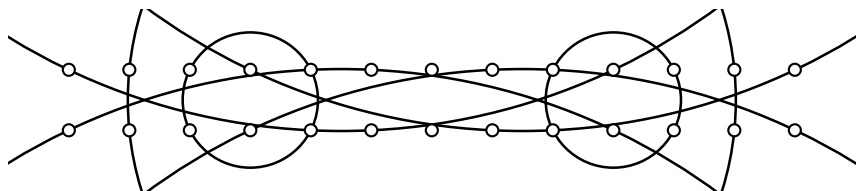
### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de points disposés dans une grille de taille  $n \times 2$ ,  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leq \gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$ .

# Résultat final

## Théorème

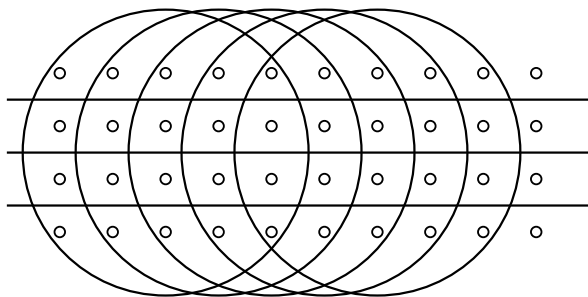
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de points disposés dans une grille de taille  $n \times 2$  avec  $n = 6$  ou  $n \geq 8$ ,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



Grille  $n \times m$  avec  $n \gg m$

Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de points disposés dans une grille de taille  $n \times m$  avec  $n > \frac{m^2 - 2m - 3}{2}$  alors  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq m - 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .



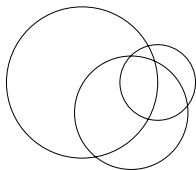
# Cas extrêmes

# Borne basse théorique

## Théorème

En plaçant  $k$  disques dans le plan, on obtient au plus  $k^2 - k + 1$  zones.

En ajoutant un disque à  $k$  autres disques, on crée au plus  $2k$  zones.

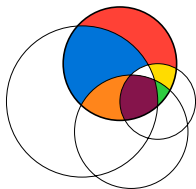


# Borne basse théorique

## Théorème

En plaçant  $k$  disques dans le plan, on obtient au plus  $k^2 - k + 1$  zones.

En ajoutant un disque à  $k$  autres disques, on crée au plus  $2k$  zones.

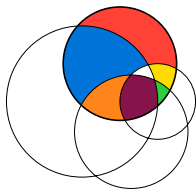


# Borne basse théorique

## Théorème

En plaçant  $k$  disques dans le plan, on obtient au plus  $k^2 - k + 1$  zones.

En ajoutant un disque à  $k$  autres disques, on crée au plus  $2k$  zones.

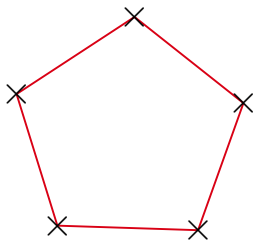


## Corollaire

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan

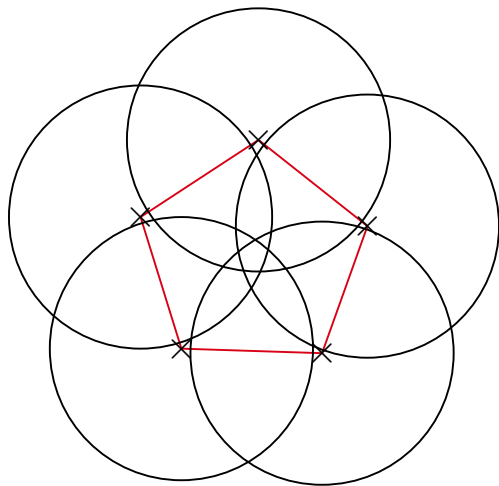
$$\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)}}{2} \right\rceil \sim \sqrt{n}.$$

