



N° d'ordre NNT : xxx

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de
l'Université de Lyon

École Doctorale ED512
Informatique et Mathématiques

Spécialité de doctorat : Informatique

Soutenue publiquement le 24/09/2019, par :
Valentin Gledele

Couverture de sommets sous contraintes

Devant le jury composé de :

M. Nisse Nicolas, Chargé de recherche INRIA, INRIA Sophia Antipolis
M. Sopena Eric, Professeur, Université de Bordeaux
Mme Bonifati Angela, Professeure, Université Lyon
M. Stojaković Miloš, Professeur, Université de Sciences de Novi Sad

Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examineur

M. Duchêne Eric, Maître de Conférences, Université Lyon 1
Mme Parreau Aline, Chargée de recherche CNRS, Université Lyon 1

Directeur de thèse
Co-directrice de thèse

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Président de l'Université

Président du Conseil Académique

Vice-président du Conseil d'Administration

Vice-président du Conseil Formation et Vie Universitaire

Vice-président de la Commission Recherche

Directrice Générale des Services

M. le Professeur Frédéric FLEURY

M. le Professeur Hamda BEN HADID

M. le Professeur Didier REVEL

M. le Professeur Philippe CHEVALIER

M. Fabrice VALLÉE

Mme Dominique MARCHAND

COMPOSANTES SANTE

Faculté de Médecine Lyon Est — Claude Bernard

Directeur : M. le Professeur G. RODE

Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud — Charles Mérieux

Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON

Faculté d'Odontologie

Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA

Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation

Directeur : M. X. PERROT

Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine

Directeur : Mme la Professeure A-M. SCHOTT

COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies

Directeur : M. F. DE MARCHI

Département Biologie

Directeur : M. le Professeur F. THEVENARD

Département Chimie Biochimie

Directeur : Mme C. FELIX

Département GEP

Directeur : M. Hassan HAMMOURI

Département Informatique

Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE

Département Mathématiques

Directeur : M. le Professeur G. TOMANOV

Département Mécanique

Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID

Département Physique

Directeur : M. le Professeur J-C PLENET

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Directeur : M. Y. VANPOULLE

Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon

Directeur : M. B. GUIDERDONI

Polytech Lyon

Directeur : M. le Professeur E. PERRIN

Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique

Directeur : M. G. PIGNAULT

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Directeur : M. le Professeur C. VITON

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

Directeur : M. le Professeur A. MOUGNIOTTE

Institut de Science Financière et d'Assurances

Directeur : M. N. LEBOISNE

Résumé

Cette thèse porte sur le problème de la couverture d'ensembles finis dans une structure discrète. Cette problématique très générale permet de nombreuses approches et nous faisons l'étude de certaines d'entre elles. Le premier chapitre introduit les notions qui seront indispensables à la bonne compréhension de cette thèse et fait un bref état de l'art sur certains problèmes de couvertures, en particulier le problème de domination dans les graphes. Le second chapitre aborde la domination de puissance, une variante du problème de domination qui a la particularité qu'on lui adjoint un phénomène de propagation. Nous étudions ce problème pour les grilles triangulaires et les grilles carrées de dimension 3. Dans le troisième chapitre, nous revenons à la domination classique mais dans un contexte ludique, avec le jeu de domination Maker-Breaker. Nous étudions la complexité du problème consistant à décider quel joueur gagne, la durée minimale d'une partie si les deux joueurs jouent parfaitement, et dérivons ce jeu pour la domination totale et dans une version Avoïder-Enforcer. Le quatrième chapitre traite du nombre géodésique fort, un problème qui a la particularité de se couvrir à l'aide de plus courts chemins dans le graphe. Nous étudions le nombre géodésique fort de plusieurs classes de graphes ainsi que son comportement en relation avec le produit cartésien. Enfin, dans le cinquième chapitre, nous quittons le domaine des graphes pour étudier l'identification de points dans le plan par des disques. En plus de couvrir chaque point d'un certain ensemble par des disques, nous souhaitons que l'ensemble des disques couvrant chaque point soit unique et non vide. Nous donnons des résultats dans certains cas particuliers, des bornes dans le cas général et étudions la complexité du problème quand le rayon des disques est fixé.

Abstract

This PhD thesis concerns the problem of covering finite sets in a discrete structure. This very general issue allows numerous approaches and we study some of them. The first chapter introduces the notions that are essential to the understanding of this thesis and makes a brief state of the art on some covering problems, including the domination problem. The second chapter addresses the power domination problem, a variation of the domination problem with a propagation process. We study this problem on triangular grids and square grids of dimension 3. In the third chapter, we come back to the classical domination but in the context of a game, with the Maker-Breaker domination game. We study the complexity of the problem of deciding which player has a winning strategy and the minimum duration of a game if both players play perfectly. We also derive this problem for total domination and for an Avoider-Enforcer version. The fourth chapter is about the strong geodetic number : a problem with the distinctive characteristic that the covering is made by shortest paths in the graph. We study the strong geodetic number of several graph classes and its behavior with respect to the Cartesian product. Lastly, in the fifth chapter, we leave the realm of graphs to study the identification of points using disks. More than just covering every point of a certain set, the subset of disks covering each point must be unique to that point. We give results on particular configurations, bounds on the general case and we study the complexity of the problem when the radius of the disks is fixed.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	5
1 Graphes	5
1.1 Définitions et exemples	6
1.2 Classes de graphes	9
1.3 Les hypergraphes, une généralisation des graphes	13
2 Classes de complexité	13
3 Problèmes de domination : des exemples de couverture de sommets dans les graphes	17
3.1 La domination dans les graphes	17
3.2 La domination totale	19
3.3 Autres problèmes de domination	20
2 Domination de puissance	21
1 Présentation du problème	21
1.1 Définition	21
1.2 Domination de puissance sur les grilles	22
1.3 Ensembles zéro-forçants	23
2 Grille triangulaire	23
2.1 Borne supérieure	24
2.2 Borne inférieure	24
2.3 Grilles triangulaires à bord hexagonal	31
3 Grilles de dimension 3	31
4 Conclusion	33
3 Domination ludique	35
1 Domination et jeux	35
1.1 Le jeu de domination "classique"	35
1.2 Autres jeux de domination	36
2 Le jeu de domination Maker-Breaker	37
2.1 Les jeux positionnels	37
2.2 Définitions et premiers résultats	38
2.3 Le nombre de domination Maker-Breaker	40
3 Ensembles dominants par appariement	43
4 Complexité	46
5 Opérations sur les graphes	49
5.1 Union et joint	50
5.2 Opération de collage	54
6 Le jeu de domination totale Maker-Breaker	62
6.1 Le problème, premiers résultats	62
6.2 Les cactus	62
7 Jeux Avoïder-Enforcer	66
7.1 Le contrepoint de Maker-Breaker	66
7.2 Le jeu de domination Avoïder-Enforcer	66
8 Conclusion et perspectives	70

4	Couverture par plus courts chemins	73
1	Nombre géodésique	73
2	Nombre géodésique fort : définitions et premiers résultats	75
3	Graphes bipartis complets	77
4	Noyau géodésique fort	80
5	Nombre géodésique fort et produit cartésien	84
5.1	Borne inférieure	84
5.2	Borne supérieure	89
6	Hypercubes	91
7	Conclusion et perspectives	94
5	Couverture identifiante	95
1	Définition et contexte	95
1.1	Définition formelle	95
1.2	Codes identifiants et ensembles séparateurs	96
1.3	Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay	98
2	Configurations particulières	100
2.1	Points alignés	100
2.2	Points situés sur une grille	101
3	Cas extrémaux	104
3.1	Borne inférieure	104
3.2	Borne supérieure	105
3.3	Une meilleure borne supérieure pour des points en position générale . . .	106
4	Complexité quand le rayon est fixé	108
5	Conclusion et perspectives	113
	Conclusion	115

Introduction

Dans le cycle de vie d'une thèse, il est une étape que chaque doctorant redoute avec appréhension, qui le réveille la nuit et qu'il abhorre par-dessus tout : notre Némésis à tous, la composition du pot de thèse. Entre les gens qui n'aiment pas manger épicé, ceux qui sont allergiques au lactose, ceux qui n'aiment que les desserts... le pot de thèse est un véritable casse-tête. Heureusement, j'ai astucieusement attaqué ce problème de front en en faisant mon sujet de thèse. Pas la peine de retourner à la page de garde, le titre de ma thèse n'est pas "Du problème de la composition du pot de thèse : analyse comparée des goûts d'un public universitaire" (ce titre m'a été refusé par l'école doctorale). Comme je ne pouvais choisir ce titre pourtant plus réaliste, j'ai contourné le problème et intitulé ma thèse "Couverture de sommets sous contraintes". Toutefois, le lecteur avisé ne s'y trompera pas, il s'agit bien du même problème. En voici la description.

D'un côté, nous avons l'ensemble des personnes invitées à mon pot de thèse (je ne prends pas en compte les éventuels doctorants attirés par l'odeur de la nourriture gratuite¹). De l'autre côté, nous avons l'ensemble des aliments possibles : épicé, sucré, au lait... Nous disposons, de plus, de relations entre les invités et les aliments, nous indiquant quel invité aime quel aliment. L'objectif est que chaque invité trouve au moins quelque chose qui lui plaise dans mon pot. Une solution évidente à ce problème consiste à apporter tous les aliments du monde. Hélas, pour des raisons budgétaires et parce que je doute que l'université mette à disposition une salle suffisamment grande, nous ne pouvons retenir cette solution. Pour contenter mon portefeuille, on peut reformuler le problème en demandant quel est le nombre minimum d'aliments que je dois apporter à mon pot de thèse afin de satisfaire tous les palais de l'assemblée. La Figure 1 illustre une situation possible.

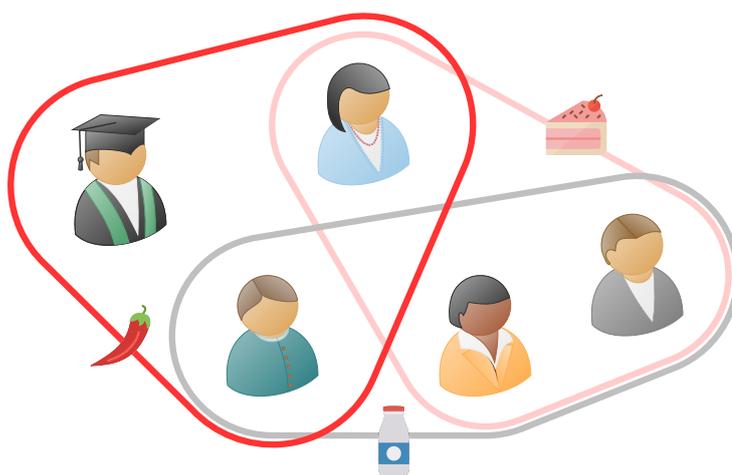


FIGURE 1 – Répartition des goûts des invités lors d'un pot de thèse. Des aliments sucrés et épicés suffisent à satisfaire le goût de tous les invités.

En combinatoire, ce problème s'appelle le *problème de couverture par ensembles*. Il s'agit d'un problème d'informatique classique qui a été très étudié depuis sa définition en 1972. Dans ce problème, nous disposons d'un ensemble fini d'éléments (nos invités) et d'un ensemble

1. Le saviez-vous ? Il a été prouvé qu'un doctorant était capable de détecter de la nourriture gratuite dans un rayon de 500 m autour de lui, voire plus si l'on s'approche de midi.

d'attributs, des sous-ensembles d'éléments, (par exemple les invités qui aiment manger épicé) et nous cherchons à sélectionner un nombre minimal d'attributs tel que chaque élément appartienne à au moins un des attributs sélectionnés. Si ce problème trouve une utilisation dans la résolution du problème du pot de thèse, il dispose de nombreuses autres applications notamment dans la surveillance de réseaux. Si les éléments d'une instance du problème de couverture par ensembles représentent les nœuds d'un réseau et que l'on souhaite placer des capteurs pour s'assurer qu'il n'y ait aucune défaillance, alors les attributs peuvent représenter les nœuds que peuvent surveiller les différents capteurs. Ainsi, choisir un nombre minimal d'attributs touchant tous les sommets revient à placer un nombre minimal de capteurs tout en évitant qu'il y ait des nœuds non surveillés.

De part la profusion de formes que peuvent prendre les attributs, le problème de couverture par ensembles est très difficile à résoudre dans le cas général. Cependant, les attributs donnés aux sommets sont bien souvent caractérisés par une structure sous-jacente. Si l'on revient au problème du pot de thèse, il est probable que des individus d'une même famille aiment les mêmes aliments ou que les enfants aiment tous le sucré. Dans ces cas, les attributs seraient donc liés aux liens familiaux et aux classes d'âges. De même, pour le cas de la surveillance d'un réseau, un capteur ne peut pas surveiller deux nœuds aux extrémités opposées d'un réseau. Une des structures que peut prendre ce problème est celle d'un *graphe*. Schématiquement, un graphe est un ensemble de points, appelés sommets, reliés par des traits, appelés arêtes. La structure d'un graphe est bien plus contrainte que celle des instances générales du problème de couverture par ensembles et, quand les attributs du problème de couverture par ensembles dépendent d'une telle structure, il est parfois possible d'obtenir de meilleurs résultats que dans le cas général.

Prenons, par exemple, le *problème de couverture par arêtes*. Dans ce problème nous cherchons un ensemble minimal d'arêtes dans un graphe de telle sorte que chaque sommet soit l'extrémité d'au moins une arête sélectionnée. Ce problème revient exactement au problème de couverture par ensembles dans le cas où chaque attribut est associé à exactement deux éléments. Il est à noter que le problème de couverture par arêtes est bien plus facile que le problème général de la couverture par ensemble. Une résolution de ce problème est connue depuis la fin des années 70. Défini de façon similaire, le *problème de couverture par cliques*, dans lequel on cherche à couvrir les sommets d'un graphe par des sous-graphes complets, revient à une instance du problème de couverture par ensembles dans lequel toutes les cliques d'un graphe deviennent les attributs. Le problème de couverture par arêtes est en réalité un sous-cas du problème de couverture par cliques dans lequel toutes les cliques doivent être de taille deux.

Un autre problème de couverture très étudié est le *problème de domination* qui consiste à trouver un *ensemble dominant* de taille minimum dans un graphe. Un ensemble dominant est un ensemble de sommets du graphe tel que tout sommet soit fait partie de cet ensemble, soit a un voisin dans cet ensemble. Le problème de domination représente donc les instances du problème de couverture par ensembles dans lequel les attributs sont les voisinages fermés d'un graphe. Le *problème de domination totale* est similaire à la différence près que les sommets de l'ensemble sélectionné doivent aussi être adjacents à un autre sommet de cet ensemble. Ce problème est donc le problème de couverture par ensembles dans lequel les attributs sont les voisinages ouverts.

Une autre façon d'obtenir une instance du problème de couverture par ensembles à partir d'un graphe est donnée par le *problème du nombre de chemins isométriques* dans lequel on cherche à couvrir les sommets par des plus courts chemins du graphe. Les attributs sont alors les ensembles de sommets sur les plus courts chemins du graphe.

Ces problèmes sont étudiés depuis de nombreuses années et il existe une littérature abondante les concernant. Ils ont aussi mené à des variantes qui dépassent le cadre du problème de couverture par ensembles. En reprenant la situation du pot de thèse, on peut, par exemple, imaginer la situation où certains invités sont populaires et les aliments qu'ils mangeront seront aussi appréciés par les autres invités par effet de groupe, entraînant alors une propagation du goût pour certains aliments. Au contraire, certains doctorants en deuxième année, en pleine crise d'adolescence de la thèse, pourraient refuser de manger la même chose que leurs directeurs par simple esprit de contradiction. Il faut alors les couvrir par des ensembles différents d'aliments. Ce ne sont là que quelques-unes des nombreuses problématiques qui se posent au doctorant préparant son pot de thèse. De même, chacun des problèmes décrits ci-dessus possède de nombreuses variantes pour s'adapter à leurs situations d'application.

Au cours de cette thèse, nous allons justement étudier différents problèmes qui sont des

variantes de problèmes de couverture.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous introduisons les notions de graphes et de complexité qui seront nécessaires dans la suite de ce manuscrit. À partir de ces notions, nous introduisons plus formellement les problèmes de couverture de sommets dans les graphes et en particulier de la domination. En effet, les chapitres deux et trois de cette thèse concernent des variantes du problème de la domination.

Ainsi, le second chapitre de cette thèse traite du problème de la *domination de puissance*. La domination de puissance est une variante du problème de la domination pour laquelle est ajoutée un processus de propagation. L'objectif de ce problème est de *surveiller* l'ensemble des sommets d'un graphe. Initialement un certain ensemble de sommets est sélectionné et cet ensemble de sommets est surveillé, ainsi que leurs voisins. Puis, cette surveillance se propage de la façon suivante : si un sommet est surveillé et que tous ses voisins sauf un le sont aussi, alors il propage la surveillance à son voisin non-surveillé. La propagation continue tant qu'elle est possible. Un *ensemble dominant de puissance* est un ensemble de sommets d'un graphe tel que si on les sélectionne initialement, tous les sommets du graphe finissent par être surveillés. Nous étudions ce problème sur des grilles, des graphes ayant une très forte régularité. Nous donnons la taille minimum d'un ensemble dominant de puissance des grilles triangulaires à bords triangulaires et donnons aussi une borne supérieure dans le cas des grilles carrées de dimension 3.

Dans le troisième chapitre, ce n'est pas la méthode de couverture qui est modifiée mais le type même du problème, en effet il s'agit à présent d'un jeu entre deux joueurs. Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions le *jeu de domination Maker-Breaker*. Ce jeu voit s'affronter deux joueurs, Dominator et Staller. Ils sélectionnent alternativement les sommets d'un graphe. Dominator souhaite dominer le graphe avec l'ensemble des sommets qu'il a sélectionnés, tandis que l'objectif de Staller est d'empêcher la domination et, qu'à cette fin, elle interdit à Dominator des sommets avec ses coups. Ce jeu modélise une situation dans laquelle on souhaite surveiller un certain ensemble mais des défaillances se produisent, nous empêchant de placer des capteurs sur certains sommets. Nous abordons l'étude de ce jeu avec deux approches complémentaires : nous étudions à la fois le vainqueur de ce jeu, c'est-à-dire quel joueur à une stratégie gagnante, et le nombre de coups nécessaires à Dominator pour gagner s'il dispose d'une stratégie gagnante. Dans cet objectif, nous introduisons le concept de *domination par appariement* qui est une autre méthode de couverture de graphe. L'existence d'un ensemble dominant par appariement nous assure que Dominator a une stratégie gagnante et nous donne une borne supérieure sur son nombre de coups. Cependant nous prouvons qu'il est difficile de savoir si un graphe admet un ensemble dominant par appariement et que l'absence d'un tel ensemble ne nous permet pas d'affirmer que Dominator n'a pas de stratégie gagnante. Nous prouvons alors que déterminer le vainqueur du jeu est difficile dans le cas général mais prouvons que c'est au contraire facile pour les arbres et les cographes. Pour finir, nous généralisons ce problème au cas de la domination totale et à une version Avoier-Enforcer, c'est-à-dire que le joueur dont les coups forment l'ensemble dominant potentiel essaie d'éviter la formation d'un ensemble dominant tandis que l'autre joueur tente de le forcer à créer un tel ensemble.

Dans le quatrième chapitre, nous nous éloignons du problème de la domination et nous approchons du problème du nombre de chemins isométriques, soit la couverture par plus courts chemins. En effet, dans ce chapitre nous étudions le problème du *nombre géodésique fort*. Dans ce problème, il s'agit de couvrir un graphe par des plus courts chemins mais en sélectionnant les extrémités. Plus précisément, un *ensemble géodésique fort* est un ensemble de sommets d'un graphe tel qu'il existe une façon de fixer un plus court chemin entre chaque paire de sommets de cet ensemble et que chaque sommet du graphe soit sur l'un de ces plus courts chemins. Le nombre géodésique fort est la taille d'un plus petit ensemble géodésique fort. Nous étudions principalement ce paramètre en relation avec une opération sur les graphes, le produit cartésien. À cette fin, nous introduisons le *noyau géodésique fort* qui nous permet d'améliorer les bornes existantes sur le nombre géodésique fort du produit cartésien de deux graphes. Nous appliquons aussi cette notion pour obtenir une borne supérieure sur les hypercubes.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les problèmes de ces trois chapitres se rapprochent du problème de couverture par ensembles dans le cas où la structure des instances de ce problème est celle d'un graphe. Cependant, la structure de graphe n'est pas la seule qui puisse nous intéresser. Par exemple, si les éléments sont des points situés dans un espace métrique, il est pertinent d'avoir une approche géométrique. Il est alors naturel de couvrir les

sommets à l'aide d'un ensemble de disques. En effet, si l'on place un capteur sur un point du plan il semble raisonnable de supposer que ce capteur à un rayon d'action et qu'il couvre donc la surface d'un disque. Ainsi, dans le cinquième et dernier chapitre, nous couvrons des éléments du plan grâce un ensemble de disques. Une contrainte supplémentaire est ajoutée, nous souhaitons que cet ensemble de disque *identifie* les sommets. Revenons à nos capteurs disposant d'un rayon de détection. Si un capteur détecte une anomalie, il ne sait pas forcément de quelle direction cette anomalie provient. Toutefois, si un certain nombre de capteurs détectent une anomalie au même moment, alors cette anomalie doit être dans l'intersection de leurs rayons d'action. C'est là le principe de l'*identification de points dans le plan par des disques*. Disposant d'un certain ensemble de points dans le plan, nous souhaitons trouver un ensemble de disques tel que chaque point appartienne à au moins l'un des disques et tel que, pour chaque point, l'ensemble des disques qui le contiennent soit unique. Nous étudions ce problème pour des configurations particulières, puis donnons des bornes pour le cas général. Enfin nous étudions la complexité de ce problème dans le cas où le rayon des disques est fixé.

Notons aussi que certains de mes travaux ne rentrent pas dans le cadre de cette thèse et n'ont donc pas été cités au cours de ce manuscrit. En effet, certains de mes travaux en cours et passés concernent le domaine des jeux combinatoires et ne s'inscrivent pas dans le cadre de la couverture. Parmi ces travaux, on peut citer l'article "A generalization of Arc-Kayles" [45] que j'ai écrit avec mes confrères de thèse, Antoine Dailly et Marc Heinrich.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre nous introduisons les concepts de théorie des graphes et de théorie de la complexité qui nous seront utiles tout au long de cette thèse. Nous donnons aussi des bases sur les problèmes de couverture et, en particulier, sur le problème de la domination qui a des liens avec de nombreux problèmes que nous étudierons dans ce manuscrit.

1 Graphes

Si on le définit de façon informelle, un graphe est un ensemble de points, nommés *sommets*, qui sont reliés par des traits, nommés *arêtes*, et cette structure simple à visualiser a, nous allons le voir, de nombreuses applications.

Bien qu'elle ne soit pas aussi ancienne que la géométrie euclidienne ou que la théorie des nombres, la théorie des graphes est un domaine des mathématiques qui n'a pas attendu l'arrivée des ordinateurs pour s'épanouir. Il est fréquent de faire remonter sa naissance au *problème des sept ponts de Königsberg* en 1736. Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) était une ville de Prusse-Orientale qui avait la particularité d'être séparée en quatre par le fleuve Pregel et de disposer de sept ponts pour relier ses différentes parties. Euler s'est demandé s'il existait une promenade dans Königsberg permettant de passer par les sept ponts exactement une fois chacun et de revenir à son point de départ. Une représentation de ce problème par un graphe est donnée dans la Figure 1.1. En généralisant ce problème, on peut se demander si, pour un dessin donné, il est possible de le tracer à main levée et sans passer deux fois par le même trait. Ces problèmes sont aujourd'hui connus sous le nom de recherche de *cycles et de chemins eulériens* dans un graphe et les résultats sur ces problèmes sont considérés comme les premiers résultats de la théorie des graphes.

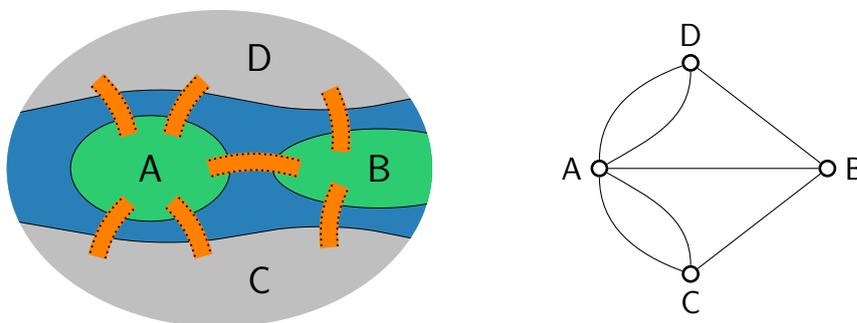


FIGURE 1.1 – Une représentation de la ville de Königsberg avec ses ponts et la modélisation de cette ville par un graphe.

Un autre problème phare de la théorie des graphes concerne la *coloration* d'une carte. En 1852, Francis Guthrie conjecture qu'il est toujours possible de colorier une carte avec quatre couleurs ou moins et de telle sorte que deux régions adjacentes n'aient pas la même couleur. Cette conjecture ne sera résolue que bien des années plus tard par Appel et Haken en 1976 [6].

Le problème des quatre couleurs est à l'origine d'une notion bien connue de théorie des graphes, la coloration propre d'un graphe, dont de nombreuses variantes sont encore étudiées aujourd'hui.

Bien qu'elle ait, comme nous l'avons vu, des origines antérieures, la théorie des graphes prend véritablement son essor dans les années 60 sous l'impulsion notamment de Claude Berge, de son livre "Théorie des graphes et ses applications" [18] et de son étude des graphes parfaits, qui sont aussi liés à la coloration de graphes.

Comme dans le cas du problème des sept ponts de Königsberg et de la coloration de cartes, les graphes servent avant tout à modéliser des problèmes. Ainsi, internet, des circuits électriques ou encore les réseaux ferroviaires peuvent être modélisés par des graphes et les problèmes que l'on peut avoir dans les cas réels ont bien souvent une définition générale dans les graphes : trouver comment accéder le plus rapidement à un site internet depuis un ordinateur donné peut se traduire comme une recherche d'un plus court chemin dans un graphe, comment optimiser la construction d'une carte mère sans que les fils se croisent est un problème de représentation d'un graphe dans le plan et s'assurer que si une gare a un accident cela ne paralyse pas tout le réseau revient à s'assurer qu'il y a toujours deux chemins disjoints entre toute paire de sommets d'un graphe.

Les graphes sont donc très utilisés en informatique pour modéliser puis résoudre des problèmes pratiques mais ce n'est pas là leur seul lien avec l'informatique. En effet, la théorie des graphes est un des domaines des mathématiques où l'outil informatique permet de prouver des résultats. Ainsi la résolution du problème des quatre couleurs par Appel et Haken, que nous avons cité plus haut, a nécessité plusieurs centaines d'heures de calcul par ordinateur. Si ces méthodes ne sont pas aussi fréquentes que des preuves écrites, elles sont parfois nécessaires lorsqu'il y a de trop nombreux cas à étudier. Un exemple plus récent de l'application de l'informatique à la théorie des graphes concerne la domination dans les grilles, problème que nous aborderons ultérieurement dans ce chapitre.

