Exercice 1 : Problèmes de décision, d'optimisation

Parmi les exercices suivant, dire lesquels sont des problèmes de décision, lesquels sont des problèmes d'optimisation et lesquels ne rentrent dans aucune de ces deux catégories. Pour les problèmes d'optimisation, donner le problème de décision associé.

PLUS COURT CHEMIN
Instance: Un graphe $G = (V, E)$ avec une fonction de poids sur les arêtes et deux sommets u et v de V
Question: Quelle est la longueur d'un plus court chemin de u à v ?

CHEMIN HAMILTONIEN
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Existe-t-il un chemin passant par tous les sommets de G une et une seule fois ?

FLOT MAX
Instance: Un graphe orienté $D = (V, A)$ muni d'une source s, d'un puit t et d'une fonction de capacité sur les arcs c
Question: Quelle est la valeur d'un flot maximal de D ?

FACTORISATION
Instance: Un entier n qui n'est pas premier
Question: Donner un facteur de n distinct de 1 et n.

COL
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Quel est le nombre de couleur minimum pour colorer G proprement ?

k-COL
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Existe-t-il une coloration propre de G utilisant k couleurs ou moins ?

CLIQUE ENUM
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Donner toutes les cliques de tailles maximales de G

Exercice 2 : La classe NP

Prouver que les problèmes suivants appartiennent à la classe NP :

COUVERTURE PAR SOMMETS
Instance: Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k
Question: Existe-t-il un sous-ensemble de V de taille k $\{v_1, ..., v_k\}$ tel que toute arrête de E soit incidente à un sommet v_i ?

Chemin Hamiltonien
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Existe-t-il un chemin passant par tous les sommets de G une et une seule fois ?

Isomorphisme
Instance: Deux graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$
Question: Les graphes G et H sont-ils isomorphes ?

Non Premier
Instance: Un entier n
Question: Est-il vrai que n n'est **pas** premier ?

Exercice 3 : NP-complétude de 4-SAT

Prouver que le problème 4-SAT (SAT avec des clauses de taille 4) est NP-complet. Vous pouvez utiliser le fait que 3-SAT est NP-complet pour obtenir ce résultat.

Exercice 4 : NP-complétude de Set Cover

Étant donné un ensemble E et un ensemble $S = \{S_1, ..., S_m\} \subset \mathcal{P}(E)$ de sous-ensembles de E, un *ensemble couvrant* $C = \{c_1, ..., c_k\}$ de (E, S) est un sous-ensemble de E tel que pour tout $i \in \{1, ..., m\}$ il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $c_j \in S_i$. Le problème Set Cover est le suivant :

Set Cover
Instance: Un ensemble d'éléments E, un ensemble S de sous-ensembles de E et un entier k
Question: Existe-t-il un ensemble couvrant de (E, S) de cardinal au plus k ?

Prouver que le problème Set Cover est NP-complet en utilisant une réduction depuis le problème 3-SAT. Indice : Si S contient un ensemble de cardinal 2 alors tout ensemble couvrant doit contenir au moins un des deux éléments de cet ensemble.