## Une borne atteinte

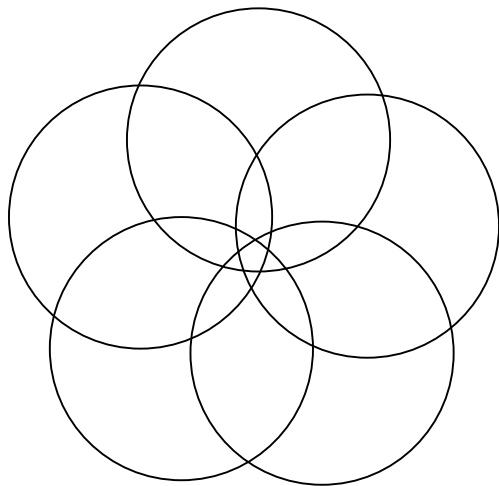




## Une borne atteinte



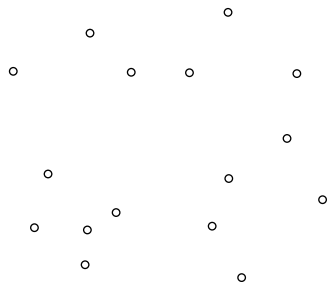
## Une borne atteinte



# Borne haute

## Théorème

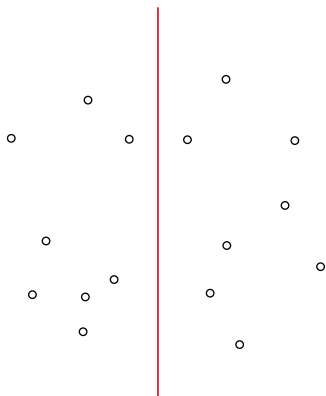
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

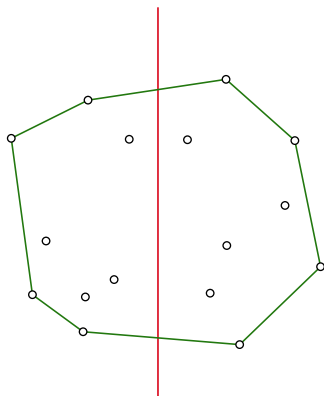
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

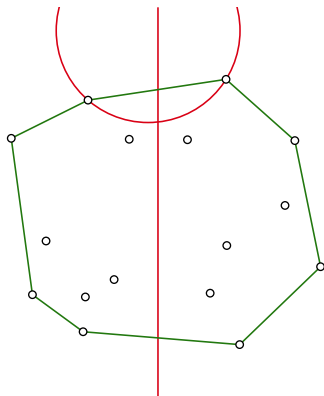
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

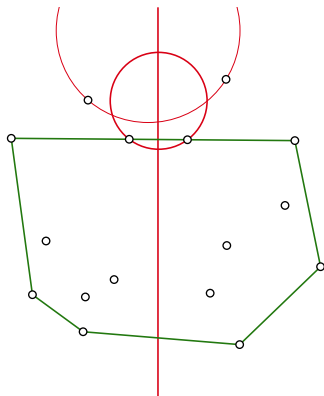
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

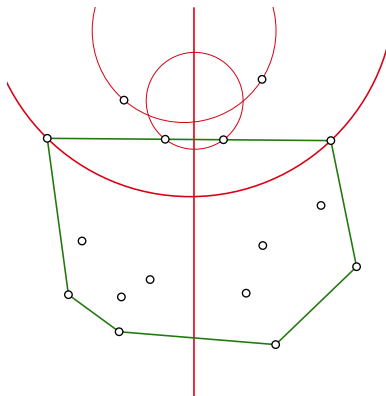
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .

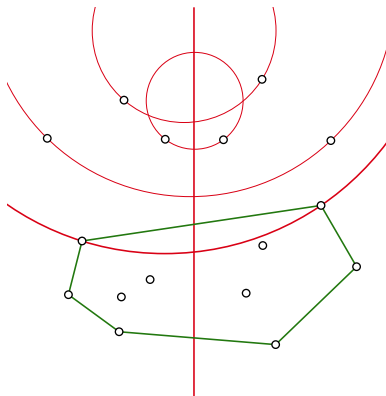




# Borne haute

## Théorème

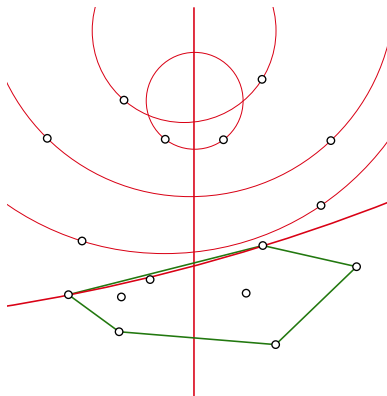
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

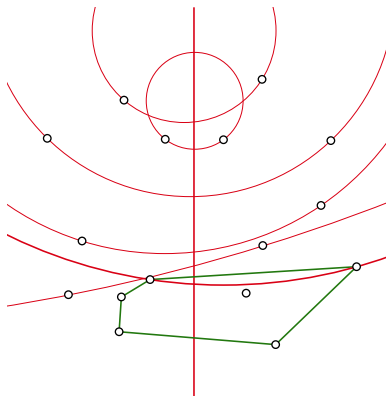
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

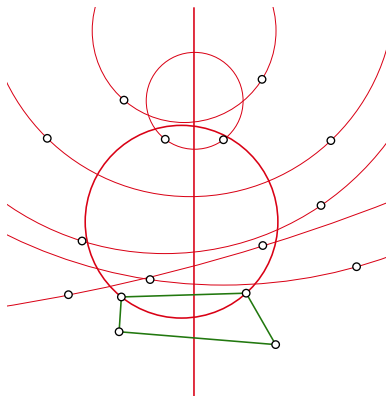
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

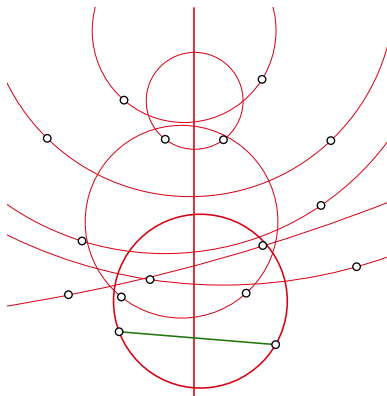
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



# Borne haute

## Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points du plan,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .



## Borne haute en position générale

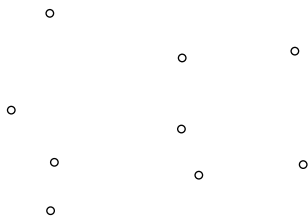
La borne haute précédente est atteinte dans les cas où tous les points sont alignés ou cocycliques.

### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points tels qu'il n'y a jamais 3 points alignés ou 4 points cocycliques,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$ .

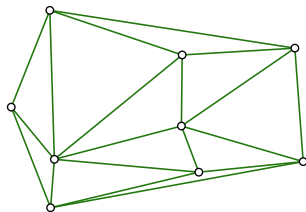
# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.



# Principe

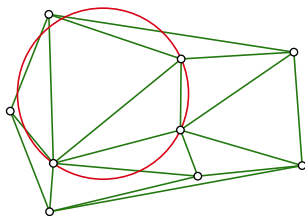
Utilisation de la triangulation de Delaunay.





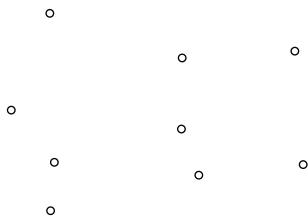
# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.