Dans cette partie nous présenterons des définitions de bases concernant la théorie des graphes et aborderons principalement des notions qui nous seront utiles par la suite. Cependant, si le lecteur souhaite approfondir certaines des notions que nous présentons, nous lui conseillons le livre "Graph theory with applications" de Bondy et Murty [21].

1.1 Définitions et exemples

Un *graphe* G est un couple (V, E) où V est un ensemble fini de *sommets* et E un ensemble de couples non ordonnés de sommets de V , appelées *arêtes*. Une arête sur les sommets u et v est notée uv . Les graphes sont généralement représentés par un dessin dans lequel les sommets sont des points du plan et les arêtes des courbes joignant ces points. La Figure 1.2 donne l'exemple d'un graphe avec une telle représentation. Lorsque les ensembles de sommets et d'arêtes d'un graphe G ne sont pas explicites, on les notera respectivement $V(G)$ et $E(G)$.

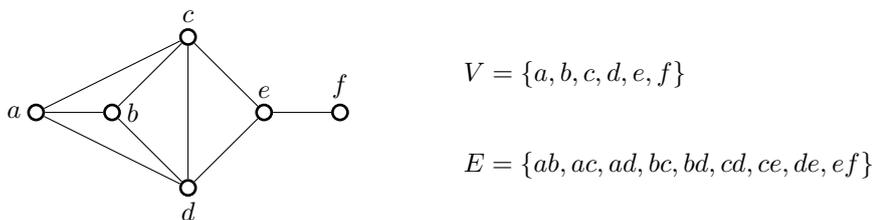


FIGURE 1.2 – Représentation d'un graphe G d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E .

Si un graphe ne comporte pas d'arêtes composées d'un seul sommet, et donc de la forme uu , ni plusieurs arêtes sur la même paire de sommets, on dit que c'est un *graphe simple*. Si, au contraire, il contient des arêtes multiples ou des arêtes sur un seul sommet, on dit que c'est un *multigraphe*. Au cours de cette thèse nous n'étudierons que des graphes simples, que nous qualifierons donc juste de graphe. Certaines applications des graphes peuvent aussi nécessiter qu'il y ait un ordre des sommets au sein d'une arête. Le type d'objet que nous obtenons alors est appelé *digraphe*, ou *graphe orienté*, et les arêtes sont alors appelées des *arcs* qui sont notés \vec{uv} , avec u le premier sommet de l'arc et v le deuxième. La Figure 1.3 donne une représentation d'un multigraphe et d'un graphe orienté, les flèches du graphe orienté partant du premier sommets

des arcs pour aller jusqu'au deuxième.

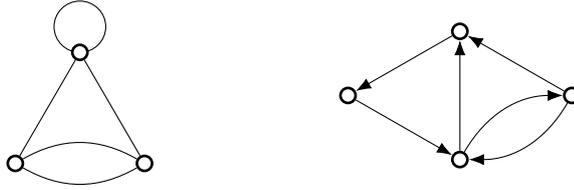


FIGURE 1.3 – Représentation d'un multigraphe, à gauche, et d'un graphe orienté, à droite.

Dans la suite de ce chapitre préliminaire, ainsi que tout au long de ce manuscrit, nous ne traiterons que de graphes simples et non-orientés. Les définitions qui suivent s'appliquent donc à ces cas-là, bien qu'elles puissent aisément être étendues aux graphes orientés et aux multigraphes, parfois même sans la moindre modification.

On appelle *ordre* d'un graphe le nombre de sommets de ce graphe et *taille* le nombre d'arêtes. Pour un graphe G , ces valeurs sont respectivement notées $|V(G)|$ et $|E(G)|$.

On appelle *voisin* d'un sommet u un sommet qui forme une arête avec u . Le *voisinage ouvert* d'un sommet u , noté $N(u)$, est l'ensemble des voisins de u . Le *voisinage fermé* de u , noté $N[u]$, est constitué de u et de son voisinage ouvert. On appelle *degré* d'un sommet u le cardinal de son voisinage ouvert, c'est-à-dire le nombre de sommets avec lesquels il forme une arête. Le *degré maximum* d'un graphe G est le maximum de tous les degrés de ses sommets, le *degré minimum* est au contraire le minimum de tous les degrés. Ces valeurs sont respectivement notées $\Delta(G)$ et $\delta(G)$. Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit *régulier*.

On peut ainsi noter que le graphe de la Figure 1.2 a un ordre de 6, une taille de 9, un degré maximal de 4, atteint en c et en d , et un degré minimum de 1, atteint en f .

Pour un graphe G donné, un *sous-graphe* H est un graphe tel que $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un *sous-graphe induit* H' , est un graphe tel que $V(H') \subseteq V(G)$ et deux sommets u et v de H' forment une arête si et seulement si ils en forment une dans G . La Figure 1.4 donne un exemple de sous-graphe et de sous-graphe induit.

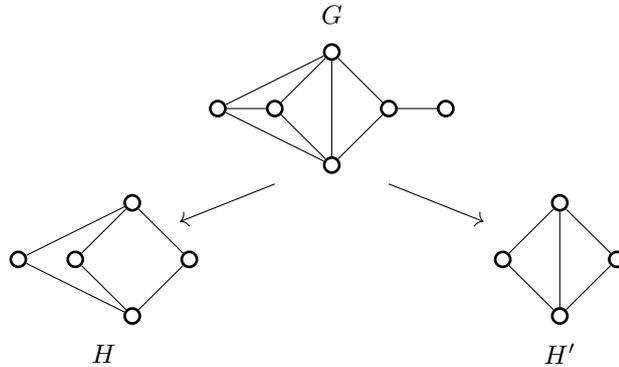


FIGURE 1.4 – Le graphe H est un sous-graphe de G qui n'est pas un sous-graphe induit et le graphe H' est un sous-graphe induit de G .

Deux graphes G et H sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective $f : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que deux sommets u et v de G sont adjacents si et seulement si $f(u)$ et $f(v)$ sont adjacents dans H .

Un *chemin* de longueur k entre deux sommets u et v d'un même graphe G est une séquence de sommets u_0, u_1, \dots, u_k telle que $u_0 = u$, $u_k = v$ et, pour tout $0 \leq i < k$, $u_i u_{i+1} \in E(G)$. Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommets de ce graphe il existe au moins un chemin entre ces sommets. Un sous-graphe connexe maximal est appelé une *composante connexe* du graphe.

Un *plus court chemin*, ou *géodésique*, entre deux sommets est un chemin de longueur minimum entre deux sommets. La *distance* entre deux sommets u et v , notée $d_G(u, v)$ est la longueur d'un plus court chemin entre ces sommets dans G . Ainsi, dans le graphe de la Figure 1.2 les sommets

a et f sont à distance 3 car la séquence a, c, e, f est un plus court chemin entre ces sommets. L'intervalle $I_G(u, v)$ entre les sommets u et v d'un graphe G est l'ensemble des sommets qui sont sur un plus court chemin entre u et v . Dans la Figure 1.2, l'intervalle entre a et e est l'ensemble $\{a, c, d, e\}$ car les chemins a, c, e et a, d, e sont les seuls chemins de longueur 2 entre a et e .

Opérations sur les graphes

Travailler sur les graphes nécessite parfois de transformer les graphes en cours d'étude. Nous définissons à présent certaines des opérations élémentaires de graphes que nous utiliserons plus tard.

Le graphe *complémentaire* d'un graphe G , noté \overline{G} , est le graphe d'ensemble de sommets $V(G)$ et pour lequel deux sommets u et v forment une arête si et seulement si ils n'en forment pas dans G .

Soit G et H deux graphes, l'*union* de G et de H , notée $G \cup H$, est le graphe d'ensemble de sommets $V(G) \cup V(H)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) \cup E(H)$. Le *joint* de G et de H , notée $G \bowtie H$, est le graphe d'ensemble de sommets $V(G) \cup V(H)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$. La Figure 1.5 représente l'union et le joint de deux graphes.

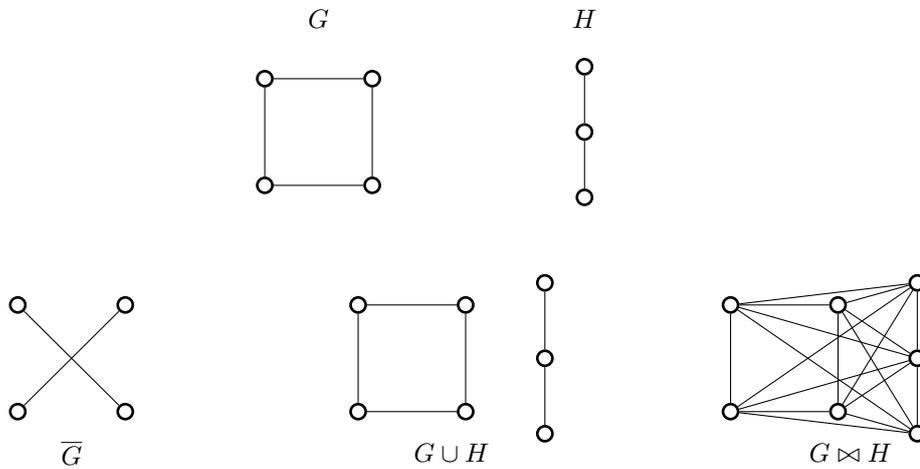


FIGURE 1.5 – Représentation du complémentaire de G , de l'union et du joint de G et H .

Le *produit cartésien* de deux graphes G et H , noté $G \square H$, est le graphe d'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$, où les sommets (g, h) et (g', h') sont adjacents si $g = g'$ et $hh' \in E(H)$, ou si $h = h'$ et $gg' \in E(G)$. Pour $h \in V(H)$, le sous-graphe induit de $G \square H$ d'ensemble de sommets $\{(x, h); x \in V(G)\}$ est isomorphe à G et est appelé une *couche-G* et est notée G^h . Réciproquement, pour un sommet g de $V(G)$, le sous-graphe de $G \square H$ induit par les sommets $\{(g, x); x \in V(H)\}$ est une *couche-H* et est noté ${}^g H$. Une autre façon de voir le produit cartésien de G et de H consiste à copier le graphe G autant de fois qu'il y a de sommets dans H , à associer à chaque copie de G un sommet de H et à relier les sommets identiques des copies de G si les sommets de H auxquels ils sont associés forment une arête. La Figure 1.6 représente le produit cartésien de deux graphes G et H de trois façons différentes. Pour $V \subseteq V(G \square H)$, sa *projection* sur G , notée $p_G(V)$, est l'ensemble de sommets $\{g \in V(G) : (g, h) \in V \text{ pour } h \in V(H)\}$. Si G' est un sous graphe de $G \square H$, alors sa projection sur G a pour ensemble de sommets $p_G(V(G'))$ et deux sommets g et g' de cette projection sont adjacents s'il existe un sommet h de H tel que (g, h) et (g', h) sont adjacents dans G' . La projection sur G d'un plus court chemin de $G \square H$ reste un plus court chemin dans G . De par la commutativité du produit cartésien, toutes ces définitions restent correctes lorsqu'elles sont appliquées à H au lieu de G . Pour plus d'informations sur le produit cartésien, le lecteur peut se référer au livre "Topics in Graph Theory : Graphs and Their Cartesian Product" d'Imrich, Klavžar et Rall [82].

D'autres produits de graphes existent, tels que le *produit tensoriel* et le *produit fort* de graphes. Le produit tensoriel de deux graphes G et H , noté $G \times H$, a pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et deux sommets (g, h) et (g', h') sont adjacents si et seulement si gg' est une arête de G et hh' est une arête de H . Le produit fort est, en quelque sorte, l'union du produit cartésien et du produit tensoriel. En effet, le produit fort de deux graphes G et H , noté $G \boxtimes H$,

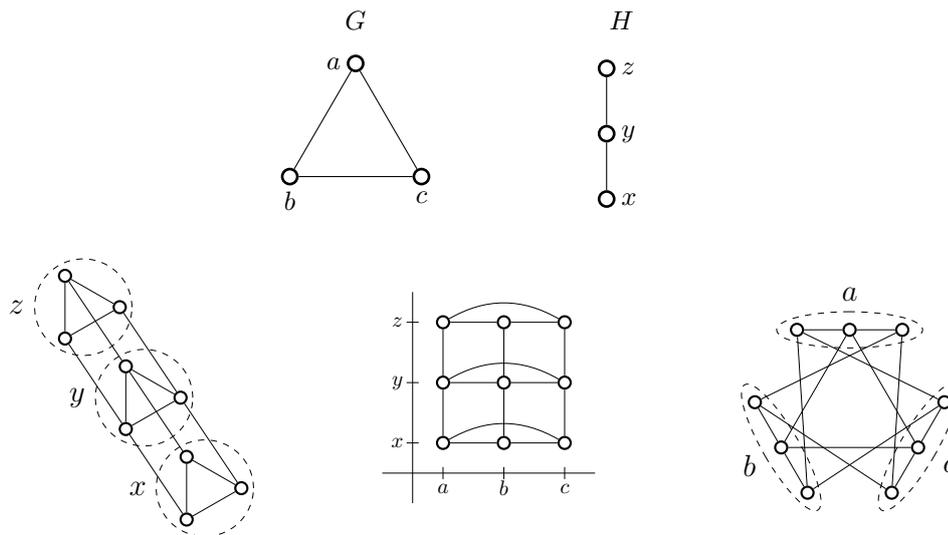


FIGURE 1.6 – Trois représentations de $G \square H$, produit cartésien des graphes G et H .

a pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et deux sommets (g, h) et (g', h') sont adjacents si et seulement si g est dans le voisinage fermé de g' et h est dans le voisinage fermé de h' , les arêtes du produit fort sont donc l'union des arêtes du produit cartésien et du produit tensoriel.

1.2 Classes de graphes

On appelle *classe de graphes* un ensemble de graphes partageant des caractéristiques communes. Certains problèmes de graphes se comportent différemment en fonction des graphes auxquels on les soumet, la définition de classes de graphes nous permet d'étudier ces différents comportements. Ainsi, comme nous le définirons plus en détails dans la partie 2, certains problèmes appartiennent à la classe de complexité NP-c, classe de problèmes difficiles à résoudre. Cependant, restreints à certaines classes de graphes, ces problèmes peuvent avoir une résolution polynomiale. L'étude de problèmes de graphes consiste souvent à déterminer pour quelles classes un problème est difficile et pour quelles autres classes il est facile et à comprendre la source de cette différence.

Nous définissons dans cette partie les classes de graphes les plus usuelles qui nous serviront au cours de cette thèse.

Graphes complets et indépendants

La classe des *graphes complets* est constituée des graphes dans lesquels tous les sommets sont voisins de tous les autres. Il n'y a nécessairement qu'un seul graphe complet d'ordre n donné, que l'on note K_n . On appelle *cliques* les sous-graphes qui sont des graphes complets. À l'opposé, un *indépendant* d'ordre n , noté I_n , est le complémentaire du graphe complet, c'est-à-dire le graphe d'ordre n n'ayant aucune arête. La Figure 1.7 représente le graphe complet et l'indépendant sur 6 sommets.

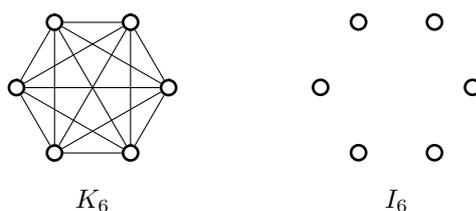


FIGURE 1.7 – Représentation de la clique K_6 et de l'indépendant I_6

Chemins et cycles

Un *chemin* sur n sommets, noté P_n , est un graphe pour lequel il existe un ordre de ses sommets u_1, \dots, u_n tel que deux sommets u_i et u_j , avec $i < j$, forment une arête si et seulement si $j = i + 1$. Similairement, un *cycle* sur n sommets est un graphe pour lequel il existe un ordre des sommets u_1, \dots, u_n tel que deux sommets u_i et u_j , avec $i < j$ forment une arête si et seulement si $j = i + 1$ ou si $i = 1$ et $j = n$. La Figure 1.8 représente un chemin et un cycle.

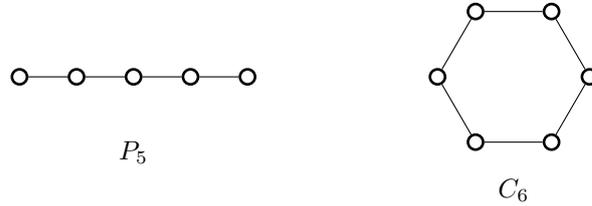


FIGURE 1.8 – Représentation du chemin P_5 et du cycle C_6 .

Graphes cordaux et graphes scindés

Un graphe est *cordal*, ou *triangulé*, s'il n'admet pas de cycle induit d'ordre supérieur ou égal à 4. Dit autrement, un graphe est cordal si pour tout cycle de taille supérieure à quatre, il existe une arête reliant deux sommets non adjacents du cycle.

Une sous-classe des graphes cordaux est la classe des graphes *scindés*. Un graphe G est scindé s'il est possible de partitionner ses sommets en deux ensembles K et I , tels que K induise une clique sur G et que I induise un graphe indépendant. Les graphes scindés sont bien cordaux. En effet, supposons que G soit scindé et admette un cycle induit d'ordre supérieur ou égal à 4, ce cycle contient au moins un sommet u de la partie indépendante car autrement il serait inclut dans la clique. Soit v_1 et v_2 les deux voisins de u dans le cycle. Le sommet u appartenant à l'indépendant, v_1 et v_2 appartiennent tous les deux à la clique et sont donc voisins, ce qui contredit l'existence d'un cycle induit d'ordre supérieur ou égal à 4.

La Figure 1.9 représente un graphe cordal et un graphe scindé.

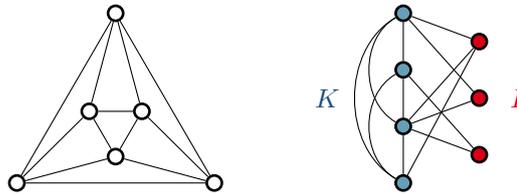


FIGURE 1.9 – Un graphe cordal et un graphe scindé.

Graphes biparti

Un graphe G est *biparti* si l'ensemble V de ses sommets peut être partitionné en deux parties V_1 et V_2 qui induisent chacune un graphe indépendant. Un graphe biparti qui contient toutes les arêtes possibles entre ces deux parties est appelé *graphe biparti complet* et est noté $K_{m,n}$ avec m la taille de l'une de ses parties et n la taille de l'autre. La Figure 1.10 donne un exemple de graphe biparti arbitraire et un exemple de graphe biparti complet.

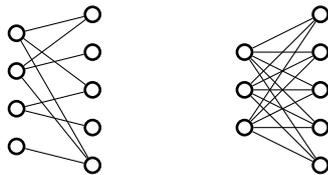


FIGURE 1.10 – Représentation d'un graphe biparti et du graphe biparti complet $K_{3,5}$.

Arbres

Les *arbres* sont une sous-classe très étudiée des graphes bipartis et des graphes cordaux. Un arbre est un graphe connexe qui n'admet pas de cycle en tant que sous-graphe. Ainsi, les chemins sont des arbres. Les arbres ont la particularité d'avoir nécessairement des sommets de degré 1 qu'on appelle *feuilles*. On dénote par $\ell(T)$ le nombre de feuilles d'un arbre T . Un graphe dont tous les sommets sont des feuilles sauf un est appelé une *étoile*. On peut remarquer qu'une étoile est un graphe biparti complet dont l'une des parties est de taille 1, on notera donc les étoiles $K_{1,n}$. La Figure 1.11 représente un arbre quelconque et une étoile. Une union disjointe de plusieurs arbres est une *forêt*.

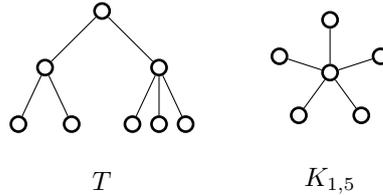


FIGURE 1.11 – Représentation d'un arbre T et d'une étoile à cinq branches $K_{1,5}$.

Graphes de produit

La *grille carrée* $G_{m,n}$, est le produit cartésien des chemins $P_m \square P_n$. Il s'agit de la forme la plus commune de grille et si elle est claire dans le contexte, elle sera juste appelée grille. Un *cylindre* est le produit cartésien d'un cycle et d'un chemin, et un *tore* est le produit cartésien de deux cycles. Une *grille du roi* est le produit fort de deux chemins, $P_m \boxtimes P_n$, son nom vient du déplacement du roi dans le jeu d'échecs. La Figure 1.12 représente une grille carrée et une grille du roi.

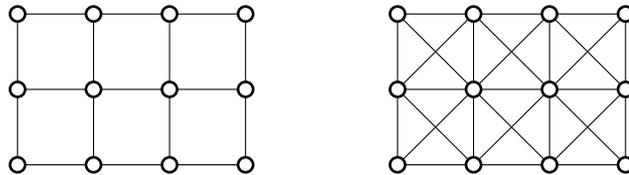


FIGURE 1.12 – Représentation de la grille classique $G_{3,4}$ et de la grille du roi $P_3 \boxtimes P_4$.

Une autre classe de graphes est issue du produit cartésien de graphes, il s'agit de la classe des *prismes*. Un prisme est un graphe de la forme $G \square K_2$, pour un certain graphe G . En particulier, une classe de prismes très étudiés est la classe des *hypercubes*. L'hypercube Q_0 est le graphe à un seul sommet et, pour tout $n \geq 1$, l'hypercube Q_n est le produit cartésien de Q_{n-1} et de K_2 . La Figure 1.13 donne une représentation des premiers hypercubes.

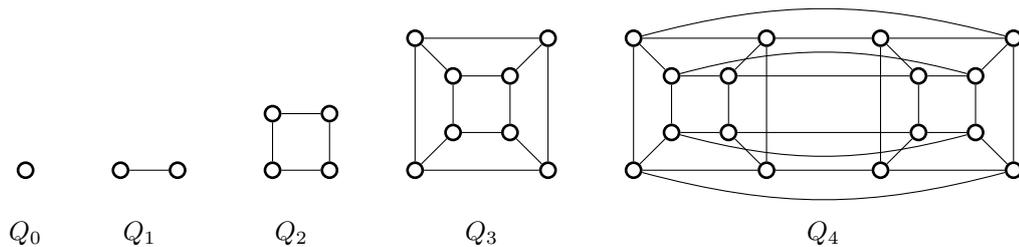


FIGURE 1.13 – Représentation des hypercubes Q_0 à Q_4 .

Cographe

La classe des *cographe*s est une autre classe qui peut être défini à partir d'opérations sur les graphes. En effet, les cographe peuvent être définis inductivement comme les graphes qui sont :

- le graphe à un seul sommet K_1 ,
- l'union de deux cographe,
- le joint de deux cographe.

La Figure 1.14 donne l'exemple d'un cographe et de sa décomposition en unions et joints. La classe des cographe peut aussi être définie comme l'ensemble des graphes qui n'admettent pas de P_4 induit.

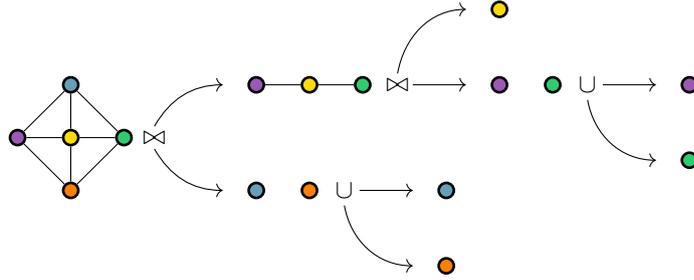


FIGURE 1.14 – Un cographe et sa décomposition en joints et unions de cographe.

Graphes planaires

Dans cette partie, nous avons à de nombreuses reprises associé des graphes à leur représentation. Cependant la représentation d'un graphe n'est pas unique et la classe de graphes suivante se base sur l'existence d'une certaine représentation. En effet, un graphe est *planaire* s'il existe une façon de le représenter dans le plan de telle sorte qu'aucune arête n'en croise une autre. La Figure 1.15 donne deux représentations du graphe K_4 , une pour laquelle des arêtes se croisent et une autre pour laquelle aucune arête ne se croisent. De par l'existence de cette deuxième représentation, le graphe K_4 est donc planaire.



FIGURE 1.15 – Deux représentations du graphe K_4 . La deuxième prouve que K_4 est planaire.

Pour une représentation planaire d'un graphe, on peut définir une *face* comme une composante connexe maximale du plan que l'on peut obtenir sans traverser d'arête. L'une de ces faces est celle qui est non bornée et à l'extérieur du graphe. Elle est appelée *face externe*. Les autres faces sont contenues dans les limites du graphe et sont appelées *faces internes*. On note les faces par les sommets du graphe qui les entourent, ainsi une face formée par un triangle entre trois sommets u, v et w sera notée uvw . L'ensemble \mathcal{F} des faces peut différer selon les représentations, comme le montre la Figure 1.16.

Un des premiers résultats sur les graphes planaires est la formule d'Euler qui lie le nombre de sommets d'un graphe planaire, son nombre d'arêtes, de composantes connexes et son nombre de faces :

Théorème 1.1 (Formule d'Euler). *Soit P une représentation d'un graphe planaire G , avec n sommets, m arêtes, c composantes connexes et f faces. On a :*

$$n - m = 1 + c - f$$

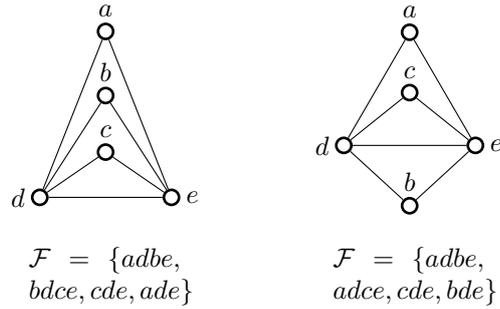


FIGURE 1.16 – Deux représentations d’un même graphe planaire pour lesquelles les ensembles des faces diffèrent.

1.3 Les hypergraphes, une généralisation des graphes

Les hypergraphes sont obtenus par la généralisation du concept d’arête d’un graphe.

Un *hypergraphe* \mathcal{H} est un couple (X, \mathcal{F}) , où X est un ensemble fini de sommets et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est un ensemble d’*hyperarêtes*.

De nombreux paramètres de graphes admettent une généralisation pour les hypergraphes. La définition de l’ordre et la taille d’un hypergraphe sont similaires au cas des graphes, le degré et le voisinage de sommets d’un hypergraphe se définissent respectivement comme le nombre d’hyperarêtes qui contiennent un sommet et comme l’ensemble des sommets qui appartiennent à une même hyperarête qu’un sommet.

Puisque les hypergraphes sont des généralisations des graphes, on pourrait penser que leur puissance représentative est bien plus élevée. Cependant, les hypergraphes peuvent être représentés par des graphes bipartis, ce qui prouve que la généricité de ces deux concepts est équivalente. En effet, un hypergraphe \mathcal{H} d’ensemble de sommets $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et d’ensemble d’hyperarêtes $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ peut être représenté par le graphe biparti G dont les partitions des sommets sont $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ et où deux sommets u_i et v_j forment une arête si et seulement si $x_i \in A_j$. La Figure 1.17 représente un hypergraphe et sa représentation par un graphe biparti.

