Graphes et Complexité

INFO4 Polytech Grenoble

Contrôle continu
21 octobre 2019

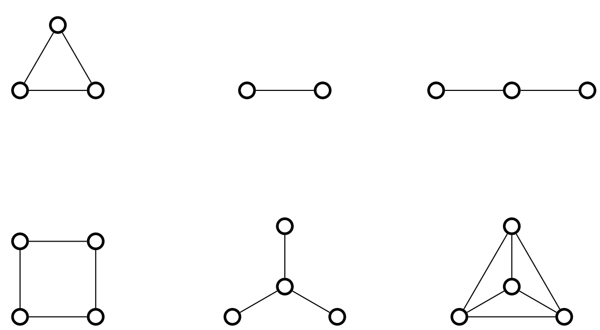
À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. Vous pouvez énoncer des résultats du cours sans les démontrer.
— Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.
— Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.
— Les appareils électroniques sont interdits.
— Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.
— Le document est composé d'une page recto-verso d'énoncé et d'une page recto-verso d'annexes à rendre avec votre copie.

Exercice 1 : Vrai ou faux (3 points)
Dire si les affirmations suivantes sont vraie ou fausse :

1. Un graphe complet a toujours $\frac{n(n+1)}{2}$ arêtes.
2. Si un graphe G est connexe et que retirer n'importe quelle arête de G le déconnecte, alors G est un arbre.
3. Il n'existe pas de graphe dont la séquence de degré est $(5, 4, 4, 4, 4, 1)$.
4. Un graphe est eulérien s'il admet une chaîne eulérienne.
5. Un sous-graphe induit d'un graphe connexe est nécessairement connexe.
6. Le nombre chromatique d'un cycle est toujours 2.

Exercice 2 : Classes de graphes (3 points)
Parmi les 6 graphes suivants, dire lesquels sont des cycles, des chemins, complets, bipartis, des arbres (répondre sur l'annexe A) :



Exercice 3 : Collier Hamiltonnien (3 points)

On dispose de 15 perles numérotées de 1 à 15. On veut construire un collier qui respecte la curieuse règle suivante :

La somme des numéros de deux perles adjacentes sur le collier doit toujours être un carré parfait.

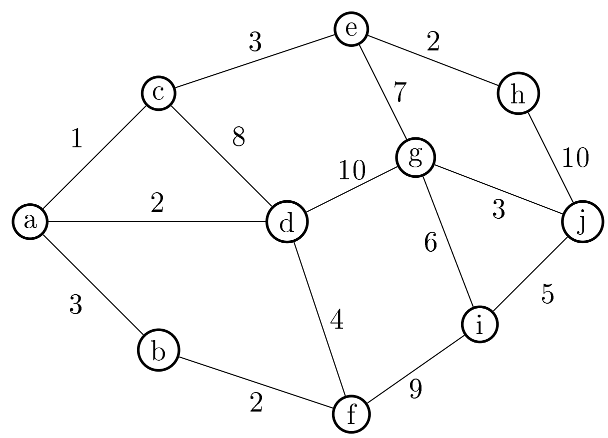
On considère que le collier est ouvert, c'est-à-dire que les deux perles situées aux deux extrémités du collier ne sont pas adjacentes. La somme de leurs numéros ne doit donc pas nécessairement être un carré parfait.

On rappelle que les carrés parfaits sont les nombres 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25...

1. Modéliser le problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les perles.
2. En déduire que l'on peut construire un collier qui respecte cette règle.

Exercice 4 : Arbre couvrant de poids minimal (4 points)

Dessiner sur l'annexe B un arbre couvrant de poids minimal. Donner son poids. Justifiez votre réponse en détaillant les étapes d'un algorithme vu dans le cours.



Exercice 5 : Matrice d'adjacence <u>et</u> d'incidence (3 points)

1. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur une matrice M pour qu'elle soit à la fois la matrice d'adjacence d'un graphe simple et la matrice d'incidence d'un graphe simple (éventuellement différent du premier).
2. Prouver que si une matrice M, de dimensions 5×5, est à la fois une matrice d'incidence et une matrice d'adjacence alors les graphes simples représentés par ces deux interprétations de M sont isomorphes.

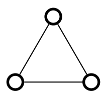
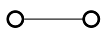
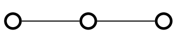
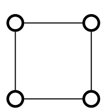
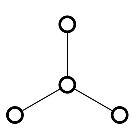
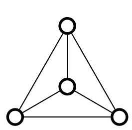
Exercice 6 : Séquence de degrés et sommets de degré 2 (4 points)

1. Soit $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}^*$, k entiers positifs. Prouver qu'il existe un arbre dont la séquence de degrés est $(d_1, \ldots, d_k, 2)$ si et seulement si il existe un arbre dont la séquence de degrés est $(d_1, \ldots, d_k)$.
2. En déduire le nombre d'arbres (à isomorphismes près) dont la séquence de degrés est $(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.
3. Prouver que le résultat de la question 1 n'est pas vrai dans le cas général en donnant un graphe simple dont la séquence des degrés est de la forme $(d_1, \ldots, d_k, 2)$ et tel qu'il n'existe pas de graphe simple dont la séquence des degrés est $(d_1, \ldots, d_k)$.

NOM :

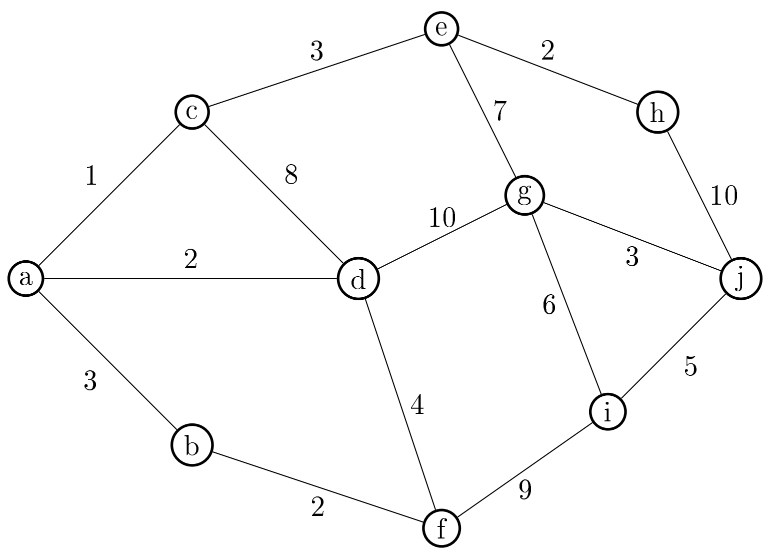
Annexe A : Exercice 2

Remplir le tableau suivant en mettant des croix dans les cases correspondant aux bons types de graphes :

	Cycles	Chemins	Complets	Bipartis	Arbres
					
					
					
					
					
					

Annexe B : Exercice 4

Graphe d'origine :



A compléter :