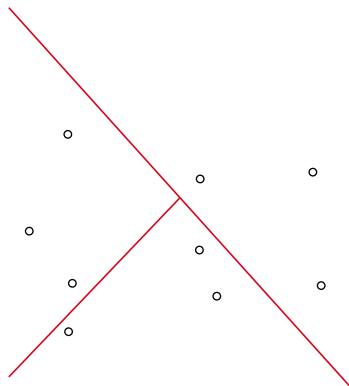
# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.



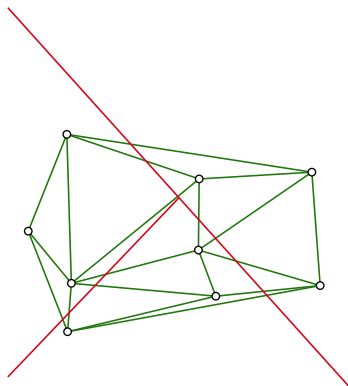
# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.



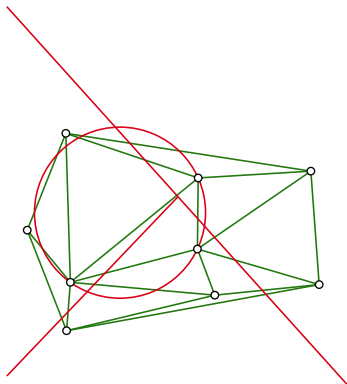
# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.



# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.

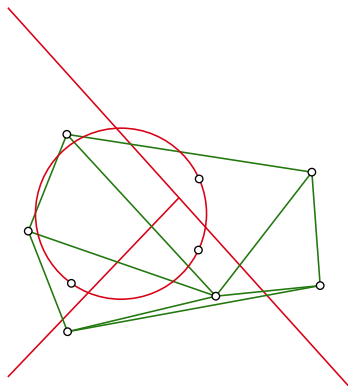


## Remarque

Pour que cette méthode fonctionne, on doit toujours être en mesure de trouver un triangle dont les sommets sont dans les trois différentes zones.

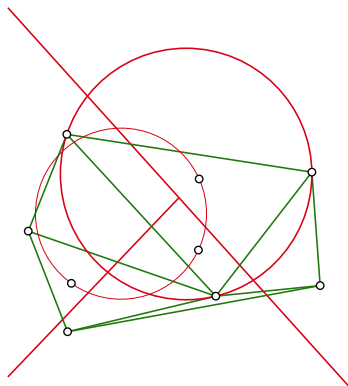
# Principe

Utilisation de la triangulation de Delaunay.



# Principe

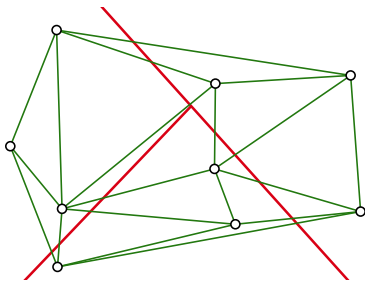
Utilisation de la triangulation de Delaunay.



# Première partie de la solution

## Théorème

Si l'intersection de la droite et de la demi-droite est dans l'enveloppe convexe des points alors il y a au moins un triangle dont les sommets appartiennent aux trois zones.

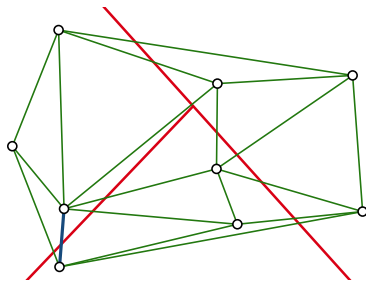




# Première partie de la solution

## Théorème

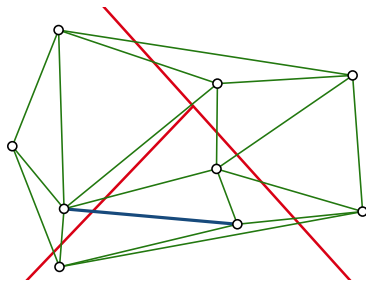
Si l'intersection de la droite et de la demi-droite est dans l'enveloppe convexe des points alors il y a au moins un triangle dont les sommets appartiennent aux trois zones.