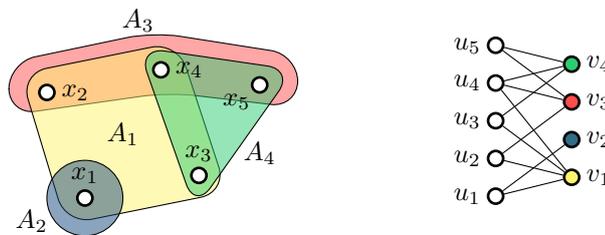


FIGURE 1.17 – Représentation d’un hypergraphe et du graphe biparti associé.

2 Classes de complexité

Introduire formellement la théorie de la complexité nécessiterait de définir les notions de machine de Turing et de langages formels. Ces notions sont assez complexes et la compréhension de cette thèse ne nécessite pas leur connaissance. Nous allons donc donner une définition algorithmique et moins formelle des classes de complexité. Pour de plus amples informations sur la théorie des langages formels et la théorie de la complexité, le lecteur peut se référer au livre "Introduction to the Theory of Computation" de Michael Sipser [106] qui est une excellente introduction à ces deux domaines.

Nous allons nous intéresser à un certain type de problèmes : les *problèmes de décision*. Un problème de décision est constitué d’un type d’instance et d’une question que l’on peut poser sur ces instances. Cette question doit pouvoir être répondue par OUI ou par NON. Ainsi le problème CHEMIN HAMILTONIEN, explicité ci-dessous, est un problème de décision.

CHEMIN HAMILTONIEN

Instance : Un graphe G

Question : Existe-t-il un chemin passant par tous les sommets de G une et une seule fois ?

La classe P

La complexité d'un problème correspond à l'efficacité d'un meilleur algorithme pouvant exister et le résolvant. Cette efficacité peut se calculer en nombre d'étapes pour résoudre le problème ou en espace mémoire nécessaire, et elle se calcule par rapport à la taille de l'entrée. Une *classe de complexité* est un ensemble de problèmes partageant une condition sur leur complexité. Ainsi, la classe de complexité P regroupe l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme donnant la solution en un nombre polynomial d'étapes par rapport à la taille de l'entrée.

La question de la taille de l'entrée est justement fondamentale. Considérons le problème PREMIER défini ci-dessous :

PREMIER

Instance : Un nombre n

Question : Le nombre n est-il premier ?

Un algorithme naïf pour tester si un nombre n est premier est d'essayer de le diviser par tous les nombres entre 2 et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. En supposant que la division se fasse en temps constant, le nombre d'étapes nécessaires pour déterminer si un nombre est premier est de l'ordre de \sqrt{n} . Cependant, le stockage d'un nombre en mémoire ne prend pas autant de place que la taille de ce nombre, seulement $\lceil \log_2(n) \rceil$ bits sont nécessaires au stockage du nombre n . Ainsi, cet algorithme naïf a une complexité de l'ordre de $2^{\log_2(n)/2}$ et est donc exponentiel en la taille de l'entrée. Il a été prouvé en 2002 que le problème PREMIER est bien dans P, avec l'algorithme AKS [2] qui le résout en temps $\mathcal{O}(\log_2(n)^{12})$.

Une question qui peut dès lors se poser est celle de la taille de l'entrée des graphes. Une manière de stocker un graphe d'ensemble de sommets $\{1, 2, \dots, n\}$ en mémoire consiste à stocker sa *matrice d'adjacence*, c'est-à-dire la matrice $(m_{i,j})_{i,j \leq n}$ où $m_{i,j}$ vaut 1 si il y a une arête entre le sommet i et le sommet j , et vaut 0 sinon. Si l'entrée d'un problème est une matrice d'adjacence, la taille de l'entrée est donc n^2 . Si m , le nombre d'arêtes, est suffisamment faible, il peut être plus intéressant de stocker explicitement toutes les arêtes dans une liste ou un tableau, dans ce cas il faut garder en mémoire les identifiants de tous les sommets, la taille de l'entrée peut alors être de l'ordre de $n + m$. Dans ces deux cas, un algorithme étant polynomial en n est polynomial en la taille de l'entrée. Dans la suite, nous considérons donc qu'un problème de graphe est dans P si il existe un algorithme polynomial en l'ordre du graphe le résolvant.

Un souci concernant la classe P est qu'elle est souvent considérée comme la classe des problèmes "faciles", ou "rapides", cependant l'appartenance à cette classe peut parfois cacher des degrés de polynômes absurdement élevés. Certains algorithmes polynomiaux, bien que plus efficaces en théorie que leur homologues exponentiels, sont inutilisables en pratique. C'est pourquoi il y a une hiérarchie de complexité au sein même de la classe P et les problèmes pouvant être résolus en temps linéaire sont tous de cette hiérarchie.

La classe NP

La classe de complexité NP correspond à l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels, lorsqu'une instance est VRAI, il existe un certificat de taille polynomiale permettant de vérifier en temps polynomial que la réponse est bien VRAI. Si on reprend le problème CHEMIN HAMILTONIEN, si l'on dispose d'un ordre de sommets induisant un chemin par tous les sommets, cet ordre est bien polynomial et pour vérifier qu'il est correct il suffit de vérifier l'existence des arêtes, ce qui peut aussi se faire en temps polynomial. Le problème CHEMIN HAMILTONIEN est donc dans NP.

Le problème CHEMIN HAMILTONIEN n'est cependant pas le problème qui est le plus souvent associé à la classe NP, ce titre revient au problème SAT ci-dessous. Notons qu'une formule logique est sous forme normale conjonctive si elle s'exprime comme la conjonction de clauses qui sont des disjonctions, par exemple $(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)$, où les x_i sont des variables booléennes.

SAT

Instance : Un ensemble de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ et une formule logique F sous forme normale conjonctive sur ces variables

Question : Existe-t-il une assignation des variables telle que la formule F vaut VRAI ?

On peut montrer que tous les problèmes qui sont dans P sont aussi dans NP. En effet, pour une instance I d'un problème \mathcal{P} de P, il suffit d'un certificat de taille nulle pour vérifier en temps polynomial que I est bien VRAI. La classe \mathcal{P} est donc dans NP.

Il est conjecturé que les classes P et NP ne sont pas égales, et donc qu'il existe des problèmes de NP, tels que CHEMIN HAMILTONIEN ou SAT, qui n'appartiennent pas à P. Cette conjecture est l'un des problèmes ouverts les plus importants de l'informatique théorique et fait partie des sept *problèmes du prix du millénaire*.

Problèmes NP-difficiles, NP-complets

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il est conjecturé que certains problèmes de NP sont "plus difficiles" que les problèmes de P. Cette notion de degré de difficulté entre des problèmes peut s'exprimer à travers la notion de *réduction*. Un problème X se réduit à un problème Y s'il existe un algorithme A qui à toute instance I_X de X associe une instance I_Y de Y telle que I_Y est VRAI si et seulement si I_X l'est. La complexité de la réduction correspond à la complexité de l'algorithme A et à la taille de l'instance Y résultante par rapport à la taille de l'instance I_X . Ainsi, si A est de complexité polynomiale et que I_Y est de taille polynomiale par rapport à I_X , la réduction est polynomiale.

L'idée est que si le problème X peut se réduire au problème Y avec une complexité plus faible que celle de X , alors le problème Y est au moins aussi dur que le problème X . En effet, supposons qu'un problème X nécessite un temps exponentiel pour être résolu mais qu'il puisse se réduire, avec une réduction polynomiale, à un problème Y qui ne nécessite qu'un temps polynomial pour être résolu. Alors, un algorithme pour résoudre une instance I_X de X consiste à la réduire à une instance I_Y de Y et à appliquer un algorithme polynomial sur I_Y , ce qui donne aussi une solution pour I_X . Toutes ces étapes se font en temps polynomial et cela donnerait un algorithme polynomial pour résoudre X , ce qui contredit l'hypothèse que X nécessite un algorithme exponentiel. Ainsi, Y est bien au moins aussi difficile que X .

C'est à partir de cette idée qu'a été définie la classe des problèmes NP-difficiles, la classe des problèmes tels que tous les problèmes de NP puissent s'y réduire en temps polynomial ou, dit autrement, la classe des problèmes au moins aussi difficiles que tous les problèmes de NP. Cette classe permet de définir la classe des problèmes NP-complets, qui sont les problèmes qui appartiennent à NP et sont NP-difficiles. L'existence de problèmes NP-complets a été prouvée en 1971 par Cook [42], qui a montré que le problème SAT était NP-complet.

À présent que nous disposons d'un problème NP-complet, il est bien plus aisé de prouver que d'autres problèmes le sont. Pour prouver qu'un problème X est NP-complet, il suffit de prouver qu'il est dans NP et qu'un autre problème NP-complet Y se réduit à X . En effet, comme tous les problèmes de NP se réduisent à Y en temps polynomial, car il est NP-complet, et que Y se réduit à X , tous les problèmes de NP se réduisent à X .

La classe des problèmes NP-complets, notée NP-c, est intéressante car pour prouver que $P = NP$, il suffirait de montrer qu'un problème NP-complet est polynomial. Cependant, comme il est conjecturé que $P \neq NP$, le fait qu'un problème est NP-complet est aussi un bon argument pour supposer qu'il n'existerait pas d'algorithme polynomial pour le résoudre.

Nous n'avons pour l'instant parlé que des problèmes de décision mais un autre type de problème peut aussi intéresser les informaticiens : les *problèmes d'optimisation*. Les problèmes d'optimisation sont ceux qui cherchent à maximiser ou minimiser une certaine mesure et dont la réponse attendue est la valeur optimale de cette mesure. Le problème VOYAGEUR DE COMMERCE ci-dessous est un problème d'optimisation.

VOYAGEUR DE COMMERCE

Instance : Un graphe G muni d'une fonction w de poids sur les arêtes

Solution : Un cycle C passant par tous les sommets de G

Mesure : Minimiser la somme du poids des arêtes de C

Il est usuellement admis que le problème VOYAGEUR DE COMMERCE est NP-complet, cependant VOYAGEUR DE COMMERCE est un problème d'optimisation et non un problème de

décision. Ce qu'on veut dire lorsqu'on fait cette affirmation, c'est que le problème VOYAGEUR DE COMMERCE - DÉCISION est NP-complet.

VOYAGEUR DE COMMERCE - DÉCISION

Instance : Un graphe G muni d'une fonction w de poids sur les arêtes et un réel W .

Question : Existe-t-il un cycle C passant par tous les sommets de G et tel que la somme du poids des arêtes de C est inférieure à W ?

Il est clair qu'obtenir un algorithme polynomial pour résoudre VOYAGEUR DE COMMERCE permettrait de résoudre VOYAGEUR DE COMMERCE - DÉCISION en temps polynomial, la complexité de ce problème est donc au moins aussi grande que pour son équivalent en problème de décision. De même, lorsqu'on souhaite étudier la complexité d'un problème d'optimisation, on commence bien souvent par le transformer en problème de décision.

La classe PSPACE

La classe de complexité PSPACE concerne, quant à elle, la complexité en espace. Un problème de décision est dans PSPACE s'il existe un algorithme le résolvant en utilisant un espace mémoire polynomial par rapport à la taille de l'entrée.

La classe NP est incluse dans la classe PSPACE. En effet, soit \mathcal{P} un problème de NP et soit I une instance de \mathcal{P} . Comme \mathcal{P} est dans NP, si I est VRAI alors il existe un certificat c de taille polynomiale permettant de vérifier en temps polynomial que c'est bien le cas. Un algorithme pour résoudre \mathcal{P} en espace polynomial consiste à, itérativement, essayer tous les certificats possibles et appliquer la vérification de ces certificats. À chaque fois qu'un certificat ne permet pas de vérifier que I est VRAI, ce certificat ainsi que l'espace mémoire utilisé pour sa vérification sont effacés. Si un certificat permet de vérifier I c'est que cette instance est VRAI, si, au contraire, aucun certificat ne permet de vérifier I , c'est donc que cette instance vaut FAUX. Comme les certificats sont de tailles polynomiales et que l'on prend un temps polynomial pour les vérifier, l'espace pris par cet algorithme est aussi polynomial. Le problème \mathcal{P} est donc bien dans PSPACE.

Similairement à la classe des problèmes NP-complets, il est possible de définir les problèmes PSPACE-complets, les problèmes de PSPACE qui sont au moins aussi difficiles que tout autre problème de PSPACE. Ainsi, tout comme SAT est le problème de base de la classe NP et est PSPACE-complet, le problème TQBF remplit ce rôle pour PSPACE. Il s'agit aussi d'un problème de satisfaction d'une formule sous forme normale conjonctive mais la différence se fait sur les quantificateurs :

TQBF

Instance : Un ensemble ordonné de variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et une formule F sous forme normale conjonctive sur ces variables

Question : La formule $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \dots F$ vaut-elle VRAI ?

La classe PSPACE est aussi la classe de complexité par excellence des jeux combinatoires (jeux à deux joueurs et à information complète). En effet, l'alternance des quantificateurs de TQBF correspond parfaitement à l'existence d'une stratégie gagnante : "pour tous les coups de mon adversaire, il existe un coup tel que pour tous les coups de mon adversaire, il existe un coup tel que ... tel que je gagne la partie". Prenons par exemple le jeu Geography. Dans ce jeu, deux joueurs sélectionnent alternativement des sommets d'un digraphe et le sommet sélectionné doit être un voisin sortant du sommet antérieur. Un sommet ne peut pas être sélectionné deux fois et le joueur qui ne peut plus jouer perd la partie. À l'origine ce jeu était joué avec des noms de pays, chaque joueur devant trouver un pays commençant par la lettre qui terminait le pays précédant. Le problème de décision GEOGRAPHY, associé au jeu Geography est un problème PSPACE-complet comme l'a prouvé Schaeffer en 1978 [104].

GEOGRAPHY

Instance : Un graphe orienté D

Question : Le premier joueur a-t-il une stratégie gagnante pour le jeu Geography sur D ?

D'autres classes de complexité

La théorie de la complexité est un domaine riche et de nombreuses autres classes existent et font l'objet d'études approfondies. Nous pouvons citer EXP, la classe des problèmes pouvant

être résolu en temps exponentiel, ou LOGSPACE la classe des problèmes pouvant être résolus en espace logarithmique. Il y a aussi des classes de complexité dont le principe diffère des classes que nous avons citées dans ce chapitre, comme BPP qui est la classe des problèmes qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme probabiliste avec une probabilité d'erreur bornée, ou encore la classe FPT des problèmes qui peuvent être résolus en temps polynomial en fixant un certain paramètre.

3 Problèmes de domination : des exemples de couverture de sommets dans les graphes

Cette thèse porte sur la couverture de sommets dans des structures discrètes. L'expression la plus générale de ce problème se fait dans les hypergraphes avec le *problème de couverture par ensembles* :

Définition 1.2. Soit $\mathcal{H} = (X, \mathcal{F})$ un hypergraphe. Un sous-ensemble d'hyperarêtes \mathcal{F}' couvre X si $\bigcup_{A \in \mathcal{F}'} A = X$. Le *problème de couverture par ensembles* consiste à trouver la taille minimum d'un sous-ensemble couvrant.

Il s'agit d'un problème très difficile à résoudre. En effet, Karp a prouvé en 1972 qu'il était NP-complet [90] et, en 2014, Dinur et Steuter ont prouvé qu'il n'existait pas d'algorithme donnant une approximation de la solution optimale à moins d'un facteur $\ln(n)$ [48] (à condition que $P \neq NP$).

Cependant, dans la plupart des instances de ce problème, il y a des contraintes sur les hyperarêtes dues à une structure sous-jacente. Par exemple, le *problème de couverture par arêtes* consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes dans un graphe de telle sorte que chaque sommet soit l'extrémité d'au moins une arête sélectionnée. Il s'agit bien d'un sous-cas du problème de couverture par ensembles car il s'agit du cas où chaque hyperarête contient exactement deux sommets. Dans cette situation, il a été montré que le problème pouvait se résoudre en temps polynomial [88].

Toutefois, tous les problèmes sur les graphes qui sont des sous-cas du problème de couverture par ensembles ne sont pas aussi simples. Le *problème de couverture par cliques* est aussi un sous-problème de la couverture par ensembles et il est NP-complet comme l'a prouvé Karp dans le même article que celui où il prouve la complexité du problème de couverture par ensembles [90]. Dans ce problème, on cherche à couvrir un graphe par un nombre minimum de cliques sur ce graphe. Il s'agit bien d'un sous-cas de la couverture par ensembles car on peut créer l'hypergraphe sur le même ensemble de sommets et dont les hyperarêtes sont formées par toutes les cliques et on se ramène alors au même problème.

Un autre sous-cas du problème de couverture par ensembles que nous allons développer plus en détails dans ce chapitre est celui du problème de la domination dans les graphes.

3.1 La domination dans les graphes

Le problème de la domination peut s'expliquer de manière informelle en imaginant un problème de surveillance dans un réseau. Nous souhaitons surveiller l'ensemble des nœuds d'un réseau en plaçant des capteurs sur certains des nœuds. Un capteur est capable de détecter une erreur sur le nœud sur lequel il est placé ou sur les nœuds qui communiquent avec ce nœud. Afin de surveiller tout le réseau, il faut donc que chaque nœud dispose d'un capteur ou qu'il communique avec un nœud ayant un capteur.

Si on généralise ce problème aux graphes en général, cela donne la définition suivante :

Définition 1.3 (Ore, 1962 [101]). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *ensemble dominant* S de G est un ensemble de sommets de G tel que $\bigcup_{u \in S} N[u] = V$. La taille d'un ensemble dominant minimum de G est appelée *nombre de domination* de G et est notée $\gamma(G)$.

Ce problème est bien un sous-cas du problème de couverture par ensembles car on peut construire l'hypergraphe sur le même ensemble de sommets et dont les hyperarêtes sont constituées par les voisinages fermés de chaque sommet, et on obtient alors le même problème.

La Figure 1.18 donne un exemple d'un ensemble dominant d'un graphe.

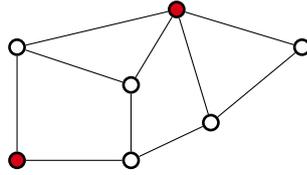


FIGURE 1.18 – Le graphe G et un ensemble dominant de taille minimum. Les sommets en rouge font partie de l'ensemble dominant.

Nous n'aborderons dans cette partie qu'une fraction de ce qu'il y a à dire sur le domaine de la domination dans les graphes. Pour plus d'informations à ce sujet, le lecteur peut se référer au livre "Fundamentals of domination in graphs" de Haynes, Hedetniemi et Slater [72].

Bien que le concept de domination ait été introduit auparavant, notamment en lien avec des problèmes de dames couvrant toutes les cases d'un échiquier, c'est Ore en 1962 [101] qui a introduit les termes d'"ensemble dominant" et de "nombre de domination". C'est aussi à lui que nous devons le résultat suivant :

Théorème 1.4 (Ore, 1962 [101]). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. On a $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.*

La preuve n'étant pas très longue, nous la réécrivons ici à des fins de complétude.

Démonstration. Soit S un ensemble dominant de G minimal au sens de l'inclusion, alors $S' = V(G) \setminus S$, l'ensemble des sommets de G qui n'appartiennent pas à S , est aussi un ensemble dominant de G . En effet, supposons qu'un sommet u de G ne soit pas dominé par S' , cela signifie qu'aucun sommet du voisinage fermé de u n'appartient à S' , et donc qu'ils appartiennent tous à S . Comme G connexe est d'ordre supérieur ou égal à deux, u n'est pas le seul sommet de son voisinage et il n'est donc pas nécessaire à la domination de G par S . L'ensemble $S \setminus \{u\}$ est aussi un ensemble dominant, ce qui est une contradiction avec la minimalité de S .

Les ensembles S et $V(G) \setminus S$ sont donc tous les deux des ensembles dominants de G et au moins l'un d'entre eux est de taille inférieure ou égale à $\frac{n}{2}$, donc $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$. \square

Cette borne est notamment atteinte lorsqu'on transforme un graphe G en rajoutant une feuille à chacun de ses sommets. Pour dominer le graphe G' ainsi obtenu, un ensemble dominant doit, pour chaque feuille f , contenir un sommet dans le voisinage de f . On a donc bien $\gamma(G') = \frac{|V(G')|}{2}$.

Un autre résultat fondamental concerne la complexité du problème de décision :

ENSEMBLE DOMINANT

Instance : Un graphe G et un entier k

Question : Le nombre de domination de G est-il inférieur ou égal à k ?

Garey et Johnson ont prouvé en 1979 [60] que le problème ENSEMBLE DOMINANT était NP-complet dans le cas général. Dans un article de 1990, Corneil et Stewart [44] résume les résultats de complexité concernant la domination. En particulier, ENSEMBLE DOMINANT est NP-complet sur les graphes bipartis et les graphes cordaux mais polynomial sur les arbres et les cographes.

Nous allons à présent détailler deux problèmes de domination dans les graphes liés à des questions que nous aborderons ultérieurement dans cette thèse.

Conjecture de Vizing

En 1968, après l'étude du comportement de plusieurs paramètres de graphes en relation avec le produit cartésien, Vizing [108] a proposé la conjecture suivante sur le nombre de domination du produit cartésien de deux graphes :

Conjecture 1.5 (Vizing, 1968 [108]). *Soit G et H deux graphes, on a $\gamma(G)\gamma(H) \leq \gamma(G \square H)$.*

Il s'agit du problème concernant la domination qui suscite le plus d'intérêt encore aujourd'hui. Plusieurs approches ont été proposées pour tenter de prouver cette conjecture. L'une d'entre elles consiste à partitionner G en plusieurs sous-graphes d'un certain type. Cette méthode a permis à Barcalkin et German en 1979 [12] puis à Hartnell et Rall en 1995 [71] de prouver

que la conjecture de Vizing est vérifiée pour de larges classes de graphes. En 2009, Brešar et Rall [30] ont introduit le *nombre de domination équitable* qui permet de borner le nombre de domination du produit cartésien de deux graphes. Ce paramètre a permis à Aharoni et Szabò [3] de prouver, la même année, que la conjecture Vizing est vérifiée si G est cordal. Plutôt que de prouver que la conjecture est vraie pour certaines classes de graphes, une autre approche consiste à montrer que $\gamma(G)\gamma(H) \leq c\gamma(G \square H)$ pour un certain nombre c et à tenter de faire tendre c vers 1. Dans cette direction, Clark et Suen ont prouvé, en 2000, que pour tout graphes G et H , $\gamma(G)\gamma(H) \leq 2\gamma(G \square H)$.

La conjecture de Vizing a aussi été l'une des motivations de la création du jeu de domination, problème que nous abordons dans le chapitre 3. Dans le chapitre 5 nous abordons un problème similaire à la conjecture Vizing pour le paramètre du nombre géodésique fort, et essayons de borner le nombre géodésique fort du produit cartésien de graphes.

Nombre de domination de la grille

Caractériser le nombre de domination du produit cartésien de deux graphes est non trivial dans le cas général. Cependant, on peut s'intéresser au produit cartésien de graphes simples, les chemins, et ainsi étudier le nombre de domination des grilles.

Un premier résultat que l'on peut prouver sur le nombre de domination de la grille $G_{n,m}$ concerne la densité du nombre de domination dans la grille infinie, soit la valeur de $\frac{\gamma(G_{n,m})}{|V(G_{n,m})|}$ pour n et m tendant vers l'infini. On peut montrer que la densité est de $\frac{1}{5}$. La Figure 1.19 montre que l'on peut paver la grille infinie par des croix dont le centre est un sommet de l'ensemble dominant, et dominer optimalement toute la grille.

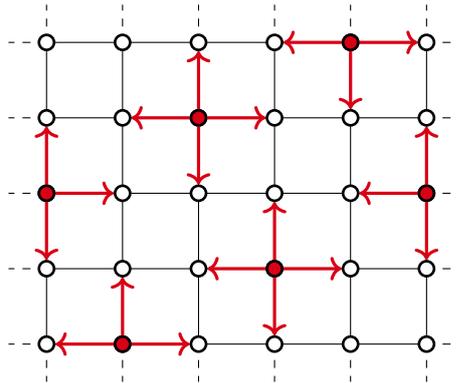


FIGURE 1.19 – Méthode pour paver la grille avec une densité de $\frac{1}{5}$. Les sommets en rouge font partie de l'ensemble dominant et les flèches indiquent les sommets qu'ils dominent.

La difficulté du nombre de domination de la grille concerne donc plutôt sa valeur exacte. Les premiers résultats dans ce sens ont été donnés en 1983 par Jacobson et Kinch [86] qui ont caractérisé le nombre de domination des grilles $G_{2,n}$, $G_{3,n}$ et $G_{4,n}$. La thèse de Chang, publiée en 1992 [38], porte sur l'étude du nombre de domination des grilles. Il y conjecture que pour $16 \leq n \leq m$, $\gamma(G_{n,m}) = \lceil \frac{(n+2)(m+2)}{5} \rceil - 4$. En 1993, Fisher [56] utilise une méthode informatique pour trouver le nombre de domination des grilles $G_{n,m}$ avec $n \leq 21$. Enfin, récemment en 2011, Gonçalves *et al.* [67], aussi à l'aide d'outils informatiques, finissent la caractérisation des grilles et prouvent la conjecture de Chang.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à une variante du nombre de domination, le nombre de domination de puissance, et à sa valeur pour les grilles triangulaires et les grilles carrées de dimensions supérieures.

3.2 La domination totale

La domination totale est une variante très étudiée du problème de domination. Ce problème est similaire au problème de domination à ceci près qu'un sommet ne peut pas se dominer lui-même. Une définition formelle de ce problème est la suivante :

Définition 1.6 (Cockayne, Dawes et Hedetniemi, 1980 [41]). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *ensemble dominant total* S de G est un ensemble de sommets de G tel que pour tout sommet u de G il existe un sommet v de S appartenant au voisinage ouvert de u . La taille d'un ensemble dominant total minimal de G est appelée *nombre de domination total* de G et est notée $\gamma_t(G)$.

La Figure 1.20 donne l'exemple d'un ensemble dominant total. Le graphe de cette figure est le même que celui de la Figure 1.18 qui illustrait la domination. On peut remarquer que dans le cas de la domination totale, il faut un sommet de plus pour couvrir tout graphe.

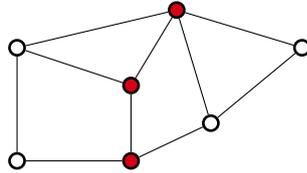


FIGURE 1.20 – Le graphe G est un ensemble totalement dominant de taille minimale. Les sommets en rouge font partie de l'ensemble totalement dominant.

Les problèmes étudiés dans le cadre de la domination totale sont souvent similaires à ceux étudiés pour la domination. On peut ainsi citer Henning et Rall qui, en 2005 [80], ont étudié un problème du type de la conjecture de Vizing, et Gravier qui, en 2002 [68], a étudié le nombre de domination total des grilles et des produits de chemins.

