Graphes et Complexité

INFO4 Polytech Grenoble

Examen
6 janvier 2020

À lire attentivement avant de commencer le sujet :
— Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. Vous pouvez énoncer des résultats du cours sans les démontrer.
— Aucun document n'est autorisé à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.
— Les appareils électroniques sont interdits.
— Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.
— Le document est composé de trois pages.
— Le barème sur 23 points est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements. Il suffit de 20 points pour avoir la note maximale.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

Répondre aux questions suivantes en justifiant si possible.

1. Donner une instance satisfiable et une instance non-satisfiable du problème SAT
2. Vrai ou Faux : Il est possible qu'un problème de P soit dans NP.
3. Vrai ou Faux : Tout problème NP-difficile est NP-complet.
4. Vrai ou Faux : Si tous les algorithmes pour résoudre un problème ont une complexité exponentielle alors ce problème est NP-complet.
5. Vrai ou Faux : Il existe des graphes dont le nombre de coloration est égal au nombre de sommets.
6. Vrai ou Faux : Un graphe biparti a nécessairement un nombre pair de sommets.
7. Vrai ou Faux : Un algorithme de complexité $O(2^{\log(n)})$ est polynomial.
8. Donner le problème de décision associé au problème suivant :

   COUPLAGE MAX
   Instance: Un graphe $G = (V, E)$
   Question: Quelle est la taille d'un couplage maximum sur G ?

Exercice 2 : NP-complétude de 4-SAT (3points)

Le problème 4-SAT est le suivant :

4-SAT
Instance: Un ensemble de variables booléennes $\{x_1, ..., x_n\}$ et un ensemble de clause de taille exactement 4 sur ces variables $\{C_1, ..., C_m\}$
Question: La formule $C_1 \wedge ... \wedge C_m$ est-elle satisfiable ?

Prouver que ce problème est NP-complet. On pourra notamment utiliser une réduction depuis 3-SAT que l'on sait NP-complet.

Exercice 3 : Colonie de vacances (5 points)

Vous devez organiser une colonie de vacances partant de Strasbourg et à destination de Toulouse. Pour des raisons financières, vous avez décidé de transporter les 30 enfants sous votre responsabilité par bus. Hélas, ayant commencé l'organisation de ce voyage un peu tardivement, il n'y a plus de bus direct entre Strasbourg et Toulouse, il faudra donc faire des changements dans certaines villes. De plus, il ne reste que peu de places sur l'ensemble du réseau. Le tableau suivant résume le nombre de places restantes pour les différents bus :

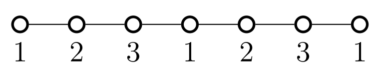
Départ \ Arrivée	Paris	Lyon	Montpellier	Bordeaux	Genève	Toulouse
Strasbourg	15	9	×	×	8	×
Paris	×	11	3	×	×	×
Lyon	×	×	9	6	×	6
Montpellier	×	×	×	×	×	16
Bordeaux	×	×	4	×	×	9
Genève	×	×	×	9	×	×

L'objectif est de savoir s'il est possible de transporter tous les enfants de Strasbourg jusqu'à Toulouse par bus sans louer de minivans pour certaines parties du trajet.

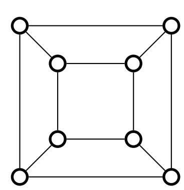
1. Modéliser ce problème comme un problème de graphe et donner le graphe associé.
2. Résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme vu dans le cours. En donner le nom et détailler les étapes.

Exercice 4 : Coloration à distance 2 (6 points)

On définit la coloration à distance 2 d'un graphe comme une coloration d'un graphe telle que chaque sommet a une couleur différente de celle de ses voisins et des voisins de ses voisins (sauf soi-même). On note $\chi_2(G)$ le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G à distance 2. La figure suivante donne une coloration à distance 2 du chemin sur sept sommets P_7.



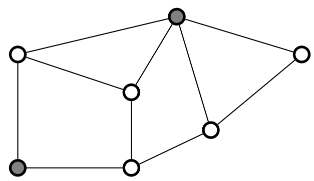
1. Montrer que tout graphe admet une coloration à distance 2.
2. Donner une coloration à distance 2 du graphe suivant en utilisant 4 couleurs :



3. Donner un ensemble infini de graphes connexes tels que $\chi_2(G) = \chi(G)$.
4. Donner un algorithme permettant de colorer un graphe à distance 2 en utilisant au plus $\Delta(G)^2 + 1$ couleurs, où $\Delta(G)$ est le degré maximal du graphe.
5. Montrer que la différence entre $\chi(G)$ et $\chi_2(G)$ peut être arbitrairement grande en donnant pour tout k un graphe G_k tel que $\chi(G_k) = 2$ et $\chi_2(G_k) = 2k$.

Exercice 5 : Complexité du problème de domination dans les graphes. (5 points)

Un ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble S de V tel que tout sommet u de V est soit un élément de S soit voisin d'un élément de S. Ainsi, les sommets gris du graphe suivant forment un ensemble dominant, en effet, tous les sommets sont soit gris soit voisin d'un sommet gris :



Le problème de DOMINATION est le suivant :

DOMINATION
Instance: Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k
Question: Le graphe G admet-il un ensemble dominant de taille k ?

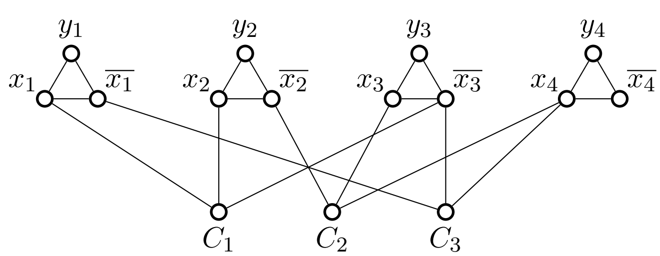
1. Montrer que ce problème est dans NP.

Pour montrer que ce problème est NP-complet nous effectuons une réduction depuis le problème 3-SAT. La réduction est la suivante :

Soit $x_1, ..., x_n$, $C_1, ..., C_m$ une instance de 3-SAT. Nous allons construire un graphe qui admet un ensemble dominant de taille n (qui sera donc l'entier choisi d'un l'instance de DOMINATION) si et seulement si cette instance de 3-SAT est satisfiable.

— Pour chaque variable x_i on crée trois sommets x_i, $\overline{x_i}$ et y_i et les arêtes $x_i\overline{x_i}$, x_iy_i et $\overline{x_i}y_i$.
— Pour chaque clause C_j on crée un sommet C_j.
— Si une clause C_j contient un littéral positif x_i alors on relie le sommet x_i au sommet C_j. Si au contraire, la clause C_j contient le littéral $\overline{x_i}$, alors on relie le sommet $\overline{x_i}$ au sommet C_j.

La figure ci-dessous donne un exemple de la réduction pour la formule $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$:



2. Montrer que les ensembles dominants des graphes obtenus par la réduction sont toujours de taille au moins n.
3. Montrer que si une instance de 3-SAT est satisfiable alors l'instance de DOMINATION associée contient un ensemble dominant de taille n.
4. Terminer la preuve et montrer que la réduction permet bien de prouver que DOMINATION est NP-complet.