# Première partie de la solution

## Théorème

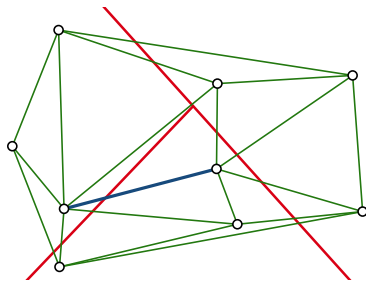
Si l'intersection de la droite et de la demi-droite est dans l'enveloppe convexe des points alors il y a au moins un triangle dont les sommets appartiennent aux trois zones.



# Première partie de la solution

## Théorème

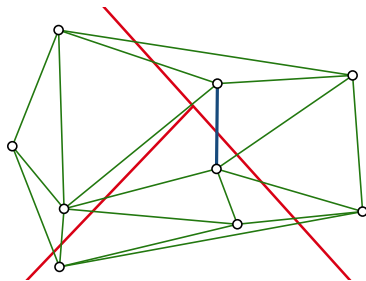
Si l'intersection de la droite et de la demi-droite est dans l'enveloppe convexe des points alors il y a au moins un triangle dont les sommets appartiennent aux trois zones.



# Première partie de la solution

## Théorème

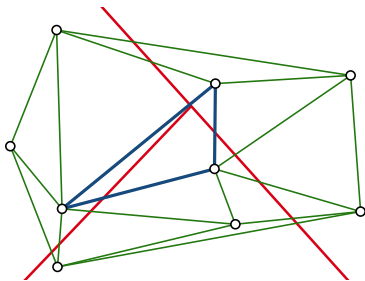
Si l'intersection de la droite et de la demi-droite est dans l'enveloppe convexe des points alors il y a au moins un triangle dont les sommets appartiennent aux trois zones.



# Première partie de la solution

## Théorème

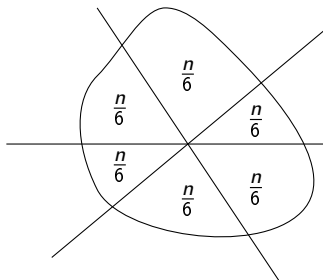
Si l'intersection de la droite et de la demi-droite est dans l'enveloppe convexe des points alors il y a au moins un triangle dont les sommets appartiennent aux trois zones.



## Deuxième partie de la solution

Théorème (J. G. Ceder, 1964)

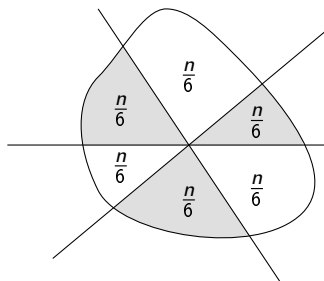
Pour  $n$  points non 3 à 3 alignés, il est possible de diviser le plan en six zones contenant chacune entre  $\frac{n}{6} - 1$  et  $\frac{n}{6}$  points à l'aide de trois droites concourantes.



## Deuxième partie de la solution

Théorème (J. G. Ceder, 1964)

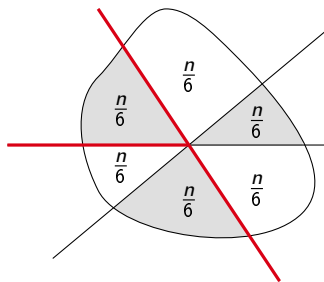
Pour  $n$  points non 3 à 3 alignés, il est possible de diviser le plan en six zones contenant chacune entre  $\frac{n}{6} - 1$  et  $\frac{n}{6}$  points à l'aide de trois droites concourantes.



## Deuxième partie de la solution

Théorème (J. G. Ceder, 1964)

Pour  $n$  points non 3 à 3 alignés, il est possible de diviser le plan en six zones contenant chacune entre  $\frac{n}{6} - 1$  et  $\frac{n}{6}$  points à l'aide de trois droites concourantes.