3.3 Autres problèmes de domination

Pour terminer ce chapitre, nous citons quelques variantes du problème de domination qui sont notamment étudiées en lien avec la conjecture de Vizing. Ainsi, nous pouvons mentionner le problème de la *domination fractionnaire* dans lequel on donne à chaque sommet un poids réel entre 0 et 1 et la somme du poids des voisinages fermés de chaque sommet doit être supérieure ou égale à 1. Nous pouvons aussi parler de la *k-domination entière*, problème très proche dans lequel un poids entier entre 0 et k est donné à chaque sommet et la somme des poids des voisinages fermés doit être supérieure ou égale à k . Enfin, un dernier problème qu'il est intéressant de mentionner est celui du *nombre de domination supérieur* dans lequel on cherche la taille maximale d'un ensemble dominant minimal au sens de l'inclusion.

Chapitre 2

Domination de puissance

Dans ce chapitre, nous étudions la domination de puissance qui est une variante du problème de domination dans laquelle les sommets dominés se propagent, ce qui permet dans bien des cas de diminuer le nombre de sommets dominants initiaux par rapport à la domination classique. Ce problème a été introduit dans le cadre de la surveillance de réseaux électriques mais, par son lien avec le problème très proche des ensembles zéro-forçants, il a aussi des connections avec la physique quantique et l'algèbre.

La domination de puissance a été étudiée sur différents types de grilles et de produits de chemins. Les contributions de ce chapitre s'inscrivent dans cette thématique. Nous présentons un résultat sur le nombre de domination de puissance des grilles triangulaires à bords triangulaires, qui est l'objet d'un article avec Prosenjit Bose, Claire Pennarun et Sander Verdonschot [22]. Ce travail a été effectué à l'occasion d'un échange doctoral avec Claire Pennarun. Nous donnons aussi des pistes pour l'étude des grilles carrées de dimension 3.

1 Présentation du problème

1.1 Définition

La *domination de puissance* est un problème qui a été introduit par Mili *et al.* en 1990 [96] dans le contexte de la surveillance de réseaux électriques, puis a été poursuivi dans ce même contexte par Baldwin *et al.* en 1993 [11]. Le problème que ces travaux cherchaient à résoudre était celui du placement de PMU (phasor measurement units) dans un réseau électrique. Pour des raisons de lois électriques, placer des PMU sur un ensemble restreint de sommets du réseau permet de connaître l'état de tout le système. Cette origine physique donne le nom de notre problème, la domination de puissance étant nommée *power domination* en anglais, en référence aux power grids.

Ce problème a, part la suite, été reformulé en terme de graphes par Haynes *et al.* en 2002 [73]. Nous en donnons à présent une définition dans ce cadre :

Définition 2.1. Étant donné un graphe G et un ensemble $S \subseteq V(G)$, l'ensemble M des sommets *surveillés* de G est défini comme tel : à l'origine, M est constitué du voisinage fermé de S puis on rajoute itérativement des sommets dans M s'ils respectent la règle suivante : un sommet u est ajouté à M s'il a un voisin v qui est dans M et dont tous les voisins sauf u sont dans M . On dit alors que v se *propage* à u . L'ensemble S est un *ensemble dominant de puissance* de G si à la fin de ce processus itératif $M = V(G)$. On appelle *nombre de domination de puissance* de G la taille d'un plus petit ensemble dominant de puissance de G . On note ce paramètre $\gamma_P(G)$.

Dans ce même article, Haynes *et al.* ont prouvé que le calcul de $\gamma_P(G)$ était un problème NP-complet sur les graphes bipartis et cordaux, et qu'il était linéaire sur les arbres.

Une des difficultés de l'étude du nombre de domination de puissance est liée au fait que ce paramètre n'est pas monotone pour l'ajout ou la suppression d'arête. On peut en effet remarquer que le graphe G de la figure 2.1 peut être obtenu en ajoutant des arêtes à P_6 ou en retirant à K_6 et pourtant on a $\gamma_P(P_6) = \gamma_P(K_6) = 1$ et $\gamma_P(G) = 2$.

Si S est un ensemble dominant de puissance, il existe un ordre de propagation $m_1, \dots, m_{|V(G) \setminus N[S]|}$ (pas nécessairement unique) sur les sommets de $V(G) \setminus N[S]$, ainsi m_i est surveillé après tous les

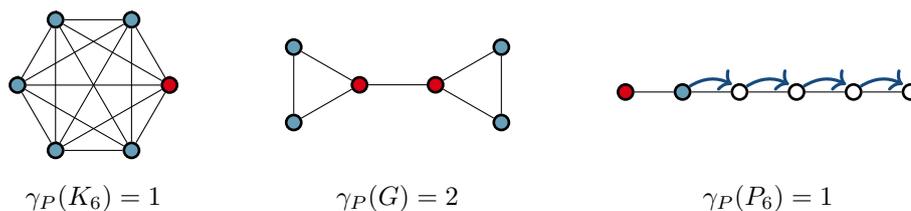


FIGURE 2.1 – Représentation d’ensembles dominants de puissance de tailles minimales pour K_6 , G et P_6 . Les sommets rouges sont dans S , les sommets bleus sont surveillés car ils sont dans le voisinage de sommets de S et les flèches bleues indiquent les propagations qui auront lieu pour surveiller tout le graphe.

sommets m_j d’indice inférieur à i et avant tous ceux d’indice supérieur. On définit alors $M[t]$ comme l’ensemble des sommets surveillés après l’étape t de propagation, c’est à dire qu’on a $M[0] = N[S]$ et $M[t + 1] = M[t] \cup \{m_{t+1}\}$.

1.2 Domination de puissance sur les grilles

La domination de puissance a été particulièrement étudiée sur les grilles régulières et leurs généralisations. En effet, dans un article de 2006, Dorfling et Henning [50] ont donné le nombre de domination de puissance des grilles carrées.

Théorème 2.2 (Dorfling et Henning, 2006 [50]). *Soit $G_{n,n}$ une grille carrée de côté n , on a*

$$\gamma_P(G_{n,n}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & \text{si } n \equiv 4[8] \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus tard Dorbec *et al.* ont étudié d’autres produits de chemins en 2008 [49]. Dans leur article, les auteurs donnent la valeur du nombre de domination de puissance pour le produit fort de chemin, ce qui correspond à la grille du roi, ils ont aussi donné la valeur pour tout sous graphe connexe de la grille classique ainsi que la valeur de tout produit lexicographique de graphes.

La grille hexagonale a été résolue par Ferrero, Varghese et Vijayakumar en 2011 [55]. Ils montrent en effet que pour une grille hexagonale HM_n de côté n , on a $\gamma_P(HM_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Les cylindres et les tores ont, quant à eux, été étudiés par Barrera et Ferrero en 2010[13].

Ces résultats sont particulièrement intéressants lorsqu’on les compare avec ceux de la domination classique pour les mêmes classes de graphes. Par exemple, la valeur exacte du nombre de domination des grilles carrées est restée longtemps un problème ouvert et n’a été résolu que récemment par Gonçalves *et al.* [67] avec une preuve par ordinateur.

Ces résultats font aussi grandement appel à la propagation : il est généralement suffisant de surveiller, avec les sommets initiaux, une petite portion du graphe pour le surveiller entièrement au final. Plus particulièrement, les grilles définies par la taille n de leur côté ont un nombre quadratique de sommets, mais dans tous les cas cités précédemment, le nombre de domination de puissance est linéaire en n , contrairement au nombre de domination, lui aussi quadratique.

En s’éloignant des grilles mais en restant dans les graphes de produits, Dean *et al.* ont donné des bornes en 2011 [46] sur le nombre de domination de puissance des hypercubes. Ils ont aussi conjecturé que pour tout n le nombre de domination de puissance de l’hypercube de dimension $n + 1$ était égal au nombre de domination de l’hypercube de dimension n . Cette conjecture a été démentie en 2012 par Pai et Chiu [103] qui donnent la valeur du nombre de domination de puissance des hypercubes pour des petites valeurs de n .

Dans ce chapitre nous allons continuer l’étude des grilles avec les grilles triangulaires et les grilles carrées de dimension 3.

1.3 Ensembles zéro-forçants

Introduit par le groupe de recherche *AIM Minimum Rank - Special Graphs Work Group* en 2008 dans le contexte de la théorie des graphes algébrique [4], le concept d'*ensemble zéro-forçant* est étroitement lié à celui de domination de puissance. En effet, un ensemble S de sommets d'un graphe G est dit *zéro-forçant* si, sans phase de domination et avec les mêmes règles de propagation que pour la domination de puissance, tous les sommets du graphe G finissent par être surveillés. Le *nombre zéro-forçant* de G , $Z(G)$ est le nombre de sommets d'un ensemble zéro-forçant de taille minimale. Ce paramètre a aussi été introduit indépendamment dans le domaine de la physique quantique par Burgarth et Giovannetti en 2007 [34] et dans le domaine d'algorithmes de recherche par Yang en 2013 [110].

Dans l'article introduisant ce paramètre [4], les auteurs donnent des bornes sur le nombre zéro-forçant de produits cartésiens de graphes et la valeur exacte de ce paramètre pour plusieurs classes de graphes, comprenant notamment les grilles, les grilles triangulaires à bord triangulaires et les grilles du roi. Par la suite, dans son manuscrit de thèse de 2008, Aazami [1] a prouvé que le problème de décision associé au nombre zéro-forçant est NP-complet.

Le lien fort qui existe entre le problème de domination de puissance et le problème zéro-forçant peut être utilisé pour obtenir des résultats sur ces paramètres. En particulier, en 2011 Dean *et al.* [46] ont utilisé des résultats sur le nombre zéro-forçant pour donner une borne inférieure sur le nombre de domination de puissance des hypercubes. Plus récemment, en 2018 Benson *et al.* [17] ont donné le nombre de domination de puissance du produit cartésien d'un chemin et d'une clique en se servant du nombre zéro-forçant mais ils ont aussi utilisé le nombre de domination de puissance, et en particulier les résultats de Dorbec *et al.* [49], pour donner la valeur exacte du nombre zéro-forçant du produit lexicographique de deux graphes.

Ainsi, bien que nous n'en ferons pas l'usage dans ce chapitre, le lien étroit entre le nombre zéro-forçant et le nombre de domination de puissance, et en particulier la dualité entre combinatoire et algèbre, semble être un outil intéressant dans l'étude de ces deux paramètres.

2 Grille triangulaire

Tournons nous à présent vers le résultat principal de ce chapitre, le nombre de domination de puissance des *grilles triangulaires à bord triangulaire*. Une *grille triangulaire à bord triangulaire* T_k est le graphe d'ensemble de sommets $V(T_k) = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, \dots, k-1\}, x+y+z = k-1\}$ et où deux sommets de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') sont adjacents si et seulement si $|x' - x| + |y' - y| + |z' - z| = 2$ (remarquons que comme $x + y + z = k - 1$ cela signifie que deux sommets sont adjacents si et seulement si exactement deux de leurs coordonnées diffèrent de 1). La figure 2.2 donne une illustration du graphe T_5 . Les sommets dont au moins l'une des coordonnées est 0 sont des sommets *sur le bord* tandis que les autres sont des sommets *internes*.

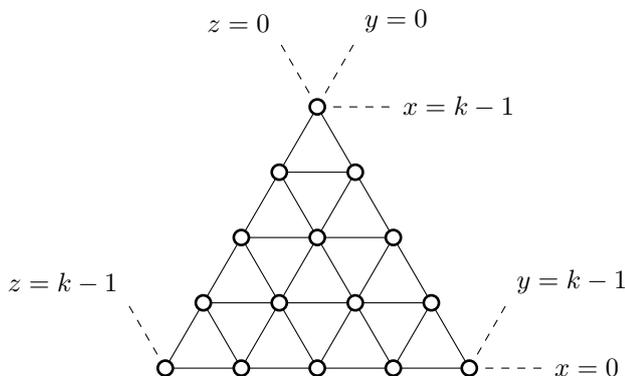


FIGURE 2.2 – La grille triangulaire T_5 .

Nous donnons la valeur exacte du nombre de domination de puissance des grilles triangulaires à bords triangulaires.

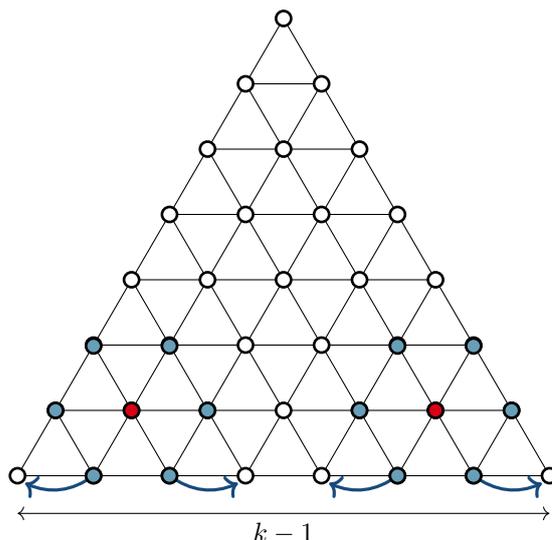


FIGURE 2.3 – Un ensemble dominant de puissance de taille minimum pour la grille T_8 . Les sommets rouges sont dans S et les sommets bleus sont dans $N(S)$. Après la propagation de quatre sommets, symbolisée par les flèches bleues, la ligne $x = 0$ est entièrement surveillée.

Théorème 2.3 (Bose, G., Pennarun et Verdonschot, 2018+ [22]). *Soit T_k une grille triangulaire à bords triangulaires de taille $k - 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\gamma_P(T_k) = \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$.*

On va supposer dans toute cette partie que $k > 4$: observons que si $k \leq 4$, alors $\gamma_P(T_k) = 1$, avec $S = \{(1, 0, 1)\}$ pour $k \in \{2, 3\}$ et $S = \{(1, 1, 1)\}$ pour $k = 4$. Pour prouver le théorème 2.3, nous prouvons dans la partie 2.1 que $\frac{k}{4}$ est une borne supérieure pour $\gamma_P(T_k)$ en donnant une construction puis, dans la partie 2.2, nous prouverons que c'est une borne inférieure à l'aide d'un invariant. Cette dernière étape contient les aspects les plus techniques de la preuve.

2.1 Borne supérieure

Lemme 2.4. *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_P(T_k) \leq \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$.*

Démonstration. Remarquons dans un premier temps qu'il suffit de surveiller la ligne $x = 0$ de la grille (c'est-à-dire la ligne la plus basse) pour surveiller toute la grille. En effet, le sommet de coordonnées $(0, k - 1, 0)$ peut alors se propager au sommet $(1, k - 2, 0)$, puis celui de coordonnées $(0, k - 2, 1)$ peut se propager et ainsi de suite jusqu'à ce que la ligne $x = 1$ soit entièrement surveillée. On peut ensuite appliquer la même méthode à cette ligne.

Soit $\alpha = \lceil k/4 \rceil$ et soit S' l'ensemble défini comme suit : $S' = \{v = (x, y, z) \mid x = 1, y = 1 + 4i, 0 \leq i < \alpha\}$. Si $k \equiv 0[4]$, alors $S = S'$. Sinon, $S = S' \cup \{(1, k - 2, 0)\}$ (on peut aisément vérifier que dans ce cas, le sommet $(1, k - 2, 0)$ n'est pas déjà dans S'). On a donc $|S| = \lceil k/4 \rceil$. On peut vérifier que, pour un tel ensemble S , les sommets de $N(S)$ sur la ligne $x = 0$ peuvent se propager à leur voisin non surveillé sur cette ligne. Après ces propagations, la ligne $x = 0$ est entièrement surveillée et la propagation peut se propager à toute la grille. La figure 2.3 donne l'exemple d'un tel ensemble de sommets pour la grille T_8 . Pour toute grille T_k , il existe bien un ensemble dominant de puissance de taille $\lceil \frac{k}{4} \rceil$. On a donc $\gamma_P(T_k) \leq \lceil \frac{k}{4} \rceil$. \square

2.2 Borne inférieure

Pour prouver la borne inférieure, nous allons calculer une quantité Q pour laquelle nous prouvons dans le lemme 2.6 qu'elle ne peut pas croître pendant la propagation. Nous bornons ensuite sa valeur initiale dans le lemme 2.7. Comparer les valeurs initiale et finale de Q nous permettra alors d'obtenir la borne inférieure.

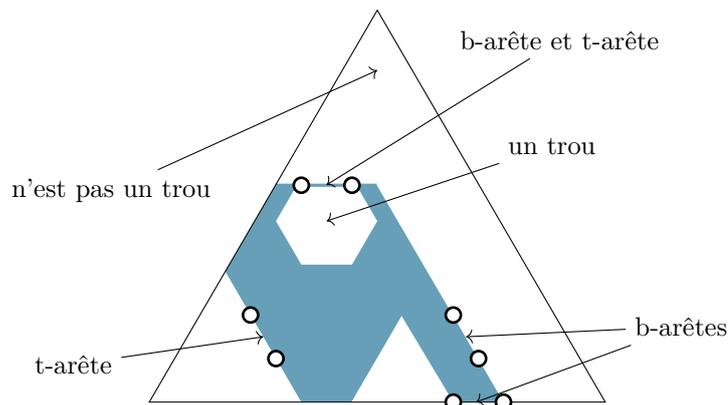


FIGURE 2.4 – Exemples de t -arêtes, de b -arêtes et de trous. L'ensemble M est en bleu.

Avant de définir Q , nous avons besoin d'introduire les notions de t -arête, de b -arête et de trou.

Définition 2.5. Soit M un ensemble de sommets de T_k et soit uv une arête de T_k telle que u et v sont dans M et ont un voisin en commun w qui n'est pas dans M . Si le triangle (uvw) pointe dans la même direction que la grille T_k (c'est-à-dire si la coordonnée commune à u et v augmente pour w), on dit que cette arête est une t -arête de M (arête en direction du sommet ou "tip"). Sinon, ou si cette arête est sur un bord de la grille, cette arête est une b -arête de M . Notons que certaines arêtes peuvent être à la fois des t -arêtes et des b -arêtes de M .

Un trou est une composante connexe de $V(T_k) \setminus M$ qui ne contient pas de sommet sur le bord de la grille.

Les notions de t -arête, de b -arête et de trou sont illustrées dans la figure 2.4.

On note $T(M)$ l'ensemble des t -arêtes, $B(M)$ l'ensemble des b -arêtes, $h(M)$ le nombre de trous de M et $c(M)$ le nombre de composantes connexes de M . On définit la quantité Q que nous calculerons sur l'ensemble des sommets surveillés :

$$Q(M) = 2|T(M)| + |B(M)| + 3c(M) - 3h(M).$$

Prouvons à présent que $Q(M)$ ne croît pas pendant la propagation :

Lemme 2.6. Soit $M[i]$ l'ensemble des sommets surveillés après les i premières propagations. On a $Q(M[i+1]) \leq Q(M[i])$.

Démonstration. Pour des raisons de clarté, nous simplifions les notations $Q(M[i])$, $T(M[i])$, $B(M[i])$, $c(M[i])$ et $h(M[i])$ en Q , T , B , c et h , et les notations $Q(M[i+1])$, $T(M[i+1])$, $B(M[i+1])$, $c(M[i+1])$ et $h(M[i+1])$ en Q' , T' , B' , c' et h' .

Soit x le sommet se propageant à l'étape i et soit y le sommet nouvellement surveillé. Il y a trois cas distincts en fonction des positions de x et y dans la grille (ces cas sont représentés dans les figures 2.5, 2.6 et 2.7) :

1. x et y sont tous les deux des sommets internes,
2. x est un sommet interne et y est sur le bord,
3. x et y sont tous les deux sur le même bord.

Notons que les voisins de x qui ne sont pas adjacents à y ne peuvent pas perdre ou gagner de b -arêtes ou de t -arêtes avec la surveillance de y . Ainsi, la situation où ces sommets sont présents est similaire à la situations où ils ne le sont pas, c'est-à-dire quand x est au bord de la grille. Le cas où x est sur le bord et y est un sommet interne et le cas où x et y ne sont pas sur le même bord sont donc respectivement similaires aux cas 1 et 2.

Cas 1. Soit $x, x_1, y_1, y_2, y_3, x_2$ les voisins de y dans le sens horaire. Sans perdre en généralité, on peut considérer que l'arête xx_1 est une b -arête. Il y a six différents cas à étudier en fonction de l'état des sommets y_1, y_2 et y_3 :

1. Aucun des sommets y_i n'est dans M , alors $|T'| = |T|$ et $|B'| = |B|$, donc $Q = Q$.

2. Si y_1 est le seul sommet dans M , alors $|T'| = |T| - 2$ et $|B'| = |B| + 1$, donc $Q' = Q - 3$.
3. Si y_2 est le seul sommet dans M , alors $|T'| = |T| + 1$ et $|B'| = |B| + 1$, de plus :
 - 3.1 si y_2 n'est pas dans la même composante connexe que x dans M alors l'ajout de y à M décroît le nombre de composantes connexes ; ainsi $c' = c - 1$, et donc $Q' = Q$.
 - 3.2 si y_2 est dans la même composante connexe que x dans M alors l'ajout de y à M crée un nouveau trou (si y ne faisait pas encore partie d'un trou cette opération en crée un contenant y_1 ou y_3 , sinon cette opération divise le trou existant en deux trous). Ainsi $h' = h + 1$, et donc $Q' = Q$.
4. Si y_3 est le seul sommet dans M , alors $|T'| = |T| + 1$ et $|B'| = |B| - 2$, donc $Q' = Q$.
5. Si y_1 et y_2 , y_1 et y_3 , ou y_2 et y_3 sont les seuls sommets dans M , alors $|T'| = |T| - 1$ et $|B'| = |B| - 1$, donc $Q' = Q - 3$.
6. Si tous les sommets sont dans M , alors $|T'| = |T| - 3$, $|B'| = |B| - 3$ et un trou disparaît, donc $Q' = Q - 6$.

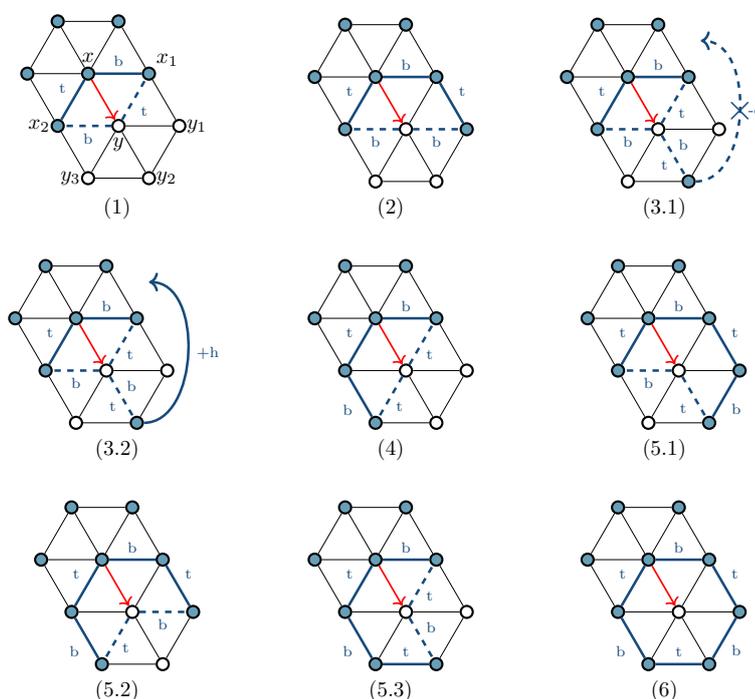


FIGURE 2.5 – Cas 1 de la preuve du lemme 2.6. La propagation du sommet x vers le sommet y est représentée par la flèche rouge. Les sommets bleus sont les sommets de M tandis que ceux en blanc sont les sommets qui n'appartiennent pas à M . Les arêtes retirées à T et à B sont représentées par des traits bleus et épais, celles ajoutées sont représentées par des traits bleus et pointillés. Les arêtes marquées d'un b ou d'un t sont respectivement les b -arêtes et t -arêtes (certaines sont les deux). L'arc marqué par $-c$ indique la diminution du nombre de composantes connexes et celui par $+h$ l'augmentation du nombre de trous. L'indice de chaque sous-figure correspond au cas de la preuve qui est traité.

Cas 2. Soit x, x_1, y_1, x_2 les voisins de y dans le sens horaire. Sans perdre en généralité on peut supposer que xx_1 est une b -arête. Il y a deux cas en fonction du statut de y_1 :

1. Si y_1 n'appartient pas à M , alors $|T'| = |T|$ et $|B'| = |B|$, et donc $Q' = Q$.
2. Si y_1 appartient à M , alors $|T'| = |T| - 2$ et $|B'| = |B| + 1$, et donc $Q' = Q - 3$.

Cas 3. Soit x, x_1, y_1, y_2 les voisins de y dans le sens horaire. Il y a quatre cas en fonction du statut des sommets y_1 et y_2 :

1. Si y_1 et y_2 n'appartiennent pas à M , alors $|T'| = |T| - 1$ et $|B'| = |B| + 2$, et donc $Q' = Q$ (ce cas est similaire au cas où y est dans un coin, que nous n'avons pas considéré dans notre disjonction initiale).

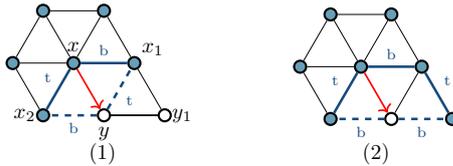


FIGURE 2.6 – Cas 2 de la preuve du lemme 2.6.

2. Si y_1 et y_2 appartiennent à M , alors $|T'| = |T| - 2$ et $|B'| = |B| + 1$, et donc $Q' = Q - 3$.
3. Si y_1 est le seul sommet dans M , alors $|T'| = |T|$ et $|B'| = |B|$, et donc $Q' = Q$.
4. Si y_2 est le seul sommet dans M , alors $|T'| = |T|$ et $|B'| = |B| + 3$, de plus :
 - 4.1 si y_2 est dans la même composante connexe que x dans M , alors l'ajout de y à M crée un nouveau trou, ainsi $h' = h + 1$ et donc $Q' = Q$.
 - 4.2 si y_2 n'est pas dans la même composante connexe que x dans M , alors l'ajout de y décroît le nombre de composantes connexes, ainsi $c' = c - 1$ et donc $Q' = Q$.

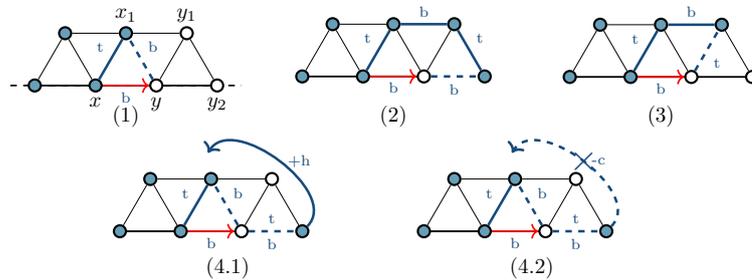


FIGURE 2.7 – Cas 3 de la preuve du lemme 2.6.