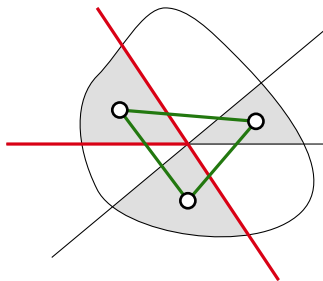




## Deuxième partie de la solution

Théorème (J. G. Ceder, 1964)

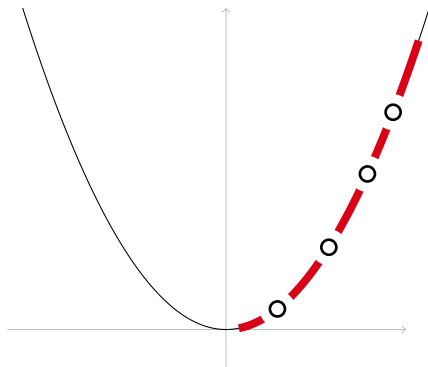
Pour  $n$  points non 3 à 3 alignés, il est possible de diviser le plan en six zones contenant chacune entre  $\frac{n}{6} - 1$  et  $\frac{n}{6}$  points à l'aide de trois droites concourantes.



## Cas où la borne est atteinte

### Théorème

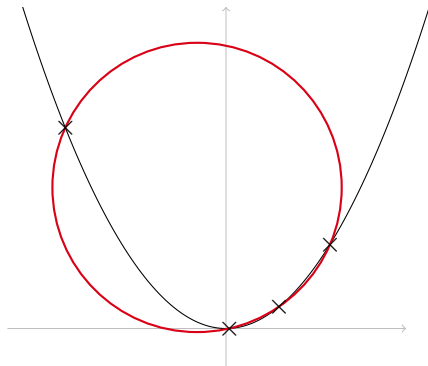
Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points disposés du même côté de l'axe de symétrie d'une parabole,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \geq \frac{n}{3}$ .



## Cas où la borne est atteinte

### Théorème

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de  $n$  points disposés du même côté de l'axe de symétrie d'une parabole,  $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \geq \frac{n}{3}$ .



Complexité dans le cas où le  
rayon est fixé

## Cas général

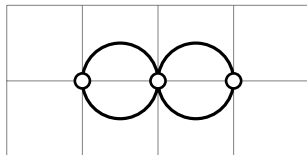
### Théorème

Le problème suivant est NP-complet :

**Instance** : Un ensemble  $\mathcal{P}$  de point de  $\mathbb{Z}^2$  et un nombre  $k \in \mathbb{N}$ .

**Question** : Peut-on identifier tous les points de  $\mathcal{P}$  avec  $k$  disques de rayon 1 ?

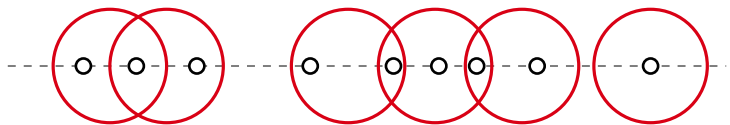
On réduit notre problème à  $P_3$ -partition dans un graphe de grille qui est NP-complet. Les  $P_3$  sont remplacés par la structure suivante :



Les points sont alignés



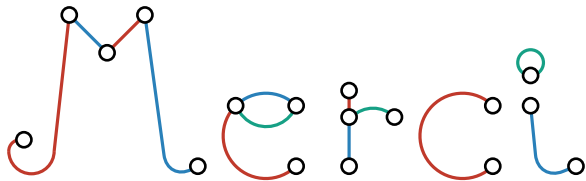
Les points sont alignés



# Perspectives

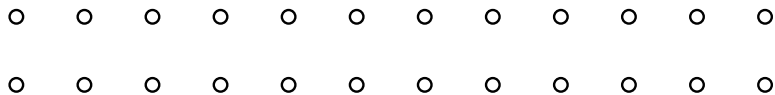


- Complexité
  - ▶ Cas où les centres sont fixés
  - ▶ Cas sans contraintes
  - ▶ Cas où l'on n'utilise que des droites
- Amélioration des résultats obtenus (grille)
- Disposition aléatoire des points
- Validité des résultats pour d'autres formes ou des dimensions supérieures