Ainsi, la quantité Q ne croît pas durant la propagation. \square

Nous bornons à présent la valeur initiale de $Q(M)$, c'est-à-dire de $Q(M_0) = Q(N[S])$, en fonction du nombre de sommets dans S .

Lemme 2.7. *Soit S un ensemble de sommets d'une grille triangulaire T_k à bord triangulaire. On a $Q(N[S]) \leq 12|S|$.*

Démonstration. Soit S_1, S_2, \dots, S_m la partition de S induisant les composantes connexes de $N[S]$. Par définition, nous avons $Q(N[S]) = \sum_{i=1}^m Q(N[S_i])$. Nous pouvons donc prouver ce résultat indépendamment pour chaque composante connexe et nous supposons donc par la suite que $N[S]$ est connexe.

Soit $G_S = (V_S, E_S)$ le graphe tel que $V_S = S$ et $xy \in E_S$ si et seulement si $N[x] \cap N[y] \neq \emptyset$ et il existe $u, u' \in N[x]$ et $v, v' \in N[y]$ tels que $uv \in T(S)$ et $u'v' \in B(S)$. Ainsi, si x et y sont adjacents dans G_S , alors x et y sont à distance 3 dans T_k et il existe seulement deux configurations possibles pour u, u', v et v' : soit $u = u'$ et $v = v'$, auquel cas on appelle *pont simple* l'arête uv , soit u est un voisin de u' et v est un voisin de v' et on appelle *pont double* cette situation. Ces deux cas sont représentés dans la Figure 2.8. On parlera de *pont* pour désigner le cas où l'on a soit un pont simple soit un pont double.

Nous prouvons à présent que le graphe G_S est planaire. Étant donnée la représentation planaire de T_k , on considère la représentation suivante de G_S dans laquelle les sommets sont dans les mêmes positions que leurs équivalents dans T_k et l'arête xy de G_S suit les segments associés aux arêtes xu, uv et vy dans T_k . Dans la suite, nous utiliserons le terme "arête" pour désigner la courbe associée à l'arête.

Supposons que deux arêtes de G_S se croisent, x_1y_1 et x_2y_2 . Alors au moins un sommet de $\{x_1, u_1, v_1, y_1\}$ coïncide avec un sommet de $\{x_2, u_2, v_2, y_2\}$ dans T_k , sinon cela signifierait que la représentation rectiligne de T_k ne serait pas planaire, ce qui est une contradiction. De plus, les sommets $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ sont adjacents à des sommets qui ne sont pas surveillés, ils ne peuvent donc pas coïncider avec les sommets $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ dont tous les voisins sont surveillés. Puisqu'il

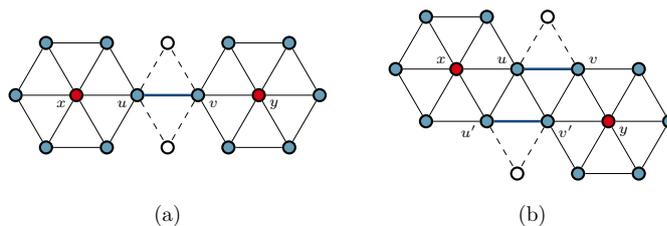


FIGURE 2.8 – (a) L'arête uv est un pont simple. (b) Les arêtes uv et $u'v'$ forment un pont double.

Il y a au moins deux sommets qui coïncident, par définition de l'intersection de chemins, au moins l'une des coïncidences est entre un sommet de $\{u_1, v_1\}$ et un sommet de $\{u_2, v_2\}$.

Nous prouvons à présent que les deux ponts formés par x_1 et y_1 , et x_2 et y_2 ne peuvent se croiser, en fonction du type de pont qu'ils forment :

- x_1 et y_1 et x_2 et y_2 forment des ponts simples : on peut supposer sans perdre en généralité que u_1 coïncide avec u_2 . Alors x_1 coïncide avec x_2 , car c'est le seul voisin de u_1 dont tous les voisins sont surveillés, et v_1 coïncide avec v_2 , car c'est le seul voisin surveillé de u_1 avec qui il partage deux voisins non surveillés. Similairement, y_1 coïncide avec y_2 et ces deux arêtes ne sont pas distinctes dans G_S , ce qui est une contradiction.
- L'un est pont simple et l'autre est un pont double : on peut supposer sans perdre en généralité que x_1 et y_1 forment le pont simple. Alors u_1 et v_1 ont deux voisins communs non surveillés et ils ne peuvent donc pas coïncider avec u_2 ou v_2 qui n'ont chacun qu'un voisin non surveillé. Il y a donc contradiction.
- x_1 et y_1 et x_2 et y_2 forment des ponts doubles, on considère deux cas sans perdre en généralité :
 - u_1 coïncide avec u_2 : similairement au premier cas, x_1 coïncide avec x_2 , v_1 coïncide avec v_2 et y_1 coïncide avec y_2 . Les arêtes x_1y_1 et x_2y_2 ne sont donc pas distinctes, ce qui est une contradiction.
 - u_1 coïncide avec v_2 : similairement au premier cas, x_1 coïncide avec y_2 , v_1 coïncide avec u_2 et y_1 coïncide avec x_2 . Les arêtes x_1y_1 et x_2y_2 ne sont donc pas distinctes, ce qui est une contradiction.

Le graphe G_S est donc planaire et nous pouvons y appliquer la formule d'Euler. Soit $f(G_S)$ le nombre de faces de G_S et $c(G_S)$ son nombre de composantes connexes, on a :

$$|E_S| - f(G_S) + 1 = |S| - c(G_S).$$

Remarquons que $f(G_S) - 1 \leq h(N[S])$. En effet, toute face interne de G_S correspond à un cycle de ponts simples et de ponts doubles dans la grille triangulaire, cycle qui contient au moins un trou. Notons aussi que $c(G_S) \geq 1$, donc :

$$|E_S| - h(N[S]) + 1 \leq |S|. \quad (2.1)$$

Nous utilisons à présent une méthode de déchargement pour prouver que $2|T(N[S])| + |B(N[S])| \leq 9|S| + 3|E_S|$. Ce résultat, avec l'inégalité 2.1, donne le résultat escompté, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} Q(N[S]) &= 2|T(N[S])| + |B(N[S])| + 3c(N[S]) - 3h(N[S]) \\ &\leq 9|S| + 3|E_S| + 3 - 3h(N[S]) \\ &\leq 12|S|. \end{aligned}$$

Nous utilisons donc une preuve par déchargement sur le graphe T_k pour prouver que $2|T(N[S])| + |B(N[S])| \leq 9|S| + 3|E_S|$, ce qui conclura la preuve. On considère le graphe induit par les sommets de $N[S]$ dans T_k .

On donne initialement un poids de 9 à chaque sommet de S et un poids de 3 à chaque pont simple et pont double (1 pour sa b-arête et 2 pour sa t-arête). Les règles de déchargement sont les suivantes :

- Chaque sommet x de S donne une charge de 1.5 à chacun de ses voisins (gardant une charge de 0 si c'est un sommet interne, de 3 si c'est un sommet du bord et de 6 si c'est un sommet dans un coin).
- Si un sommet u n'appartenant pas à S et recevant une charge de 1.5 depuis un de ses voisins dans S , noté x , a tous ses voisins surveillés, alors il donne une charge de 0.5 à tous les voisins qu'il a en commun avec x .
- Si un sommet est incident à une t-arête qui ne fait pas partie d'un pont, alors il donne une charge de 1 à cette arête. De même, s'il est incident à une b-arête qui ne fait pas partie d'un pont alors il donne un poids de 0.5 à cette arête.

Notons qu'à la fin de ce processus, toutes les t-arêtes ont une charge de 2 et toutes les b-arêtes ont une charge de 1. Une arête qui est à la fois une t-arête et une b-arête a une charge de 3. Dans le reste de la preuve, nous considérons que les deux premières étapes de déchargement sont finies, et nous prouvons que la dernière étape peut être effectuée sans créer de charge négative.

Soit u un sommet de $N[S]$ incident à une t-arête ou une b-arête. Il y a différents cas en fonction de la position de u dans la grille (voir Figure 2.9).

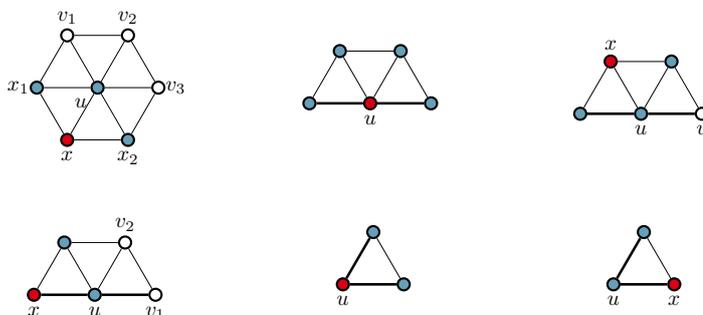


FIGURE 2.9 – Représentation des différentes possibilités de déchargement pour la preuve du lemme 2.7.

Cas 1. Supposons dans un premier temps que u est un sommet interne. Alors, il ne peut pas être un sommet de S et il a un voisin x dans S qui lui donne une charge de 1.5. Le sommet u a aussi deux voisins communs avec x , x_1 et x_2 et trois autres voisins v_1 , v_2 et v_3 . Sans perdre en généralité, on peut supposer que u et x_1 ont la même valeur pour la première coordonnée et que x a une valeur inférieure pour cette coordonnée. Comme u est l'extrémité d'une b-arête ou d'une t-arête, au moins un des sommets de $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas surveillé.

- Si aucun de ces sommets n'est surveillé, ou si exactement deux de ces sommets sont surveillés, alors u est l'extrémité d'une b-arête et d'une t-arête (qui ne forment pas de ponts). Comme u reçoit une charge de 1.5, il peut être déchargé et conserver une charge supérieure ou égale à 0.
- Si v_1 est le seul sommet surveillé, alors u est l'extrémité de deux b-arêtes uv_1 et ux_2 qui ne forment pas de pont. Le sommet u peut donc être déchargé et garder une charge strictement positive.
- Si v_2 est le seul sommet surveillé, alors u est l'extrémité d'une t-arête ux_1 et d'une b-arête ux_2 et d'un pont simple uv_2 . Le pont a déjà été pris en compte dans l'attribution initiale des charges et u peut donner une charge de 1 à ux_1 et une charge de 0.5 à ux_2 et conserve une charge de 0.
- Si v_3 est le seul sommet surveillé, alors u est l'extrémité de deux t-arêtes ux_1 et uv_3 . La charge reçue depuis x n'est pas suffisante pour que u puisse se décharger et garder une charge supérieure ou égale à 0. Intéressons-nous à quel sommet de T_k est dans S et permet de surveiller v_3 . Sachant que v_2 n'est pas surveillé, seuls trois sommets peuvent surveiller v_3 : x_2 et les deux autres voisins de v_3 qui ne sont pas dans le voisinage de v_2 , y_1 et y_2 ,

avec y_1 le sommet aligné avec u et v_3 (voir la Figure 2.10 pour une représentation de cette situation). Si x_2 est dans S , alors u reçoit une charge de 1.5 de la part de x et une charge de 1.5 de la part de x_2 , il a donc une charge suffisante pour donner une charge de 1 à ux_1 et uv_3 . Si y_2 est dans S , alors tous les sommets entourant x_2 sont surveillés et il donne donc une charge de 0.5 à u d'après la deuxième règle de déchargement. Le sommet u a donc une charge de 2 et peut donner une charge de 1 aux deux t-arêtes auxquelles il est adjacent. Le dernier cas est celui où y_1 est dans S , notons z le seul sommet du voisinage de x_2 qui n'est ni dans le voisinage de x ni dans celui de y_1 . Si z est surveillé, alors x_2 est entouré de sommets surveillés et, comme précédemment, il donne une charge de 0.5 à u et u peut se décharger. Si z n'est pas surveillé, alors les arêtes uv_3 et x_2y_2 forment un pont double, donc l'arête uv_3 à déjà été traitée dans l'attribution initiale et u ne doit se décharger que sur une seule arête et il lui reste donc une charge strictement positive.

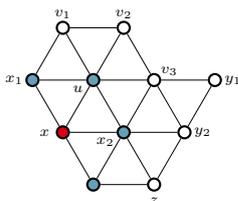


FIGURE 2.10 – Représentation d'un cas particulier de la preuve du lemme 2.7.

Cas 2. Supposons que u soit sur le bord de la grille. Si u est dans S alors il est incident à deux b-arêtes et il lui reste une charge de 3 après s'être déchargé sur ses voisins. Il peut donc donner une charge de 0.5 à chaque b-arête. Si u n'est pas dans S , alors il est adjacent à un sommet x de S . Considérons à présent les différentes positions que peut avoir x .

Si x n'est pas sur le bord, alors il n'y a qu'un seul voisin v de u qui n'est pas voisin de x . Si v n'est pas dans S alors u est incident à une t-arête et à une b-arête. Ayant reçu une charge de 1.5 de x , u peut donc se décharger. Si v est surveillé, alors u est incident à deux b-arêtes et il peut aussi se décharger.

Si x est sur le bord, alors il y a deux voisins v_1 et v_2 de u qui ne sont pas adjacents à x , v_1 étant sur le bord. Si aucun de ces deux sommets n'est surveillé ou s'ils sont tous les deux surveillés, alors u est incident à deux b-arêtes et peut être déchargé. Si v_2 est le seul sommet surveillé alors u est incident à une t-arête et à une b-arête et il peut bien se décharger. Si v_1 est le seul sommet surveillé alors l'arête uv_1 est un pont simple et elle a déjà été prise en compte dans l'attribution initiale des charges. u donne donc juste une charge de 0.5 à l'autre b-arête à laquelle il est incident.

Cas 3. Supposons que u soit dans un des coins de la grille, appartenant à S ou non, c'est alors l'extrémité de deux b-arêtes. Si il est dans S il lui reste une charge de 6 après s'être déchargé sur ces deux voisins et il peut donc bien donner une charge de 0.5 à chacune de ces arêtes. S'il n'est pas dans S , il a reçu une charge de 1.5 et peut aussi se décharger.

L'attribution initiale donne une charge de 9 à chaque sommet de S et de 3 à chaque pont simple ou pont double, il y a donc une charge totale de $9|S| + 3|E_S|$. Comme à la fin chaque t-arête a une charge de 2, chaque b-arête une charge de 1 et comme aucun sommet n'a de charge négative, on a bien $2|T(N[S])| + |B(N[S])| \leq 9|S| + 3|E_S|$, ce qui conclut la preuve. \square

Nous pouvons à présent prouver la borne inférieure du théorème 2.3 :

Lemme 2.8. $\gamma_P(T_k) \geq \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$.

Démonstration. Soit S un ensemble dominant de puissance du graphe T_k . D'après le lemme 2.7, $Q(N[S]) \leq 12|S|$. De plus, à la fin de la phase de propagation tous les sommets sont dominés, il y a $(k - 1)$ b-arêtes pour chaque coté de la grille et une seule composante connexe, donc $Q(V(T_k)) = 3(k - 1) + 3 = 3k$.

D'après le lemme 2.6, Q ne croît pas pendant la propagation, on a donc $12|S| \geq Q(N[S]) \geq Q(V(T_k)) = 3k$, et donc $|S| \geq \frac{k}{4}$. Ainsi $\gamma_P(T_k) \geq \frac{k}{4}$. \square

Combiner les lemmes 2.4 et 2.8, la borne supérieure et la borne inférieure, prouve le théorème 2.3.

2.3 Grilles triangulaires à bord hexagonal

Dans l'article [22] nous donnons aussi la valeur exacte du nombre de domination de puissance des grilles triangulaires à bords hexagonaux.

Théorème 2.9 (Bose, G., Pennarun et Verdonshot, 2018+ [22]). *Soit H_k une grille triangulaire à bord hexagonal de taille $k - 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\gamma_P(H_k) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$.*

La preuve exacte de ce théorème ne sera pas donnée dans cette thèse. Cependant, on peut signaler que la preuve de la borne haute se fait en exhibant un ensemble atteignant la valeur du théorème, comme pour le cas du bord triangulaire. La preuve de la borne basse, quant à elle, se fait en étudiant le périmètre de l'ensemble des sommets surveillés après les avoir décalés contre le bord de la grille. On observe que la taille de ce périmètre ne peut que diminuer par la propagation et on s'intéresse au moment de la propagation où la moitié des sommets sont surveillés.

Pour plus de détails sur cette preuve, le lecteur peut se référer à l'article [22].

3 Grilles de dimension 3

Comme mentionné précédemment, le nombre de domination de puissance des grilles carrées a été caractérisé par Dorfling et Henning en 2006 [50] et d'autres produits de chemins ont aussi été étudiés. Cependant la grille carrée de dimension 3, extension naturelle de la grille carrée, n'a pas encore été étudiée et c'est sur ce sujet que nous allons à présent nous concentrer et donner des pistes de recherche.

Similairement aux grilles carrées classiques, la grille carrée de dimensions 3 $G_{l,m,n}$ peut être définie à la fois comme le produit cartésien de trois chemins, $P_l \square P_m \square P_n$, ou alors en considérant les sommets comme des triplets (x, y, z) , avec x, y et z étant respectivement compris entre 0 et $l - 1$, 0 et $m - 1$, et 0 et $n - 1$, et où deux sommets sont adjacents s'ils ne diffèrent que sur une coordonnée et que cette différence est de 1. En utilisant cette définition, on peut définir des *couches* qui correspondent à des ensembles de sommets pour lesquelles l'une des coordonnées est fixée.

Comme pour la grille triangulaire, surveiller entièrement l'une des faces de la grille va permettre, via la propagation, de surveiller toute la grille. En effet, supposons que la couche $x = 0$ soit entièrement surveillée, alors tous les sommets de cette couche peuvent se propager à leur voisin sur la couche $x = 1$ s'il n'est pas encore surveillé, ce qui permet de surveiller entièrement la couche $x = 1$, qui peut alors elle-même se propager à la couche $x = 2$, et ainsi de suite jusqu'à ce toute la grille soit surveillée.

Ainsi, si on domine classiquement la couche $x = 0$ alors on pourra surveiller entièrement la grille de dimension 3. Gonçalves *et al.* ont donné en 2011 [67] la valeur exacte du nombre de domination de la grille classique, qui est supérieure à $n^2/5$.

On pourrait s'attendre à ce que le nombre de domination de puissance soit le même que le nombre de domination d'une face mais nous prouvons dans le théorème suivant qu'il est possible d'avoir une meilleure valeur asymptotique.

Théorème 2.10 (G., 2019+). *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\gamma_P(G_{n,n,n}) < \frac{n^2}{5}$.*

Démonstration. Dans un premier temps, on peut remarquer qu'ajouter des sommets à S dans la couche $x = 1$ permet de surveiller jusqu'à six sommets de la couche $x = 0$. En effet, pour qu'un sommet de la couche $x = 0$ se propage à un autre sommet de la couche $x = 0$ il faut que son voisin dans la couche $x = 1$ soit surveillé. Ajouter un sommet u à la couche $x = 1$ surveille immédiatement son voisin v dans la couche $x = 0$. De plus, cela surveille aussi cinq sommets dans la couche $x = 1$ et permet donc jusqu'à cinq propagations dans la couche $x = 0$, en particulier la propagation du sommet v à un autre sommet. La Figure 2.11 donne une représentation d'une possible disposition de sommets sur les couches $x = 0$ et $x = 1$ amenant à la surveillance de six sommets sur la couche $x = 0$ par l'ajout d'un sommet sur la couche $x = 1$.

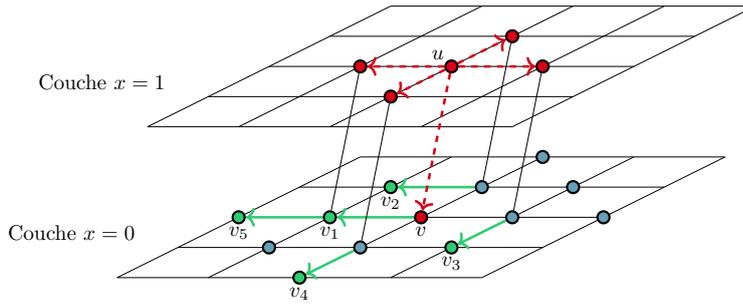


FIGURE 2.11 – Le sommet u est dans S , les sommets rouges sont les sommets qui sont surveillés car ils sont dans le voisinage de u . Les sommets bleus sont des sommets surveillés de la couche $x = 0$. Les sommets verts sont ceux qui sont surveillés grâce à la propagation de sommets. Notons que le sommet v_5 ne peut être surveillé qu'une fois que les sommets v_1 et v_2 l'ont été et v_4 ne peut être surveillé qu'après v_3 .

L'idée est à présent de surveiller une forme T sur la couche $x = 0$ en ajoutant strictement moins de sommets qu'un cinquième des sommets surveillés. Si la forme T pave le plan alors nous pourrions utiliser cette forme pour surveiller la couche $x = 0$ de la grille $G_{n,n,n}$, à l'exception d'une certaine marge près des bords.

La tuile T que nous proposons est représentée dans la Figure 2.12. Elle comporte cent deux sommets et est surveillée avec seulement 20 sommets dans S . Il faut toutefois faire attention à ce que certains sommets autour de la tuile soient déjà surveillés (ce qui est représenté par les croix en pointillés sur la figure). De plus, la Figure 2.13 montre que la tuile T pave le plan.

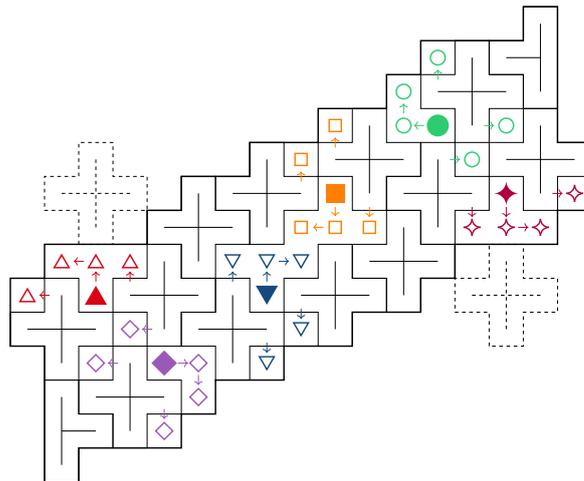
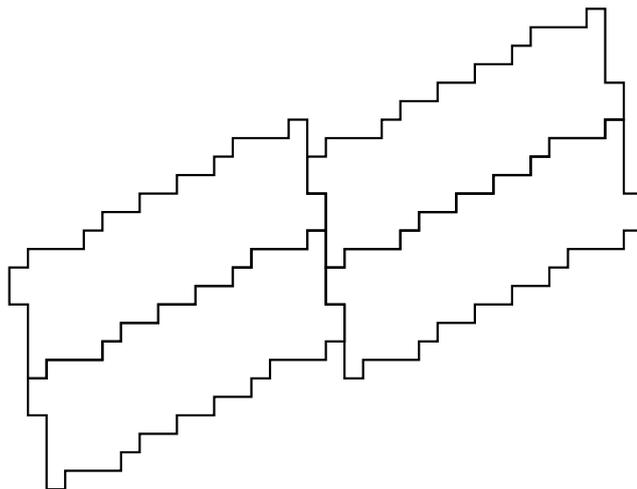


FIGURE 2.12 – La tuile T et la méthode pour la surveiller en vingt sommets si elle est sur la couche $x = 0$. Les croix correspondent aux sommets de S dans la couche $x = 0$ et aux sommets qu'ils surveillent. Les croix en pointillés indiquent l'emplacement de sommets surveillés dans une autre tuile en suivant le pavage du plan de la tuile T . Les symboles remplis et colorés correspondent à la projection des sommets de S de la couche $x = 1$ sur la couche $x = 0$. Ces sommets sont donc initialement surveillés. Les symboles de même forme, de même couleur mais vides correspondent aux sommets qui sont surveillés par propagation à partir du voisinage du sommet de S associé.


 FIGURE 2.13 – La tuile T pave le plan.

Considérons à présent la grille $G_{n,n,n}$ et pavons la couche $x = 0$ avec la tuile T en suivant la structure de la Figure 2.13 et en maximisant le nombre de tuiles. Comme la tuile T fait quatorze sommets de haut et dix-sept de large, les sommets qui ne sont pas couverts par ces tuiles sont nécessairement situés dans des bandes de largeur 14 en haut et en bas de la grille ou sur les bandes de largeur 17 à gauche et droite de la grille. Il y a donc au plus $2 \times 14n + 2 \times 17n - 4 \times 14 \times 17$ sommets non couverts par les tuiles, et il y a au moins $(n - 28)(n - 34)$ sommets couverts et $\frac{(n-28)(n-34)}{102}$ tuiles.

Ajoutons à présent des sommets dans S de la façon suivante : si un sommet de la couche $x = 0$ n'est pas couvert par une tuile alors on l'ajoute à S , pour les tuiles T pavant le reste de la couche $x = 0$ on ajoute des sommets à S en suivant la disposition de la Figure 2.12 (il y a donc des sommets de S dans la couche $x = 0$ et dans la couche $x = 1$). Remarquons que, suivant cette disposition de sommets, la propagation de certains sommets est conditionnée par la présence de sommets surveillés hors de la tuile. C'est bien le cas ici, de par le pavage ou par les sommets qui ne sont pas couverts par les tuiles.

Il y a donc au plus $f(n) = 2 \times 14n + 2 \times 17n - 4 \times 14 \times 17 + 20 \times \frac{(n-28)(n-34)}{102}$ sommets dans S . Or, on a $f(n) \underset{+\infty}{\simeq} \frac{20n^2}{102}$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, f(n) < \frac{n^2}{5}$. De plus, comme surveiller la première couche suffit à surveiller toute la grille, $\gamma_P(G_{n,n,n}) \leq f(n)$, ce qui conclut la preuve. \square

La preuve de ce théorème donne une borne supérieure asymptotique de $\frac{10n^2}{51}$. Cette borne dépend de notre construction de la tuile et il est fortement probable qu'elle puisse être améliorée en trouvant une meilleure disposition. Cependant, en utilisant seulement des sommets de S sur les deux premières couches de la grille, comme nous le faisons dans la preuve, nous ne pouvons pas utiliser moins de $\frac{n^2}{6}$ sommets car les sommets de S sur la couche $x = 1$ permettent de dominer seulement six sommets de la couche $x = 0$. Je conjecture que la valeur asymptotique du nombre de domination de puissance de $G_{n,n,n}$ se situe entre $\frac{n^2}{6}$ et $\frac{n^2}{5}$.

Un pas dans la direction d'une valeur exacte pour le nombre de domination de puissance des grilles de dimension 3 serait de trouver une borne inférieure.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps étudié le nombre de domination de puissance des grilles triangulaires à bords triangulaires. Nous avons ensuite prouvé qu'asymptotiquement le nombre de sommets nécessaires pour surveiller tous les sommets d'une grille carrée de dimension 3 était strictement inférieur au nombre de sommets nécessaires pour dominer l'une des faces (pour la domination classique).

Le résultat que nous avons obtenu pour la grille de dimension 3 n'est pas un résultat exact contrairement à celui obtenu pour les grilles triangulaires. Une première étape dans l'amélioration

de ce résultat serait de trouver une borne basse sur le nombre de domination de puissance des grilles de dimension 3.

Une autre remarque que l'on peut faire concerne le cas plus général des grilles carrées de dimension d . Comme pour la grille classique et la grille de dimension 3, surveiller l'une des faces suffit pour surveiller toute la grille grâce à la propagation. Ainsi, le nombre de domination de puissance d'une grille de dimension d est au plus de l'ordre de $O(n^{d-1})$. Une question que l'on peut se poser cependant est de savoir s'il s'agit du bon ordre de grandeur, comme c'est le cas pour les grilles carrées et comme nous le conjecturons pour les grilles de dimension 3. Une façon possible d'obtenir un résultat général de ce type serait d'étudier le nombre zéro-forçant des grilles de dimension supérieure, avec l'aide possible d'outils algébriques.

Chapitre 3

Domination ludique

Lorsque nous cherchons à optimiser un paramètre dans un graphe, nous nous plaçons dans la situation idéale où il n'y a pas d'interventions extérieures. Cependant dans la plupart des situations réelles, les aléas peuvent nous compliquer la tâche. Une façon de modéliser cela est de considérer notre problème comme un jeu où l'on a face à soi un adversaire qui a des objectifs antagonistes aux nôtres. Ainsi, trouver une stratégie pour battre cet adversaire dans tous les cas possibles permet de se prémunir contre les pires situations.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer ce principe à la domination en introduisant le jeu de domination Maker-Breaker.

Il existe déjà plusieurs variantes ludiques du problème de domination. Cependant, pour des raisons que nous expliciterons par la suite, les règles de ces jeux sont peu satisfaisantes par certains aspects. C'est pourquoi nous avons introduit avec Eric Duchêne, Aline Parreau et Gabriel Renault [52] le jeu de domination Maker-Breaker qui modélise de façon plus naturelle l'adversité dans la construction d'un ensemble dominant. De plus, notre jeu s'inscrit dans la classe plus générale des jeux dits "positionnels".

J'ai continué la recherche sur ce sujet au cours de mon séjour en Slovénie de février à mai 2018 où j'ai travaillé avec Sandi Klavžar et Vesna Iršič. Nous avons introduit les nombres de domination Maker-Breaker, deux paramètres d'optimisation qui correspondent à la longueur de la partie dans le jeu de domination Maker-Breaker. Ce travail a mené à un article publié en 2019 [65]. En collaboration avec Michael Henning, nous avons aussi travaillé sur une variante du jeu de domination Maker-Breaker pour la domination totale, ce qui a mené à la soumission d'un article [62].

Dans la partie 1, nous faisons un bref état de l'art des jeux portant sur la domination. Dans la partie 2, nous introduisons ensuite simultanément le jeu de domination Maker-Breaker et les nombres de domination associés. Puis dans la partie 3, nous allons nous intéresser aux ensembles dominants par appariement, structure introduite dans le cadre du jeu de domination Maker-Breaker et qui fournit une stratégie gagnante à l'un des joueurs. Dans la partie 4, nous prouverons que ce jeu est PSPACE-complet dans le cas général. Nous analyserons ensuite, dans la partie 5, certaines opérations sur les graphes en relation avec le jeu de domination Maker-Breaker, ce qui nous permettra de montrer que l'issue du jeu de domination Maker-Breaker peut se calculer en temps polynomial sur les cographes et les arbres. Nous nous éloignerons ensuite de ce jeu pour explorer ses variantes pour la domination totale, dans la partie 6, et en version Avoïder-Enforcer, qui est le pendant des jeux Maker-Breaker, dans la partie 7.

1 Domination et jeux

1.1 Le jeu de domination "classique"

En s'inspirant du jeu de coloration mais aussi pour tenter d'approcher la conjecture de Vizing sous un angle nouveau, le jeu de domination a été introduit en 2010 par Brešar, Klavžar et Rall [28]. Sa définition est la suivante :

Définition 3.1. Le jeu de domination est un jeu à deux joueurs, Dominator et Staller, qui se joue sur un graphe G et qui est paramétré par un entier k . Dominator et Staller sélectionnent alternativement des sommets de G et les ajoutent à un ensemble D . À chaque ajout de sommet,

le nouveau sommet doit dominer au moins un sommet qui n'était pas encore dominé par les sommets de D . Le jeu s'arrête lorsque G est entièrement dominé par D . Dominator gagne si la taille finale de D est inférieure ou égale à k tandis que Staller gagne dans le cas contraire.

Pour un graphe G donné, le plus petit k tel que Dominator, en jouant en premier, a une stratégie gagnante sur G pour le jeu de domination est appelé D -nombre de domination ludique et est noté $\gamma_g(G)$ tandis que le plus petit k tel que Dominator a une stratégie gagnante si Staller commence est appelé le S -nombre de domination ludique et est noté $\gamma'_g(G)$. La Figure 3.1 donne l'exemple d'une partie du jeu de domination dans le cas où Dominator commence.

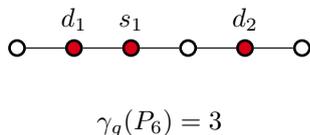


FIGURE 3.1 – Exemple de partie du jeu de domination atteignant la valeur de $\gamma_g(P_6)$. Les sommets d_1 et d_2 représentent le premier et le second coup de Dominator et s_1 représente le premier coup de Staller.

Ce jeu, bien que récent, a déjà été l'objet de nombreuses études. Dans un premier temps, l'écart entre le D -nombre de domination ludique et le S -nombre de domination ludique a été borné par Brešar, Klavžar et Rall en 2010 [28] et Kinnersley, West et Zamani en 2013 [91] qui ont respectivement établi l'inégalité basse et haute du théorème suivant :

Théorème 3.2 (Brešar *et al.* 2010 [28], Kinnersley *et al.* 2013 [91]). *Pour tout graphe G , on a :*

$$\gamma'_g(G) - 1 \leq \gamma_g(G) \leq \gamma'_g(G) + 1.$$

De plus, Kinnersley, West et Zamani [91] ont aussi proposé une conjecture concernant l'écart entre le nombre de domination ludique et le nombre de sommets du graphe, que l'on peut mettre en lien avec la borne sur le nombre de domination $\gamma(G) \leq \frac{|V(G)|}{2}$. Cette conjecture est aujourd'hui au cœur de l'étude de ce problème :

Conjecture 3.3 (Kinnersley *et al.* 2013 [91]). *Soit G un graphe d'ordre n sans sommets isolés, on a $\gamma_g(G) \leq \frac{3n}{5}$ et $\gamma'_g(G) \leq \frac{3n+2}{5}$.*

Les auteurs ont aussi prouvé que cette conjecture était vraie pour les forêts de chenilles. D'autres avancées sur cette conjecture ont notamment été effectuées par Brešar *et al.* en 2013 [27] et Henning et Kinnersley en 2016 [77].

Concernant d'autres aspects du jeu de domination, Brešar *et al.* ont prouvé que déterminer le nombre de domination ludique était un problème PSPACE-complet en 2016 [24]. Une borne basse sur le nombre de domination ludique des arbres en fonction de l'ordre et du degré maximal de l'arbre a été donné par Brešar *et al.* en 2013 [29]. Dans le même article, les auteurs ont aussi étudié ce jeu pour les sous-graphes couvrants. Plus récemment, Xu *et al.* ont étudié en 2018 [109] les graphes dont le nombre de domination ludique est très élevé.

En raison de la variété de la littérature à son sujet mais aussi pour le distinguer du jeu de domination Maker-Breaker que nous introduisons dans ce chapitre, on appellera ce jeu le *jeu de domination classique* par la suite.

1.2 Autres jeux de domination

Le jeu de domination décrit dans la sous-partie précédente n'est pas le premier jeu de domination à avoir été introduit. En effet, Alon *et al.* ont introduit un jeu en 2002 [5] qu'ils ont aussi appelé jeu de domination. Dans ce jeu, deux joueurs orientent alternativement des arêtes d'un graphe. L'un des joueurs souhaite que le nombre de domination du digraphe final soit aussi petit que possible et l'autre joueur souhaite qu'il soit aussi grand que possible. Ce premier article concernant ce jeu est aussi, à ma connaissance, le seul article qui l'étudie et tous les autres articles parlant de jeu de domination concernent le jeu de domination classique ou certaines de ces variantes plus directes.

En effet, le jeu de domination classique a inspiré d'autres jeux, notamment le *jeu de domination totale* introduit par Henning *et al.* en 2014 [78]. Ce jeu est similaire au jeu de domination à la différence près que Dominator et Staller construisent un ensemble dominant total et non un ensemble dominant. Similairement à la conjecture 3.3, Henning *et al.* proposent en 2016 [79] une conjecture selon laquelle le nombre de domination totale ludique d'un graphe G est au plus $4n/5$ où n est l'ordre de G . Dans un article de 2017, Henning *et al.* [81] ont aussi étudié ce jeu sur les arbres et ont notamment montré qu'il est toujours avantageux pour Dominator de commencer.

Récemment, toujours dans la lignée du jeu de domination classique, Bujtás et Tuza [33] ont introduit en 2016 le *jeu de domination disjoint*. Dans ce jeu, les deux joueurs ajoutent des sommets à deux ensembles dominants disjoints. L'objectif de Dominator est qu'à la fin de la partie les deux ensembles dominent bien le graphe, tandis que l'objectif de Staller est de créer un sommet dont le voisinage n'appartient qu'à l'un de ces deux ensembles. Ce jeu est bien plus proche de ce que nous allons étudier par la suite en ce que Staller ne se contente plus de ralentir Dominator mais essaie de l'empêcher d'atteindre son objectif.

2 Le jeu de domination Maker-Breaker

Une remarque que l'on peut faire sur le jeu de domination classique est que Staller contribue à la domination du graphe. Cette règle peut paraître non satisfaisante, notamment en comparaison avec le jeu de coloration dans lequel le second joueur peut vraiment empêcher la coloration propre du graphe. De plus, si on imagine le graphe à dominer comme un réseau que l'on cherche à surveiller et que l'aspect ludique cherche à modéliser les possibles défaillances du système, il est difficile d'imaginer une interprétation satisfaisante du jeu de domination classique. Dans ce contexte, un autre type de jeu se prête parfaitement à l'exercice et permet de rendre compte de "pannes" sur des nœuds ainsi que de donner un vrai pouvoir disruptif à Staller, à savoir les jeux positionnels.

2.1 Les jeux positionnels

Les jeux positionnels sont des jeux joués sur des hypergraphes. Dans ces jeux, deux joueurs s'affrontent en sélectionnant alternativement des sommets. Les conditions de victoire portent sur le fait de sélectionner, ou non, tous les sommets d'une hyperarête.

Ces jeux existent et sont étudiés depuis de nombreuses années. Ainsi le jeu de Hex, connu notamment pour avoir été étudié par Nash en 1952, est un jeu positionnel, mais un jeu aussi célèbre que le morpion, joué par des enfants du monde entier, est aussi un jeu positionnel. Cependant, ce sont Erdős et Selfridge qui, en 1973 [54], ont formalisé en premier ces types de jeux.

Un jeu Maker-Maker est joué sur un hypergraphe \mathcal{H} par deux joueurs qui sélectionnent alternativement des sommets de cet hypergraphe. Le premier joueur à avoir sélectionné tous les sommets d'une des hyperarêtes de \mathcal{H} gagne la partie. Le morpion est un exemple de jeu Maker-Maker, où les sommets de l'hypergraphe sont les cases de la grille et les hyperarêtes sont formées des lignes, des colonnes et des diagonales.

On peut montrer que pour les jeux Maker-Maker, le deuxième joueur ne possède jamais de stratégie gagnante. En effet, si les deux joueurs jouent parfaitement, le premier joueur gagne ou ils arrivent à un match nul. La méthode pour prouver ce résultat est appelée la méthode du vol de stratégie et sera utilisée à d'autres reprises dans ce chapitre pour montrer des résultats similaires.

Un autre résultat sur les jeux Maker-Maker consiste à remarquer que ces jeux ne sont pas monotones pour l'ajout d'hyperarête. On pourrait penser que comme le second joueur n'a jamais de stratégie gagnante, l'ajout d'hyperarêtes ne peut qu'avantager le premier joueur mais ce n'est pas le cas. Il existe des hypergraphes sur lesquels le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante mais pour lesquels l'ajout d'une hyperarête peut faire que l'issue est le match nul pour l'hypergraphe obtenu. Cela s'explique par le fait que le deuxième joueur peut tout de même menacer le premier joueur et le forcer à jouer certains coups.

La non-monotonie des jeux Maker-Maker les rend très difficiles à étudier et les résultats ci-dessus font parti des seuls résultats généraux à leur sujet. Cette difficulté d'étude est l'une des raisons de l'introduction des jeux Maker-Breaker. Dans ces jeux, le deuxième joueur abandonne sa possibilité de victoire s'il sélectionne les sommets d'une hyperarête et son nouvel objectif

est d'empêcher le premier joueur de gagner. Cette caractéristique explique le nom des joueurs, Maker tente de sélectionner tous les sommets d'une hyperarête et Breaker tente de l'en empêcher. Ces jeux sont plus faciles à étudier et forment le sujet principal de l'étude des jeux positionnels. L'un des intérêts de ces jeux est que si Breaker dispose d'une stratégie gagnante alors le jeu Maker-Maker associé au même hypergraphe mène au match nul. En effet, il suffit au deuxième joueur d'appliquer la même stratégie que Breaker.

Un des résultats principaux qu'Erdős et Selfridge ont donné dans leur article de 1973 est une condition de victoire pour Breaker quand il y a suffisamment d'hyperarêtes et qu'elles sont suffisamment grandes :

Théorème 3.4 (Critère d'Erdős-Selfridge [54]). *Soit J un jeu Maker-Breaker sur l'hypergraphe (X, \mathcal{F}) . Si $\sum_{A \in \mathcal{F}} 2^{-|A|} < \frac{1}{2}$ alors Breaker gagne J en tant que second joueur.*

Le jeu de connectivité résolu par Lehman en 1964 [94] est un exemple de jeu Maker-Breaker sur les graphes. Dans ce jeu, Maker et Breaker sélectionnent alternativement des arêtes d'un graphe et Maker gagne si les arêtes qu'il a sélectionnées forment un graphe connexe. On peut aussi prendre en exemple le jeu d'hamiltonicité introduit par Chvátal et Erdős en 1978 [40] qui se joue dans une clique et où Maker essaie de former un cycle hamiltonien en sélectionnant des arêtes.

Dans le cas du jeu d'hamiltonicité, et dans de nombreux autres cas étudiés, Maker accomplit son objectif assez facilement. C'est pourquoi, dans leur article, Chvátal et Erdős introduisent la notion de biais qui va être une notion majeure dans la suite de l'étude des jeux positionnels. Dans un jeu Maker-Breaker $(1 : b)$, pour chaque coup de Maker, Breaker joue b coups. Il s'agit alors de déterminer à partir de quel b le jeu devient gagnant pour Breaker. Plus généralement, les jeux Maker-Breaker biaisés $(a : b)$ sont ceux dans lesquels Maker joue a coups et Breaker joue b coups. Cette notion a aussi des liens avec les probabilités. En effet, pour le cas du jeu de connectivité sur une clique, le ratio a/b à partir duquel Maker gagne est de l'ordre de la probabilité $1/p$ avec laquelle il faut choisir des arêtes dans un graphe aléatoire pour que ce graphe soit connexe.

Pour plus d'informations, les livres de Beck et de Hefetz *et al.* parus respectivement en 2008 [16] et en 2014 [75] sont de très bonnes introductions au domaine des jeux positionnels et en particulier des jeux Maker-Breaker.

Appliquons à présent le concept de jeu Maker-Breaker à la domination dans les graphes.

2.2 Définitions et premiers résultats

Le jeu de domination Maker-Breaker sur un graphe G est un jeu Maker-Breaker joué sur un hypergraphe \mathcal{H} dont les sommets sont ceux de G et les hyperarêtes sont les ensembles dominants du graphe. Dans la suite de ce chapitre, nous n'utiliserons que très peu l'aspect hypergraphe de ce jeu et nous concentrerons sur la notion d'ensemble dominant dans des graphes. Les joueurs sont appelés Dominator et Staller dans la continuité du jeu de domination classique. Pour des raisons de clarté de la lecture et d'équité, on utilisera des pronoms masculins pour Dominator et des pronoms féminin pour Staller. Définissons plus formellement les positions et conditions de victoire du jeu de domination Maker-Breaker.

Une *position* du jeu de domination Maker-Breaker est un couple (G, c) , avec G un graphe et c une fonction $c : V(G) \rightarrow \{\text{Dominator}, \text{Staller}, \text{NonJoué}\}$. En d'autres termes, la fonction c permet de décrire toute position de jeu rencontrée durant la partie. Si pour tout sommet u de $V(G)$, $c(u) = \text{NonJoué}$, on dit que (G, c) est une *position de départ*. Dans ce cas, on identifie (G, c) avec le graphe G . Lorsque c'est le tour de Dominator (respectivement de Staller), ce joueur choisit un sommet u tel que $c(u) = \text{NonJoué}$ et change sa valeur en Dominator (resp. Staller). Lorsqu'il n'y a plus de sommets de valeur NonJoué, soit les sommets de $c^{-1}(\text{Dominator})$ forment un ensemble dominant de G , auquel cas Dominator gagne la partie, soit il existe au moins un sommet u tel que sa valeur et celle de tous ses voisins est Staller, auquel cas c'est Staller qui gagne. Dans ce dernier cas, on dit que Staller *isole* le sommet u . Notons que lorsque $c^{-1}(\text{Dominator})$ forme un ensemble dominant ou lorsqu'un sommet est isolé par Staller, le vainqueur est déjà déterminé et ne peut plus changer car ces deux conditions sont complémentaires. Ainsi on considérera que la partie s'arrête lorsqu'une des deux conditions est remplie. La Figure 3.2 donne un exemple de partie gagnée par Dominator et de partie gagnée par Staller.

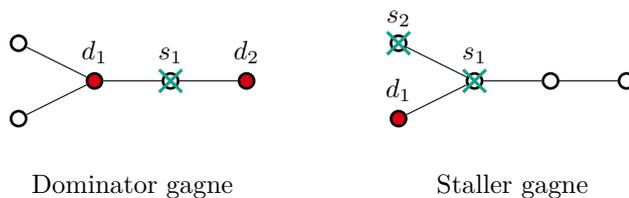


FIGURE 3.2 – Deux parties du jeu de domination Maker-Breaker jouées sur le même graphe. Le sommet d_i représente le i -ième coup de Dominator et le sommet s_i le i -ième coup de Staller. Dominator commence et gagne dans le premier cas et Staller commence et gagne dans le second.

Le jeu de domination Maker-Breaker est un jeu fini, à information complète et sans match nul, il existe donc une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. On distingue quatre cas – appelés *issues* – qui caractérisent le joueur ayant une stratégie gagnante en fonction de qui commence. On définit comme suit \mathcal{D} , \mathcal{S} , \mathcal{N} et \mathcal{P} , les différentes issues d'une position de jeu de domination Maker-Breaker :

Définition 3.5. Une position (G, c) a pour issue :

- \mathcal{D} si Dominator a une stratégie gagnante en tant que premier et deuxième joueur,
- \mathcal{S} si Staller a une stratégie gagnante en tant que première et deuxième joueuse,
- \mathcal{N} si le joueur qui commence a une stratégie gagnante,
- \mathcal{P} si le joueur qui ne commence pas a une stratégie gagnante.

Cette notion d'issue et les deux dernières notations qui y sont liées proviennent de la théorie des jeux combinatoires (voir par exemple Siegel, 2013 [105] pour une vue d'ensemble sur le domaine). On notera $o(G, c)$ l'issue de la position (G, c) . Lorsque (G, c) est une position de départ, $o(G, c)$ sera noté $o(G)$.

La proposition suivante montre que, contrairement au jeu de domination classique, il est toujours intéressant de commencer. Il s'agit d'une application directe de résultats généraux sur les jeux Maker-Breaker. Ce résultat a notamment été énoncé par Beck en 2008 [16] et par Hefetz *et al.* en 2014 [75] et est un exemple de preuve par vol de stratégie. Pour des raisons de complétude, nous en fournissons tout de même une preuve adaptée à notre cas particulier.

Proposition 3.6 (Stratégie d'imagination). *Il n'existe aucune position (G, c) du jeu de domination Maker-Breaker telle que $o(G, c) = \mathcal{P}$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une position (G, c) du jeu de domination Maker-Breaker telle que $o(G, c) = \mathcal{P}$. En particulier, cela signifie que Dominator gagne en tant que second joueur sur (G, c) . Nous allons exhiber une stratégie gagnante pour Dominator en tant que premier joueur, ce qui contredit la supposition de départ.

La stratégie de Dominator en tant que premier joueur est la suivante. Il commence par jouer n'importe quel sommet `NonJoué` u . Il va ensuite appliquer sa stratégie de deuxième joueur comme si u était toujours `NonJoué`. Si, à un moment donné, sa stratégie consiste à jouer sur u , il joue à la place sur un autre sommet `NonJoué` v et continue sa stratégie comme s'il avait joué sur u et que v était toujours `NonJoué`. Pour toute séquence de coups de Staller, la stratégie gagnante de Dominator en tant que second joueur lui permet de sélectionner un ensemble dominant. Dans sa stratégie en tant que premier joueur il sélectionnera les mêmes sommets avec potentiellement le sommet supplémentaire considéré comme `NonJoué`, il sélectionnera donc aussi un ensemble dominant. Dominator a donc bien une stratégie gagnante en tant que premier joueur et il y a contradiction avec la supposition de départ. \square

Notons que cette proposition est valide à tout moment de la partie (et pas seulement pour les positions de départ). En d'autres termes, cette proposition assure qu'aucun joueur n'a d'intérêt à passer son tour quel que soit le moment de la partie. La Figure 3.3 donne des exemples de positions de départ pour chacune des trois autres issues.

À partir de ces trois issues possibles, et en s'inspirant de la théorie des jeux combinatoires, nous introduisons une relation d'ordre sur les issues : $\mathcal{S} \prec \mathcal{N} \prec \mathcal{D}$. Ainsi, si on a $o(G) \prec o(H)$

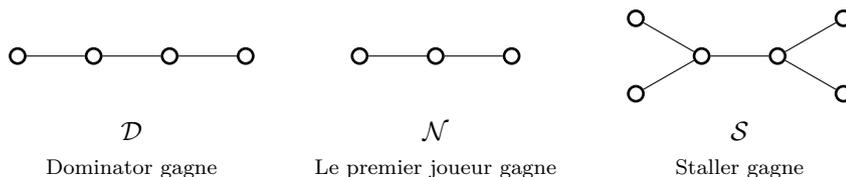


FIGURE 3.3 – Exemples de graphes pour les issues \mathcal{D} , \mathcal{N} et \mathcal{S}

alors H est plus favorable à Dominator que G . Cela nous permet de formuler la proposition suivante :

Proposition 3.7. *Soit (G, c) et (G', c) deux positions du jeu de domination Maker-Breaker avec G' un sous-graphe de G sur le même ensemble de sommets. On a $o(G', c) \prec o(G, c)$.*

Démonstration. Une autre formulation de cette proposition consiste à dire que si Dominator a une stratégie gagnante sur (G', c) alors il en a une aussi sur (G, c) .

Supposons que Dominator a une stratégie sur (G', c) . Une stratégie gagnante pour Dominator sur (G, c) est d'appliquer la même stratégie que sur (G', c) . En effet, pour toute séquence de coups possible de Staller, Dominator est capable de dominer G' . Puisque toute arête de G' est aussi dans G , Dominator est aussi capable de dominer G . \square

En d'autres termes, rajouter des arêtes à une position ne peut qu'être bénéfique pour Dominator et en retirer ne peut qu'être bénéfique pour Staller. Notons aussi que cette propriété n'est pas vraie pour le jeu de domination classique.

Un autre résultat peut être dérivé des jeux Maker-Breaker à partir du critère d'Erdős-Selfridge. Pour appliquer ce théorème au jeu de domination Maker-Breaker, considérons notre jeu d'une autre façon. On peut remarquer que la condition de victoire de Staller peut se reformuler en "Staller doit sélectionner les sommets du voisinage fermé d'un sommet". En effet, si Staller réussit à sélectionner tous les sommets du voisinage fermé d'un sommet u , alors Dominator ne pourra jamais dominer u . Au contraire, si elle ne peut pas remplir cette condition, cela signifie que tous les sommets ont au moins un sommet sélectionné par Dominator dans leur voisinage fermé et donc qu'ils sont tous dominés. En partant d'un graphe G , on peut donc considérer l'hypergraphe \mathcal{H} sur le même ensemble de sommets et dont les hyperarêtes sont les voisinages fermés des sommets de G . Alors Staller gagne le jeu de domination Maker-Breaker sur G si et seulement si Maker gagne le jeu Maker-Breaker sur \mathcal{H} . On peut à présent appliquer le théorème 3.4 au jeu de domination Maker-Breaker.

Proposition 3.8. *Soit G une position de départ du jeu de domination Maker-Breaker et soit δ le degré minimum de G . Si $|V| < 2^\delta$ alors Dominator a une stratégie gagnante pour le jeu de domination Maker-Breaker sur G en tant que second joueur.*

Démonstration. Comme affirmé plus haut, le jeu de domination Maker-Breaker sur G peut être vu comme un jeu Maker-Breaker sur $\mathcal{H} = (V, \mathcal{F})$ où \mathcal{F} est l'ensemble des voisinages fermés de G , et Staller est Maker dans ce jeu. Grâce au critère d'Erdős-Selfridge, on sait que si $\sum_{u \in V} 2^{-|N[u]|} < \frac{1}{2}$ alors Dominator a une stratégie gagnante. Pour tout sommet u de V , on a $|N[u]| \geq \delta + 1$, donc $2^{-|N[u]|} \leq 2^{-(\delta+1)}$. Donc si $|V| \times 2^{-(\delta+1)} < \frac{1}{2}$ alors Dominator a une stratégie gagnante. \square

Ce résultat peut être utilisé pour prouver que certaines familles de graphes sont \mathcal{D} (par exemple les graphes r -réguliers avec $r > \log_2 |V|$). De plus, cela suggère aussi que les graphes très connectés sont bien plus avantageux pour Dominator.

Les résultats génériques sur le jeu Maker-Breaker ne permettent guère d'en dire plus. Une étude *ad hoc* sur le jeu de domination Maker-Breaker s'avère donc pertinente, c'est ce que nous ferons dans le reste de cette partie.

2.3 Le nombre de domination Maker-Breaker

En s'inspirant du jeu de domination classique, une autre question qui peut se poser est le nombre de coups nécessaires à Dominator pour gagner. Ainsi pour une position (G, c) donnée on

introduit deux paramètres, le D-nombre de domination Maker-Breaker, $\gamma_{\text{MB}}(G, c)$, qui correspond au nombre de coups nécessaires à Dominator pour gagner sur (G, c) s'il commence et le S-nombre de domination Maker-Breaker, $\gamma'_{\text{MB}}(G, c)$, qui correspond au nombre de coups nécessaires à Dominator pour gagner sur (G, c) si Staller commence. Si Dominator n'a pas de stratégie gagnante en tant que premier joueur (resp. deuxième joueur) alors le D-nombre de domination Maker-Breaker (resp. S-nombre de domination Maker-Breaker) vaut l'infini. Par la suite, lorsqu'on parlera indistinctement d'un paramètre ou de l'autre, on les nommera nombres de domination Maker-Breaker. Lorsque G est une position de départ, les nombres de domination Maker-Breaker sont notés $\gamma_{\text{MB}}(G)$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G)$.