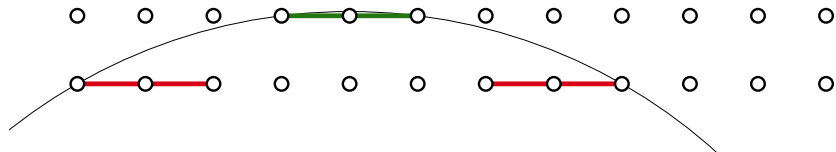


Annexe 1 : Grille  $n \times 2$

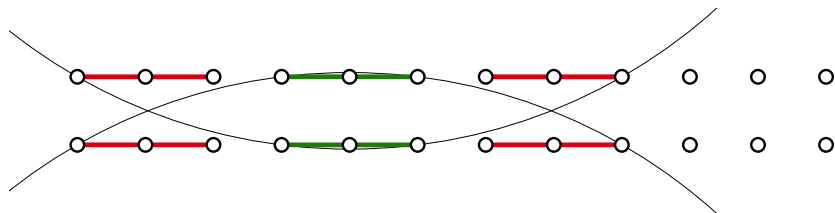
## Idée de base



## Idée de base



## Idée de base



Sur une seule ligne



Sur une seule ligne





Sur une seule ligne



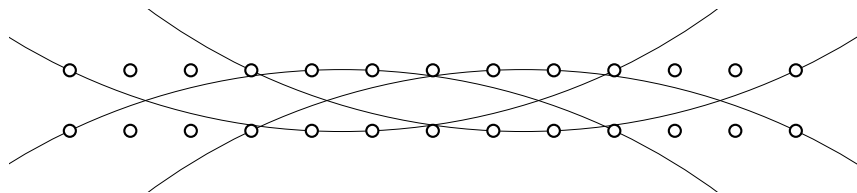
Sur une seule ligne



Sur une seule ligne

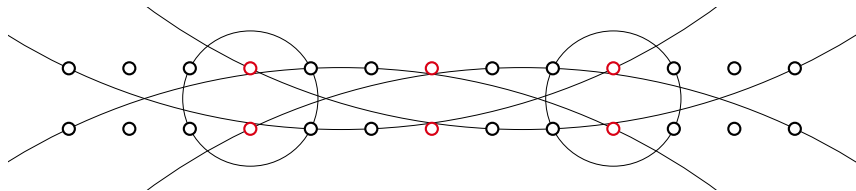


# Résultat final

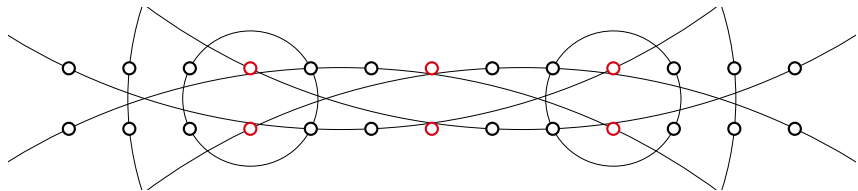




## Résultat final



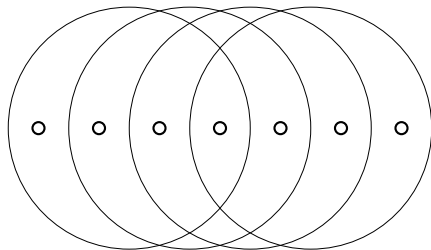
# Résultat final



Annexe 2 : Grille  $n \times m$  avec  $n \gg m$

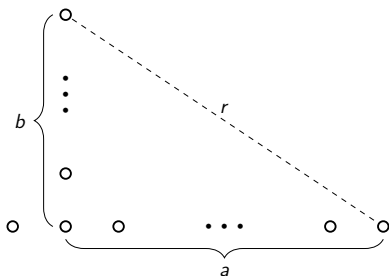


## Sur une ligne



Les disques sont de diamètre  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