Un premier constat qui peut être fait est que la stratégie d'imagination de la proposition 3.6 reste valide lorsqu'on s'intéresse aux nombres de domination Maker-Breaker et il n'est jamais intéressant de passer son tour :

Proposition 3.9. *Pour toute position (G, c) du jeu de domination Maker-Breaker, on a $\gamma_{\text{MB}}(G, c) \leq \gamma'_{\text{MB}}(G, c)$.*

Démonstration. Si $\gamma'_{\text{MB}}(G, c) = \infty$ alors il est clair que $\gamma_{\text{MB}}(G, c) \leq \gamma'_{\text{MB}}(G, c)$, considérons donc le cas où $\gamma'_{\text{MB}}(G, c)$ est fini.

Considérons une stratégie optimale pour Dominator lorsqu'il joue en deuxième sur (G, c) . S'il joue en premier, il peut imaginer que Staller a joué sur un sommet **NonJoué** arbitraire u et continuer avec sa stratégie optimale en tant que second joueur. Si, à un moment donné de la partie, Staller joue sur u , Dominator imagine qu'elle a joué sur un autre sommet **NonJoué**. En suivant cette stratégie, Dominator domine le graphe avec au plus $\gamma'_{\text{MB}}(G, c)$ coups. On a donc bien $\gamma_{\text{MB}}(G, c) \leq \gamma'_{\text{MB}}(G, c)$. \square

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons exclusivement aux nombres de domination Maker-Breaker pour des positions de départ.

Intéressons-nous à présent aux valeurs que peuvent prendre $\gamma_{\text{MB}}(G)$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G)$. Comme énoncé dans le théorème 3.2, la différence entre le nombre de domination ludique quand Dominator et quand Staller commencent vaut au plus 1. Le résultat suivant montre que la situation est très différente dans le cas du jeu de domination Maker-Breaker et que l'écart entre $\gamma_{\text{MB}}(G)$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G)$ n'est pas borné.

Théorème 3.10 (G., Iršič et Klavžar, 2019 [65]). *Pour tous entiers r, s, t , tels que $2 \leq r \leq s \leq t$, il existe un graphe G satisfaisant $\gamma(G) = r$, $\gamma_{\text{MB}}(G) = s$, et $\gamma'_{\text{MB}}(G) = t$.*

Démonstration. Soit r, s et t des entiers avec $2 \leq r \leq s \leq t$. Construisons à présent $G_{r,s,t}$ tel que $\gamma(G) = r$, $\gamma_{\text{MB}}(G) = s$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G) = t$. Pour construire le graphe $G_{r,s,t}$ (représenté dans la Figure 3.4) commençons par un chemin de longueur $r - 1$ composé des sommets x_1, \dots, x_r . Ajoutons $2(t - r + 1)$ sommets $y_1, y'_1, \dots, y_{t-r+1}, y'_{t-r+1}$ tels que les paires y_i, y'_i forment des arêtes et qu'ils soient tous voisins avec x_1 , et ajoutons $2(s - r + 1)$ sommets $z_1, z'_1, \dots, z_{s-r+1}, z'_{s-r+1}$ tels que les paires z_i, z'_i forment des arêtes et qu'ils soient tous voisins avec x_2 . Attachons enfin une feuille à chacun des sommets x_3, \dots, x_r , que l'on nomme x'_3, \dots, x'_r .

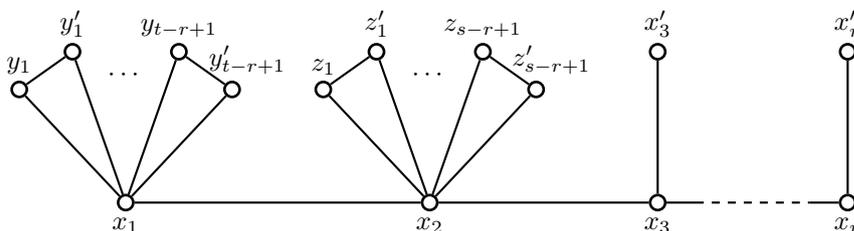


FIGURE 3.4 – Représentation du graphe $G_{r,s,t}$

Le graphe $G_{r,s,t}$ dispose du couplage parfait suivant : $\{(x_1, x_2), (y_1, y'_1), \dots, (y_{t-r-1}, y'_{t-r-1}), (z_1, z'_1), \dots, (z_{s-r-1}, z'_{s-r-1}), (x_3, x'_3), \dots, (x_r, x'_r)\}$. Une stratégie gagnante pour Dominator, si Staller commence, est de toujours répondre dans la même arête du couplage que le coup de Staller. En suivant cette stratégie, quoi que Staller fasse, Dominator réussira bien à dominer le graphe et l'issue du jeu de domination Maker-Breaker sur $G_{r,s,t}$ est bien \mathcal{D} grâce à la proposition 3.9. Il

est clair que $\gamma(G_{r,s,t}) = r$ avec x_1, \dots, x_r un ensemble dominant de taille minimum. Prouvons à présent qu'on a bien $\gamma_{\text{MB}}(G_{r,s,t}) = s$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G_{r,s,t}) = t$.

Considérons le cas où Dominator commence. Décrivons d'abord la stratégie de Dominator. Il commence en jouant son premier coup sur le sommet x_1 . Puis, quel que soit le coup de Staller, Dominator peut dominer le reste du graphe avec au plus $(r-2) + (s-r+1)$ coups. En effet, si Staller joue sur un des sommets des paires (x_i, x'_i) Dominator peut répondre sur l'autre sommet et la même stratégie s'applique aux paires (z_i, z'_i) . Si Staller joue sur un sommet y_i ou y'_i , Dominator peut ignorer ce coup car ces sommets sont déjà dominés par x_1 et il peut faire comme si Staller avait joué ailleurs. Similairement, si Staller joue sur x_2 , Dominator peut ignorer ce coup car il sera doiner par un des sommets z_i ou z'_i que Dominator jouera nécessairement. Avec cette stratégie, Dominator s'assure qu'il jouera au plus $1 + (r-2) + (s-r+1) = s$ coups, ce qui prouve que $\gamma_{\text{MB}}(G) \leq s$. Pour prouver l'inégalité opposée, considérons la stratégie suivante pour Staller. Si le premier coup de Dominator est sur le sommet x_1 , alors Staller joue sur x_2 . Il faudra dans ce cas au moins $(r-2) + (s-r+1)$ autres coups à Dominator pour dominer G . Si, au contraire, Dominator ne joue pas sur x_1 à son premier coup alors Staller joue sur x_1 et il faudra que Dominator joue au moins $(r-2) + (t-r+1) \geq (r-2) + (s-r+1)$ autres coups pour que le jeu s'arrête. Dans tous les cas, $\gamma_{\text{MB}}(G) \geq 1 + (r-2) + (s-r+1) = s$.

Considérons à présent le cas où Staller commence. Pour prouver que $\gamma'_{\text{MB}}(G_{r,s,t}) = t$ nous exhibons des stratégies pour chacun des joueurs qui leur assure cette valeur. Ainsi si Staller joue sur x_1 à son premier coup, quoi que fasse Dominator il lui restera au moins $(t-r+1) + 1 + (r-2)$ coups à jouer, donc $\gamma'_{\text{MB}}(G_{r,s,t}) \geq t$. Dominator peut, quant à lui, s'assurer de ne pas jouer plus de t coups. Pour ce faire, à chaque fois que Staller joue sur un sommet x_i ou x'_i , avec $i \geq 3$, il répond sur l'autre sommet. De plus, Dominator pourra jouer soit sur x_1 soit sur x_2 au cours de la partie et il lui faudra seulement jouer les $t-r+1$ ou $s-r+1$ coups correspondants aux sommets voisins de l'autre sommet. Dominator peut donc bien s'assurer de jouer au plus t coups, ce qui conclut la preuve. \square

Notons que si $\gamma(G) = 1$, alors $\gamma_{\text{MB}}(G) = 1$. Le théorème 3.10 ne s'étend donc pas au cas $r = 1$. D'un autre côté, si G_t , $t \geq 1$, est le graphe obtenu à partir de t triangles disjoints en identifiant un sommet de chaque triangle (ce nouveau sommet étant donc de degré $2t$), on a $\gamma(G_t) = 1$, $\gamma_{\text{MB}}(G_t) = 1$, et $\gamma'_{\text{MB}}(G_t) = t$.

Le théorème 3.10 s'étend aussi aux graphes fortement connectés. Pour voir cela, considérons le graphe $H_{k,r,s,t}$, $2 \leq r \leq s \leq t$, $k \geq 1$, représenté dans la Figure 3.5. Ici, chaque sommet des cliques K_k est adjacent à chaque sommet de la clique K_{k+r} . Donc, par des arguments similaires aux précédents, on peut voir que $\gamma(H_{k,r,s,t}) = r$, $\gamma_{\text{MB}}(H_{k,r,s,t}) = s$, $\gamma'_{\text{MB}}(H_{k,r,s,t}) = t$ et que de plus $H_{k,r,s,t}$ est $(k+1)$ -connexe.

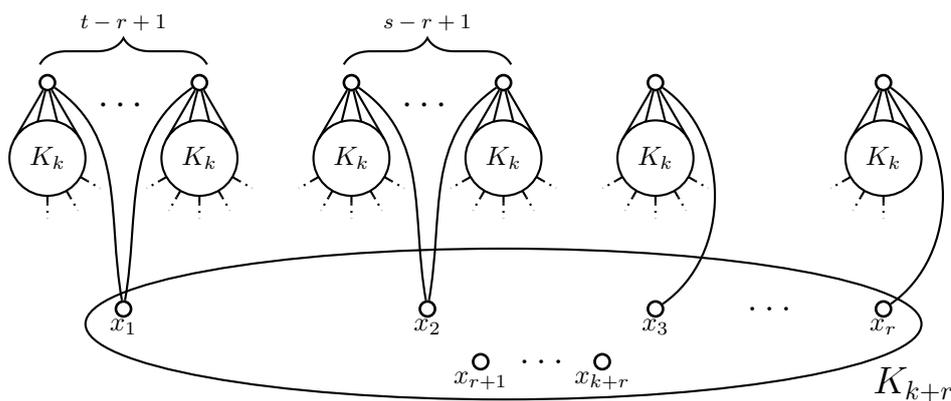


FIGURE 3.5 – Représentation du graphe $H_{k,r,s,t}$

Tant pour les graphes $G_{r,s,t}$ que pour les graphes $H_{k,r,s,t}$ il est facile de constater que Dominator a une stratégie gagnante. En effet, il y a un ensemble d'arêtes tel que si Dominator joue sur l'une des extrémités de chacune de ces arêtes il domine le graphe. Dans la partie suivante nous généralisons ce critère de victoire pour Dominator.

Nous considérons donc deux problématiques pour le jeu de domination Maker-Breaker :

l'issue et le nombre de domination Maker-Breaker. Nous allons à présent développer des outils qui nous permettront de travailler sur ces deux problématiques.

3 Ensembles dominants par appariement

Une stratégie assez naturelle pour Breaker dans les jeux Maker-Breaker est la *stratégie d'appariement* explicitée par Hefetz *et al.* [75]. Cette stratégie peut être appliquée lorsqu'un sous-ensemble de sommets peut être partitionné en paires de telle sorte que chaque hyperarête contienne l'une des paires. Dans ce cas, une stratégie pour Breaker consiste à toujours jouer dans la même paire que Maker si possible et ailleurs autrement. Ce faisant, Breaker occupera au moins un élément de chaque paire et donc gagnera la partie. Dans le contexte du jeu de domination Maker-Breaker, un tel sous-ensemble correspond à une variante de la domination que nous introduisons ci-dessous.

Définition 3.11. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un ensemble de paires de sommets $\{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$ de V est un *ensemble dominant par appariement* si les paires sont deux à deux disjointes et si les intersections des voisinages fermés de chaque paire couvrent tous les sommets de G :

$$V = \bigcup_{i=1}^k N[u_i] \cap N[v_i].$$

La Figure 3.6 montre un exemple d'ensemble dominant par appariement. Si on choisit un sommet pour chaque paire (u_i, v_i) de l'ensemble dominant par appariement, l'ensemble obtenu est un ensemble dominant de G .

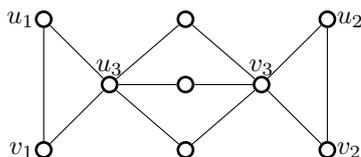


FIGURE 3.6 – L'ensemble $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)\}$ est un ensemble dominant par appariement.

Un sommet w est dit *dominé par appariement* par une paire de sommets (u, v) si on a $w \in N[u] \cap N[v]$. Notons qu'une paire (u, v) d'un ensemble dominant par appariement n'est pas nécessairement une arête du graphe, comme on peut le voir dans la Figure 3.6.

L'intérêt principal de la domination par appariement est que sélectionner un sommet dans chaque paire d'un ensemble dominant par appariement permet d'obtenir un ensemble dominant classique, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.12. Soit G un graphe et $P = \{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$ un ensemble de paires de sommets de G , deux à deux disjointes. L'ensemble P est un ensemble dominant par appariement de G si et seulement si, pour tout ensemble $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ avec $w_i \in \{u_i, v_i\}$, l'ensemble W est un ensemble dominant de G .

Démonstration. Supposons que P soit un ensemble dominant par appariement. On a donc $\bigcup_{i=1}^k N[u_i] \cap N[v_i] = V$. Or $\bigcup_{i=1}^k N[w_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^k N[u_i] \cap N[v_i] = V$. Les ensembles $\{w_1, \dots, w_k\}$ sont donc bien tous des ensembles dominants de G .

Supposons que, pour tout ensemble $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ avec $w_i \in \{u_i, v_i\}$, l'ensemble W soit un ensemble dominant de G . Prouvons par l'absurde que P est un ensemble dominant par appariement. Supposons qu'il existe un sommet u de $V(G)$ qui ne soit pas couvert par appariement par P . Donc, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le sommet u n'appartient pas à $N[u_i] \cap N[v_i]$ et il existe donc $w_i \in \{u_i, v_i\}$ tel que $u \notin N[w_i]$. En choisissant tous les w_i qui ont cette propriété, on obtient un ensemble $\{w_1, \dots, w_k\}$ tel que u n'est pas couvert par cet ensemble, ce qui est une contradiction avec la supposition de départ. P est donc bien un ensemble dominant par appariement. \square

Cette propriété nous permet de traduire la stratégie d'appariement appliquée au jeu de domination Maker-Breaker en une stratégie sur un ensemble dominant par appariement :

Proposition 3.13. *Si un graphe G admet un ensemble dominant par appariement, alors $o(G) = \mathcal{D}$.*

Démonstration. Si G admet un ensemble dominant par appariement $\{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$, alors Dominator peut appliquer la stratégie suivante en tant que second joueur : chaque fois que Staller joue sur un sommet d'une paire (u_i, v_i) pour un certain i , Dominator réplique en jouant sur l'autre sommet de la paire s'il n'est pas déjà occupé (si c'est le cas, il est nécessairement occupé par Dominator). Sinon, Dominator joue un coup arbitraire. En suivant cette stratégie Dominator va occuper un sommet de chaque paire (u_i, v_i) et, par la proposition 3.12, il va former un ensemble dominant de G . Ainsi Dominator a une stratégie gagnante en tant que second joueur et, par la proposition 3.6, l'issue de G est donc \mathcal{D} . \square

Ce résultat induit le corollaire suivant qui assure une stratégie gagnante pour Dominator en tant que premier joueur.

Corollaire 3.14. *Étant donné un graphe G , s'il existe un sommet u de G tel que $G \setminus N[u]$ admet un ensemble dominant par appariement, alors $\mathcal{N} \preceq o(G)$.*

Démonstration. Si un tel sommet existe, alors une stratégie gagnante pour Dominator est de jouer sur ce sommet à son premier coup et ensuite d'appliquer sa stratégie d'appariement sur $G \setminus N[u]$ en tant que deuxième joueur. \square

Remarque 3.15. On peut aussi remarquer que dans la preuve de l'issue sur les graphes admettant un ensemble dominant par appariement, au lieu de jouer sur un sommet arbitraire lorsqu'il n'a pas à répondre au coup de Staller, Dominator peut jouer un sommet sur une paire non jouée. Ce faisant, Dominator ne joue que sur des sommets des paires de l'ensemble dominant par appariement. Cela permet donc de borner les nombres de domination Maker-Breaker. Si un graphe G admet un ensemble dominant par appariement $\{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$ alors $\gamma_{\text{MB}}(G) \leq \gamma'_{\text{MB}}(G) \leq k$.

Une question naturelle est celle de la détection de graphes admettant un ensemble dominant par appariement. Les graphes dont les sommets peuvent être partitionnés en cliques de taille au moins 2 sont des exemples de tels graphes. Pour ces graphes, un ensemble dominant par appariement naturel consiste à choisir une paire de sommets pour chaque clique. En particulier, si un graphe admet un couplage parfait alors il admet une telle partition, et donc est d'issue \mathcal{D} . Cela implique en particulier que tous les graphes ayant un cycle hamiltonien pair sont \mathcal{D} . Le problème consistant à savoir si un graphe donné peut être couvert par des cliques de taille au moins 2 a été prouvé comme étant polynomial par Hell et Kirkpatrick en 1984 [76].

Cependant, on peut remarquer que le graphe de la Figure 3.6 n'admet pas de couverture par des cliques de taille au moins 2. Trouver des ensembles dominants par appariement ne se résume donc pas à trouver des cliques dans le graphe et la question de la complexité de la présence d'ensembles dominants par appariement se pose. Nous avons d'ailleurs prouvé que ce problème était plus compliqué :

Théorème 3.16 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Soit G un graphe, décider si G admet un ensemble dominant par appariement est NP-complet.*

Démonstration. Il est clair que ce problème est dans NP, il faut à présent prouver qu'il est NP-difficile, ce que nous allons faire avec une réduction depuis 3-SAT.

Soit $F = C_1 \vee \dots \vee C_m$ une instance de 3-SAT dont les variables sont X_1, \dots, X_n . Sans perdre en généralité on peut supposer que toutes les variables apparaissent à la fois sous la forme positive et négative, mais pas dans la même clause. Depuis F , nous allons construire le graphe G comme représenté dans la Figure 3.7.

- Chaque clause C_j , $1 \leq j \leq m$, est associée à un sommet c_j .
- Chaque variable X_i , $1 \leq i \leq n$ est associée à un gadget de sept sommets $\{x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, t_i\}$ tels que $x_i y_i z_i$ et $x'_i y'_i z'_i$ sont des triangles et t_i est adjacent à x_i et x'_i . Les paires (x_i, y_i) et (x'_i, y'_i) seront respectivement désignées par e_i et \bar{e}_i .
- Pour toute variable X_i et toute clause C_j , les arêtes $c_j x_i$ et $c_j y_i$ (resp. $c_j x'_i$ et $c_j y'_i$) sont ajoutées si X_i apparaît positivement (resp. négativement) dans la clause C_j .

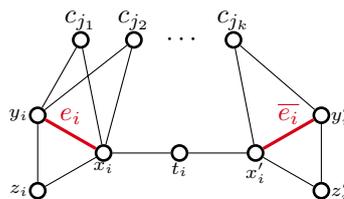


FIGURE 3.7 – Gadget de la variable X_i pour la preuve de NP-difficulté. Les clauses C_{j_1}, \dots, C_{j_k} sont celles dans lesquelles la variable X_i apparaît.

Nous affirmons dans un premier temps que toute affectation des variables X_1, \dots, X_n qui satisfait F induit un ensemble dominant par appariement pour G . Soit σ une telle assignation. Nous construisons l'ensemble suivant D de paires de sommets : pour toute variable X_i , nous ajoutons les paires $\{(x_i, y_i), (t_i, x'_i), (y'_i, z'_i)\}$ à D si X_i est assignée à VRAI dans σ , et les paires $\{(x'_i, y'_i), (t_i, x_i), (y_i, z_i)\}$ sinon. Il suffit à présent de montrer que D est un ensemble dominant par appariement de G . Dans un premier temps, on peut remarquer que tous les sommets des gadgets (soit les sommets différents de ceux des clauses c_j) sont dominés par appariement par D . De plus, chaque clause C_j est satisfaite par σ donc chaque sommet c_j est voisin d'au moins une paire (x_i, y_i) ou (x'_i, y'_i) de D . Tous les sommets sont donc bien dominés par appariement.

Considérons à présent un ensemble dominant par appariement D de G . Montrons d'abord que pour le gadget associé aux variables X_i il n'y a, à symétrie près, que quatre façons de dominer par appariement les sommets t_i, z_i et z'_i , représentés dans la Figure 3.8. En effet, comme les sommets t_i sont de degré 2, il y a trois cas possibles pour qu'ils soient dominés par appariement par D : une des paires (t_i, x'_i) , (t_i, x_i) et (x_i, x'_i) doit appartenir à D .

(i) Si la paire (t_i, x'_i) appartient à D , alors, en considérant le sommet z'_i de degré 2, la paire (y'_i, z'_i) doit appartenir à D . Quant au sommet z_i , il doit être dominé par des sommets du triangle $x_i y_i z_i$, ce qui donne les trois cas (a), (b) et (c) de la Figure 3.8.

(ii) Si la paire (t_i, x_i) appartient à D , alors, par symétrie, ce cas est similaire au précédent et nous obtenons les paires symétriques à celles des figures (a), (b) et (c).

(iii) Si la paire (x_i, x'_i) appartient à D (Figure 3.8 (d)), alors les sommets z_i et z'_i doivent appartenir à D dans les paires (y_i, z_i) et (y'_i, z'_i) .

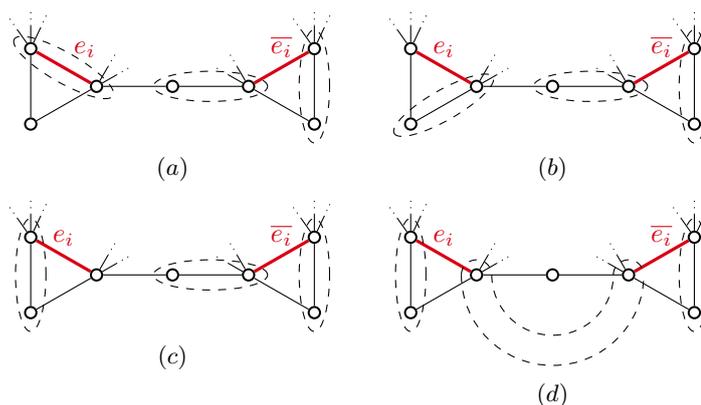


FIGURE 3.8 – Possibles ensembles dominants par appariement pour le gadget de la preuve du théorème 3.16 (à symétrie près).

Afin de trouver une assignation de F , nous montrons à présent que D peut être transformé en un ensemble dominant par appariement dans lequel toutes les paires sont de la forme de la Figure 3.8 (a) (ou son symétrique, comme expliqué dans le cas (ii)). Considérons d'abord le cas où, pour le gadget associé à une variable X_i , les paires de D sont dans la configuration de la Figure 3.8 (b). Comme le sommet z_i n'a pas d'autres voisins que x_i et y_i , remplacer la paire

(x_i, z_i) par la paire (x_i, y_i) dans D conserve la propriété de domination par appariement car x_i et y_i sont tous deux adjacents à z_i . Cette opération n'est possible que dans le cas où y_i n'est pas déjà dans D . Dans le cas où y_i serait dans D avec la paire (y_i, u) , remarquons qu'en retirant cette paire et en ajoutant (x_i, y_i) , D reste un ensemble dominant par appariement. En effet, le voisinage de y_i est inclus dans le voisinage de x_i , on sait donc que $N[u] \cap N[y_i] \subseteq N[x_i] \cap N[y_i]$. Comme x_i et y_i jouent un rôle symétrique, on peut utiliser le même argument pour remplacer les paires de la forme de la Figure 3.8 (c) par des paires de la Figure 3.8 (a). Le dernier cas concerne les paires de D dans la configuration de la Figure 3.8 (d) pour une variable X_i . Comme $N[y_i] \cap N[z_i] \subseteq N[y_i] \cap N[x_i]$ et $N[x_i] \cap N[x'_i] = \{t_i\} \subset N[t_i] \cap N[x'_i]$ (car X_i et \bar{X}_i ne peuvent pas être dans la même clause), on peut remplacer les paires de la Figure 3.8 (d) par celle de la Figure 3.8 (a) en conservant la propriété de domination par appariement de D . Si t_i était déjà dans D , avec une paire (t_i, u) , cette paire peut être retirée. En effet, le sommet u ne peut être ni x_i ni x'_i car ces sommets étaient dans d'autres paires et donc $N[t_i] \cap N[u]$ est vide.

Nous avons donc transformé D de telle sorte que tous les sommets différents des c_j sont dominés par appariement par des paires de sommets dans la configuration de la Figure 3.8 (a). De plus, si D admet d'autres paires que celles décrites dans la Figure 3.8 (a), alors elles sont nécessairement de la forme (c_j, c_l) , (z_i, u) ou (z'_i, u) . Ces deux derniers types de paires peuvent être retirés de D car $N[z_i]$ et $N[z'_i]$ sont déjà dominés par appariement. Les paires (c_j, c_l) peuvent aussi être retirées de D car les sommets de $N[c_j] \cap N[c_l]$ appartiennent aux gadgets (et sont différents des sommets de clauses) et sont déjà dominés par appariement.

Nous construisons à présent l'assignation des variables de F suivante : pour tout $1 \leq i \leq n$, la variable X_i est assignée à VRAI si et seulement si la paire e_i appartient à D . Comme tous les sommets c_j sont dominés par appariement dans D par au moins une des paires e_i ou \bar{e}_i pour un certain i , cela signifie que chaque clause correspondante C_j a au moins un littéral égal à VRAI, ce qui conclut la preuve. \square

Il est donc difficile de savoir si un graphe donné dispose d'un ensemble dominant par appariement. De plus, savoir qu'un graphe n'admet pas d'ensemble dominant par appariement ne permet pas de caractériser l'issue du graphe.

Remarque 3.17. La condition de la proposition 3.13 n'est pas une condition nécessaire au fait qu'un graphe ait pour issue \mathcal{D} . En effet, les graphes représentés en Figure 3.9 ont pour issue \mathcal{D} mais n'admettent pas d'ensemble dominant par appariement. Nous verrons dans la partie 5 deux familles de graphes (les cographes et les arbres) pour lesquelles il y a équivalence entre l'existence d'une stratégie gagnante et l'existence d'un ensemble dominant par appariement.

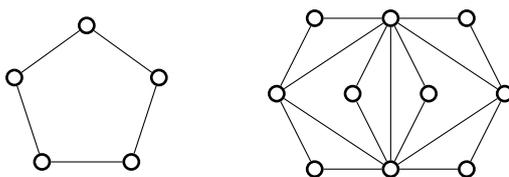


FIGURE 3.9 – Deux graphes dont l'issue est \mathcal{D} et qui n'admettent pas d'ensemble dominant par appariement.