## Condition de faisabilité



$$a = \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

$$b = \frac{m-1}{2}$$

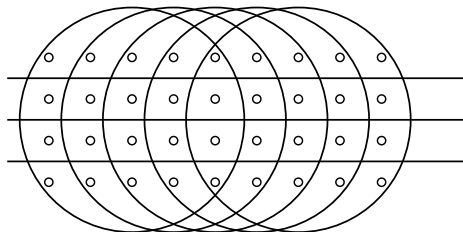
$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$r < a + 1$$

# Résultat

La simplification des équations précédentes nous donne

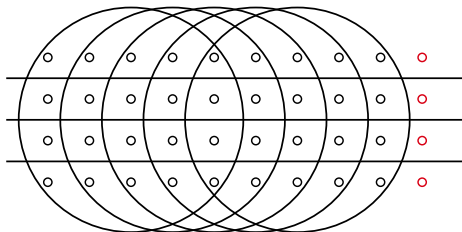
$$n > \frac{m^2 - 2m - 1}{2}$$



# Résultat

La simplification des équations précédentes nous donne

$$n > \frac{m^2 - 2m - 1}{2}$$

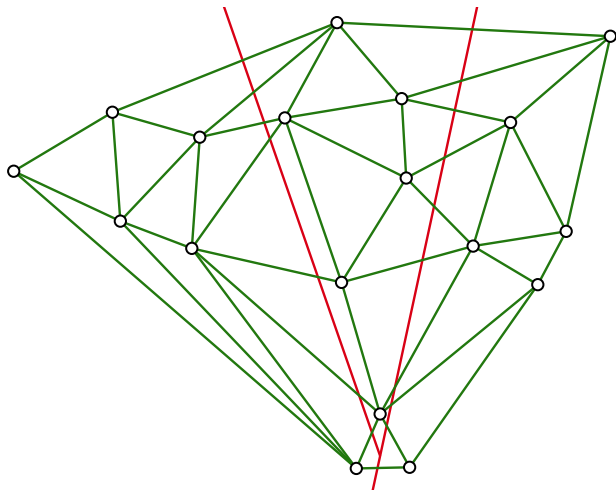


On peut rajouter des points tout en conservant l'identification.

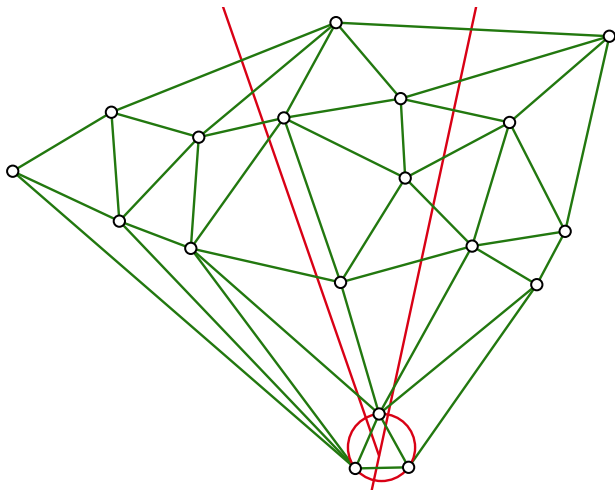
$$\text{Donc } n > \frac{m^2 - 2m - 3}{2}.$$

Annexe 3 : Exemple de disposition  
pour laquelle l'algorithme en position  
générale est nécessaire

## Déroulement de l'exemple



## Déroulement de l'exemple



## Déroulement de l'exemple