Étant donné qu'il est NP-complet de savoir si un graphe admet un ensemble dominant par appariement et que cela ne suffit pas à caractériser les graphes \mathcal{D} , on peut supposer que déterminer l'issue du jeu de domination Maker-Breaker est aussi un problème difficile dans le cas général, ce que nous allons montrer dans la partie suivante.

4 Complexité

Dans cette partie, nous étudions la complexité algorithmique du problème consistant à décider si l'issue d'une position du jeu de domination Maker-Breaker est \mathcal{S} , \mathcal{N} ou \mathcal{D} . Remarquons dans un premier temps que, dans le cas général, décider de l'issue d'une position du jeu Maker-Breaker (X, \mathcal{F}) est PSPACE-complet. En effet, ce jeu correspond exactement au jeu POS-CNF dont il a

été prouvé qu'il était PSPACE-complet par Schaefer en 1978 [104].

La complexité du jeu Maker-Breaker reste PSPACE-complet quand on se restreint au jeu de domination Maker-Breaker :

Théorème 3.18 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Décider de l'issue d'une position du jeu de domination Maker-Breaker est PSPACE-complet sur les graphes bipartis.*

Démonstration. On réduit ce problème depuis Maker-Breaker. Soit (X, \mathcal{F}) une instance du jeu Maker-Breaker avec n sommets et m hyperarêtes. On construit à présent un graphe biparti $G = (V, E)$ à partir de cette instance comme suit : il y a un sommet u_i par sommet x_i de X et deux sommets a_j^0 et a_j^1 par hyperarête A_j de \mathcal{F} , on a donc $V = \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_j^k | 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq 1\}$. De plus, on ajoute une arête entre un sommet u_i et les sommets a_j^0 et a_j^1 si le sommet x_i appartient à l'hyperarête A_j . La Figure 3.10 montre un hypergraphe et le graphe G qui lui est associé pour la réduction de Maker-Breaker vers le jeu de domination Maker-Breaker.

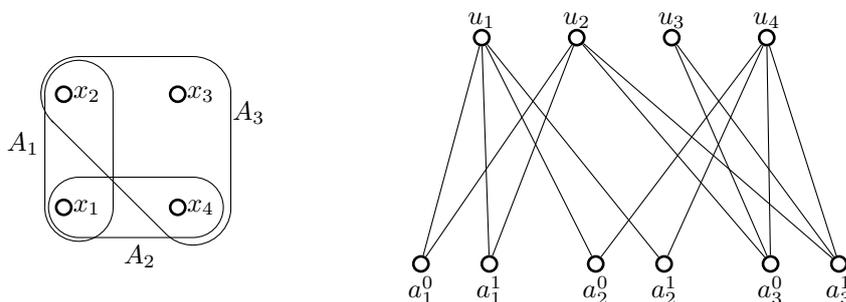


FIGURE 3.10 – Un hypergraphe et le graphe qui lui est associé pour la réduction de Maker-Breaker vers le jeu de domination Maker-Breaker

On montre à présent que Breaker a une stratégie gagnante sur (X, \mathcal{F}) en tant que premier joueur (respectivement second joueur) si et seulement si Dominator a une stratégie gagnante sur G en tant que premier (resp. second) joueur.

Supposons que Breaker ait une stratégie gagnante sur (X, \mathcal{F}) . On considère d'abord le cas où Breaker joue le dernier coup sur (X, \mathcal{F}) (c'est-à-dire n est impair et Breaker joue en premier ou n est pair et Breaker joue en deuxième).

Dominator construit sa stratégie sur G comme suit :

- Si Breaker et Dominator commencent la partie, Dominator joue le coup u_i correspondant au sommet x_i joué par Breaker dans sa stratégie gagnante.
- Chaque fois que Staller joue sur un sommet a_j^k , Dominator réplique sur a_j^{1-k} .
- Chaque fois que Staller joue sur un sommet u_i , Dominator suppose que Maker a joué sur le sommet x_i correspondant. Il répond ensuite en jouant sur le sommet $u_{i'}$ correspondant au sommet $x_{i'}$ joué par Breaker dans sa stratégie gagnante.

Cette dernière étape est toujours possible car on a supposé que Breaker jouait le dernier coup. Quand tous les sommets ont été joués, comme Breaker a une stratégie gagnante sur (X, \mathcal{F}) , pour tout sommet a_j^k il y a un sommet u_i parmi ses voisins qui a été sélectionné par Dominator. Comme tous les sommets x_i appartiennent à une hyperarête et que, pour tout j , Dominator sélectionne a_j^0 ou a_j^1 , tous les sommets u_i sont dominés par l'un des coups de Dominator. Dominator gagne donc la partie.

Si Breaker ne joue pas le dernier coup, Dominator suit la même stratégie mais quand Staller joue le dernier sommet u_i , Dominator ne peut pas répondre sur un autre sommet $u_{i'}$. Il peut alors jouer sur un sommet d'hyperarête a_j^k et imaginer qu'il n'a pas joué ce sommet, comme dans la stratégie d'imagination de la proposition 3.6, et il continue de jouer suivant sa stratégie. Si, à un moment donné, Staller joue sur le sommet a_j^{1-k} , alors Dominator peut jouer sur un autre sommet a_j^k . À la fin, il y aura, comme précédemment, un sommet pour chaque hyperarête qui sera joué par Dominator et la même conclusion s'applique.

Supposons à présent que Maker a une stratégie gagnante sur (X, \mathcal{F}) . La stratégie de Staller est exactement la même :

- Chaque fois que la stratégie de Maker le fait jouer sur un sommet x_i , Staller joue sur le sommet u_i .
- Chaque fois que Dominator joue sur un sommet a_j^k , Staller répond sur le sommet a_j^{1-k} .
- Chaque fois que Dominator joue sur un sommet u_i , Staller fait comme si Breaker avait joué sur le sommet x_i .

Si cette dernière étape n'est pas possible, cela signifie que tous les sommets x_i ont été joués. Cela signifie qu'il y a une hyperarête A_j dont tous les sommets ont été sélectionnés par Maker. Si a_j^0 and a_j^1 ont déjà été joués, l'un d'entre eux a été sélectionné par Staller et est donc isolé. Sinon, Staller pourra jouer sur l'un d'entre eux et gagnera. \square

En modifiant légèrement la preuve précédente, on obtient un résultat similaire pour les graphes scindés.

Corollaire 3.19. *Décider de l'issue d'une position du jeu de domination Maker-Breaker est PSPACE-complet sur les graphes cordaux et, en particulier, sur les graphes scindés.*

Démonstration. La preuve du théorème 3.18 reste valide en rajoutant des arêtes entre les sommets u_i . En particulier, s'ils forment une clique le graphe obtenu est un graphe scindé et donc un graphe cordal. \square

Ainsi, comme décider si le nombre de domination Maker-Breaker est infini ou non est PSPACE-complet, savoir s'il est inférieur à un entier k donné l'est aussi. Cependant on peut se demander ce qu'il en est lorsqu'on sait que Dominator possède une stratégie gagnante. Le résultat suivant montre que le problème est aussi difficile dans ce cas là.

Théorème 3.20 (Gledel). *Décider si le nombre de domination Maker-Breaker est inférieur à un entier k est PSPACE-complet sur les graphes admettant un ensemble dominant par appariement.*

Démonstration. La preuve de ce théorème suit exactement la même structure que celle du théorème 3.18, nous allons à nouveau faire une réduction depuis Maker-Breaker. Soit (X, \mathcal{F}) une instance du jeu Maker-Breaker avec n sommets et m hyperarêtes. On construit un graphe $G = (V, E)$ comme suit : il y a trois sommets u_i, v_i et w_i par sommet x_i de X et il y a deux sommets a_j^0 et a_j^1 par hyperarête A_j de \mathcal{F} . Les sommets u_i, v_i et w_i forment des triangles et les sommets a_j^0 et a_j^1 des arêtes. De plus, si un sommet x_i de X appartient à une hyperarête A_j alors les sommets u_i est connecté aux sommets a_j^0 et a_j^1 . La Figure 3.11 donne une représentation d'un tel graphe pour un hypergraphe de départ donné.

L'ensemble $\{(v_i, w_i) | i \in [1, n]\} \cup \{(a_j^0, a_j^1) | j \in [1, m]\}$ est un ensemble dominant par appariement pour G , il nous faut donc à présent montrer que Dominator gagne en n coups ou moins sur G en tant que premier joueur (respectivement deuxième joueur) si et seulement si Breaker gagne sur (X, \mathcal{F}) en tant que premier joueur (resp. deuxième joueur).

Remarquons d'abord que Dominator ne peut pas gagner en moins de n coups. En effet, pour tout i le sommet v_i ne peut être dominé que par les sommets u_i, v_i ou w_i , il faut donc que Dominator joue au moins un coup dans chaque triangle $\{u_i, v_i, w_i\}$.

Supposons que Breaker ait une stratégie gagnante sur (X, \mathcal{F}) . On construit une stratégie gagnante pour Dominator de la façon suivante :

- Si Breaker et Dominator commencent la partie, Dominator joue le coup u_i correspondant au sommet x_i joué par Breaker dans sa stratégie gagnante.
- Chaque fois que Staller joue sur un sommet u_i , Dominator suppose que Maker a joué sur le sommet x_i correspondant. Il répond ensuite en jouant sur le sommet $u_{i'}$ correspondant au sommet $x_{i'}$ joué par Breaker dans sa stratégie gagnante.
- Chaque fois que Staller joue sur un sommet v_i (respectivement w_i) dont le sommet u_i a déjà été joué par Staller, Dominator joue sur w_i (resp. v_i).
- Chaque fois que Staller joue sur un sommet v_i (respectivement w_i) dont le sommet u_i n'a pas encore été joué, Dominator joue sur u_i .
- Chaque fois que Staller joue sur un sommet a_j^k ou un sommet v_i ou w_i dont le sommet u_i associé a déjà été joué par Dominator, Dominator joue sur un sommet u'_i dont les sommets v'_i et w'_i associés n'ont pas encore été joués.

- Si Dominator doit jouer sur un sommet u_i et ne le peut pas, il joue sur un sommet u'_i dont les sommets v'_i et w'_i associés n'ont pas encore été joués.
- S'il n'y a plus de sommet u_i non joué, que c'est au tour de Dominator et qu'aucune des règles précédentes ne s'applique, alors il joue sur un sommet y_i dont le sommet u_i associé est joué par Staller et le sommet w_i est non joué.

Remarquons qu'avec cette stratégie, Dominator joue exactement une fois par triangle $\{u_i, v_i, w_i\}$ et aucune fois dans les sommets a_j^0 et a_j^1 . Tous les triangles sont donc dominés et il n'a joué que n coups. De plus, comme Dominator suit la stratégie gagnante de Breaker et qu'il répond à chaque coup de Staller comme si elle jouait un coup de Maker, l'ensemble des sommets u_i joués par Dominator domine les sommets a_j^0 et a_j^1 . Dominator a donc bien une stratégie gagnante en n coups.

Si, au contraire, Maker gagne sur (X, \mathcal{F}) alors Staller peut suivre cette stratégie et gagner sur G . Pour ce faire, elle applique la stratégie suivante :

- Si Maker et Staller commencent la partie, Staller joue le coup u_i correspondant au sommet x_i joué par Maker dans sa stratégie gagnante.
- Chaque fois que Dominator joue sur un sommet u_i , Staller suppose que Breaker a joué sur le sommet x_i correspondant. Elle répond ensuite en jouant sur le sommet $u_{i'}$ correspondant au sommet $x_{i'}$ joué par Maker dans sa stratégie gagnante.
- Chaque fois que Dominator joue sur un sommet a_j^k , v_i ou w_i , Staller fait comme s'il avait joué sur un sommet u_i et joue donc sur le sommet u'_i correspondant à la réponse de Maker.
- Si Staller doit jouer sur un sommet u_i et ne le peut pas, elle joue sur un autre sommet u'_i non joué quelconque.

Comme Maker a une stratégie gagnante sur (X, \mathcal{F}) , il y a une hyperarête A_j pour laquelle il a joué sur tous les sommets. En suivant la stratégie de Maker, il y aura donc des sommets a_j^0 et a_j^1 dont tous les voisins u_i auront été joués par Staller. Pour dominer a_j^0 et a_j^1 , Dominator devra donc jouer sur l'un de ces deux sommets et, avec les n autres coups sur les triangles $\{u_i, v_i, w_i\}$, il aura donc joué sur au moins $n + 1$ sommets. Staller a donc une stratégie pour forcer Dominator à jouer strictement plus de n coups. \square

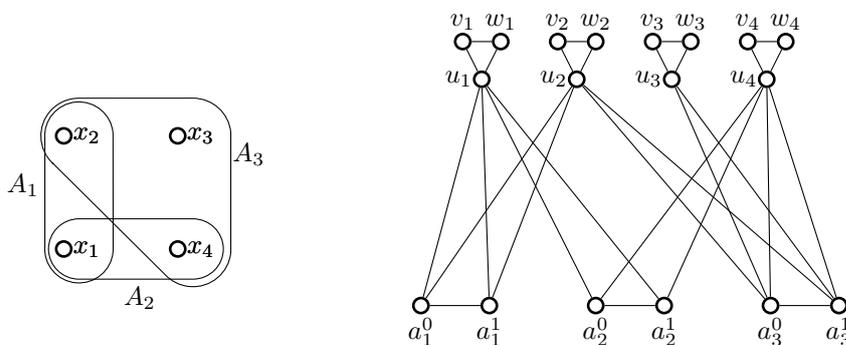


FIGURE 3.11 – Un hypergraphe et le graphe qui lui est associé pour la réduction des jeux Maker-Breaker vers le nombre de domination Maker-Breaker avec un ensemble dominant par appariement.

À la vue de ces résultats, la question de la limite entre la PSPACE-complétude et la polynomialité est assez naturelle. Ainsi, dans la partie suivante, nous étudions des classes de graphes pour lesquelles la complexité de ce problème devient polynomiale.

5 Opérations sur les graphes

Dans cette partie, nous allons étudier l'issue et le nombre de domination Maker-Breaker après différentes opérations sur les graphes. Cela nous permettra de donner des algorithmes polynomiaux pour résoudre le jeu de domination Maker-Breaker sur des familles construites avec ces opérations : les cographes et les forêts.

5.1 Union et joint

L'union et le joint sont deux des opérations binaires sur les graphes les plus connues et les plus étudiées. De par leur simplicité et leur lien avec la classe des cographes, il nous a semblé pertinent d'étudier l'issue et les nombres de domination Maker-Breaker après ces opérations.

On commence par caractériser l'issue de l'union de deux graphes en fonction de l'issue des graphes de départ.

Théorème 3.21 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Soit G et H deux positions du jeu de domination Maker-Breaker.*

- Si $o(G) = \mathcal{S}$ ou $o(H) = \mathcal{S}$ alors $o(G \cup H) = \mathcal{S}$.
- Si $o(G) = o(H) = \mathcal{N}$ alors $o(G \cup H) = \mathcal{S}$.
- Si $o(G) = o(H) = \mathcal{D}$ alors $o(G \cup H) = \mathcal{D}$.
- Sinon $o(G \cup H) = \mathcal{N}$.

Ce résultat est résumé dans le tableau 3.1.

	H	\mathcal{D}	\mathcal{N}	\mathcal{S}
G		\mathcal{D}	\mathcal{N}	\mathcal{S}
\mathcal{D}		\mathcal{D}	\mathcal{N}	\mathcal{S}
\mathcal{N}		\mathcal{N}	\mathcal{S}	\mathcal{S}
\mathcal{S}		\mathcal{S}	\mathcal{S}	\mathcal{S}

TABLE 3.1 – Issues du jeu de domination Maker-Breaker joué sur l'union de G et de H

Démonstration. Supposons que Staller a une stratégie gagnante sur G ou H . On peut supposer, sans perdre en généralité, qu'elle a une stratégie gagnante sur G . Alors, sa stratégie gagnante sur $G \cup H$ est de ne jouer que sur G et d'appliquer sa stratégie gagnante. Si Dominator joue sur H , cela peut être considéré comme passer son tour sur G et d'après la proposition 3.6 cela ne peut pas nuire à la stratégie de Staller. Suivant cette stratégie, à un moment donné de la partie, elle isolera un sommet de G et donc de $G \cup H$.

Ainsi si G ou H sont d'issue \mathcal{S} , alors quoi que fasse Dominator a son premier coup, Staller aura toujours une stratégie gagnante sur $G \cup H$. Si les deux graphes sont d'issue \mathcal{N} alors, après le premier coup de Dominator, Staller peut jouer sur l'autre composante et gagner. Cela prouve les deux premier points.

Si les deux positions sont d'issue \mathcal{D} , alors Dominator a une stratégie gagnante sur chacun des graphes en tant que second joueur. Il peut donc répondre à chaque coup de Staller dans la même composante qu'elle en suivant sa stratégie gagnante sur ce graphe. Si tous les sommets de l'une des composantes ont déjà été joués, Dominator peut jouer un sommet quelconque de l'autre composante et imaginer qu'il ne l'a pas joué, comme la stratégie d'imagination de la proposition 3.6. À la fin de la partie, de par ses stratégies gagnantes sur chaque graphe, Dominator domine les deux composantes et gagne donc. Comme il gagne en tant que second joueur l'issue est bien \mathcal{D} .

Supposons enfin, sans perdre en généralité, que G est d'issue \mathcal{N} et que H est d'issue \mathcal{D} . Si Staller joue en premier, elle peut appliquer sa stratégie gagnante sur G et sera à même d'isoler un sommet et de gagner. D'un autre côté, si Dominator joue en premier, il pourra jouer son coup gagnant sur G puis répondre avec sa stratégie gagnante dans la composante dans laquelle Staller jouera. Il dominera donc les deux composantes et gagnera. Le joueur jouant le premier coup dispose donc d'une stratégie gagnante et l'issue de $G \cup H$ est donc \mathcal{N} . \square

Notons que l'issue \mathcal{S} est absorbante pour l'union tandis que \mathcal{D} est neutre. Intuitivement, ce résultat se comprend par le fait que Dominator doit dominer les deux graphes alors que Staller peut choisir le graphe où elle souhaite isoler un sommet.

S'il est aisé de déterminer l'issue de l'union de deux graphes il est en revanche bien plus délicat d'en déterminer les nombres de domination Maker-Breaker.

Théorème 3.22 (G., Iršič et Klavžar, 2019 [65]). *Soit G et H deux graphes, on a*

- (i) $\gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H) \leq \gamma_{\text{MB}}(G \cup H) \leq \min\{\gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H), \gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H)\},$
- (ii) $\max\{\gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H), \gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H)\} \leq \gamma'_{\text{MB}}(G \cup H) \leq \gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H).$

De plus ces bornes sont atteintes.

Démonstration. (i) D'après le théorème 3.21, si $\gamma_{\text{MB}}(G) = \infty$ ou $\gamma_{\text{MB}}(H) = \infty$, alors $\gamma_{\text{MB}}(G \cup H) = \infty$. Supposons donc que les D-nombres de domination Maker-Breaker de ces graphes sont finis. Nous donnons une stratégie pour Staller de telle sorte que, lorsque Dominator commence sur $G \cup H$, elle peut s'assurer qu'il sélectionne au moins $\gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H)$ sommets. Sa stratégie est la suivante : à chaque fois que Dominator joue un coup dans G (resp. H), elle répond dans la même composante avec sa stratégie optimale pour G (resp. H). Supposons que Dominator domine en premier G . À ce moment Staller joue un coup arbitraire dans H et la partie continue sur H comme si Dominator avait passé son tour, ce qui ne peut pas nuire à Staller d'après la proposition 3.6. Donc Staller s'est bien assurée que $\gamma_{\text{MB}}(G \cup H) \geq \gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H)$.

Pour prouver la borne haute, observons dans un premier temps la stratégie pour Dominator qui consiste à jouer son premier coup dans G avec sa stratégie optimale pour G puis à répondre dans la même composante que Staller avec sa stratégie optimale dans le graphe en question. Ce faisant, il applique sa stratégie optimale dans G en commençant et sa stratégie optimale dans H en jouant deuxième, ce qui lui garantit de jouer sur au plus $\gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H)$ sommets. Si, au contraire, il avait choisi de jouer sur H en premier, il se serait assuré de jouer sur au plus $\gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H)$ sommets. En choisissant la plus petite de ces deux valeurs, Dominator a une stratégie qui lui permet de jouer au plus $\min\{\gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H), \gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H)\}$ coups pour dominer $G \cup H$, donc $\gamma_{\text{MB}}(G \cup H) \leq \min\{\gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H), \gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H)\}$.

(ii) Ces bornes se prouvent avec des arguments similaires au cas précédent. Pour montrer la borne haute, Dominator suit Staller et applique sa stratégie gagnante dans le même graphe qu'elle et pour montrer la borne basse, Staller choisit pour son premier coup le graphe qui donne la valeur maximale entre $\gamma_{\text{MB}}(G) + \gamma'_{\text{MB}}(H)$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G) + \gamma_{\text{MB}}(H)$.

Pour montrer que ces bornes sont atteintes, considérons les graphes $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, et Y_k , $k \geq 1$, tels que représentés dans la Figure 3.12.

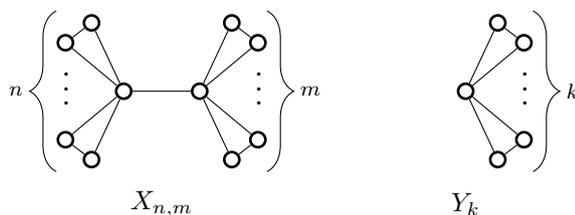


FIGURE 3.12 – Représentation des graphes $X_{n,m}$ et Y_k

Observons d'abord que $\gamma_{\text{MB}}(X_{n,m}) = m + 1$, $\gamma'_{\text{MB}}(X_{n,m}) = n + 1$, $\gamma_{\text{MB}}(Y_k) = 1$, et $\gamma'_{\text{MB}}(Y_k) = k$. Considérons l'union $X_{n,m} \cup Y_k$, avec $k \leq m$, et l'union $Y_{k_1} \cup Y_{k_2}$, avec $k_1 \leq k_2$. Tant pour Staller que pour Dominator, s'ils jouent en premier le meilleur coup est de jouer sur le sommet de plus gros degré. De plus la meilleure réponse, en tant que second joueur, est de jouer sur le second sommet de plus gros degré. On a donc,

- $\gamma_{\text{MB}}(X_{n,m} \cup Y_k) = 1 + m + 1$, ce qui atteint la borne basse de (i),
- $\gamma'_{\text{MB}}(X_{n,m} \cup Y_k) = n + 1 + k$, ce qui atteint la borne haute de (ii),
- $\gamma_{\text{MB}}(Y_{k_1} \cup Y_{k_2}) = k_1 + 1$, ce qui atteint la borne haute de (i) et
- $\gamma'_{\text{MB}}(Y_{k_1} \cup Y_{k_2}) = 1 + k_2$, ce qui atteint la borne basse de (ii).

□

Comme dit précédemment, du fait de la différence entre l'objectif local de Staller et global de Dominator, l'union est une opération qui est avantageuse pour Staller. Dans le cas du joint, nous montrons qu'au contraire cette opération est très avantageuse pour Dominator. Ceci s'explique par le fait que le nombre de domination du joint de deux graphes est au plus deux.

Théorème 3.23 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Soit G et H deux positions de départ du jeu de domination Maker-Breaker.*

$$o(G \bowtie H) = \begin{cases} \mathcal{N} \text{ si } G = K_1 \text{ et } o(H) = \mathcal{S}, \text{ ou si } H = K_1 \text{ et } o(G) = \mathcal{S} \\ \mathcal{D} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. (i) Supposons que $G = K_1$ et $o(H) = \mathcal{S}$. Si Dominator commence, il gagnera en jouant l'unique sommet de G et en dominant le joint, il a donc une stratégie gagnante en tant que premier joueur. Cependant, puisque $o(H) = \mathcal{S}$, si Staller commence, elle peut jouer sur l'unique sommet de G et ensuite appliquer sa stratégie gagnante en tant que deuxième joueuse sur H . Ainsi, elle gagne sur $G \bowtie H$ en tant que première joueuse, de même que Dominator, donc $o(G \bowtie H) = \mathcal{N}$.

(ii) Puisque nous ne sommes pas dans le premier cas, il y a deux possibilités, soit G et H ont tous deux au moins deux sommets, soit, sans perdre en généralité, $G = K_1$ et $o(H) \succeq \mathcal{N}$.

Supposons dans un premier temps que G et H ont plus de deux sommets. Soit u_1 et v_1 deux sommets de G et soit u_2 et v_2 deux sommets de H . Comme tous les sommets de H sont voisins de tous les sommets de G et réciproquement, $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ forme un ensemble dominant par appariement de $G \bowtie H$ et l'issue est donc \mathcal{D} d'après la proposition 3.13.

Supposons à présent que $G = K_1$ et que $o(H) \succeq \mathcal{N}$. Notons que Dominator a une stratégie gagnante sur H en tant que premier joueur. Supposons que Staller est la première à jouer. Si, à son premier coup, elle ne joue pas sur le sommet de G alors Dominator gagnera immédiatement en jouant dessus. Si au contraire elle joue sur ce sommet, alors Dominator peut appliquer sa stratégie gagnante sur H en tant que premier joueur. Cela lui permettra donc de dominer H et, puisque tous les sommets de H dominent G , tous les sommets de $G \bowtie H$ seront dominés. Dominator a donc une stratégie gagnante en tant que deuxième joueur et l'issue de $G \bowtie H$ est \mathcal{D} . \square

Avec des stratégies similaires, on peut aussi déterminer le nombre de domination Maker-Breaker du joint de deux graphes.

Théorème 3.24 (G., Iršič et Klavžar, 2019 [65]). *Soit G et H deux positions de départ du jeu de domination Maker-Breaker.*

$$(i) \gamma_{\text{MB}}(G \bowtie H) = \begin{cases} 1 \text{ si } G \text{ ou } H \text{ possèdent un sommet universel,} \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$(ii) \gamma'_{\text{MB}}(G \bowtie H) = \begin{cases} \gamma_{\text{MB}}(H) \text{ si } G = K_1, \\ 1 \text{ si } G \text{ ou } H \text{ possèdent deux sommets universels ou s'ils en possèdent un chacun,} \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. (i) Si G ou H possèdent un sommet universel alors $G \bowtie H$ a aussi un sommet universel. Dominator peut donc gagner à son premier coup en jouant dessus. Si ni G ni H n'ont de sommet universel alors $G \bowtie H$ n'a pas de sommet universel et Dominator ne peut pas gagner en un coup. Cependant ni G ni H ne peuvent être isomorphes à K_1 et ils ont donc tous les deux au moins deux sommets. Or, dans $G \bowtie H$, les sommets de G dominent l'ensemble des sommets de H et réciproquement. Donc les paires $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$, avec u_1, u_2 des sommets de G et v_1, v_2 des sommets de H , forment un ensemble dominant par appariement. Il faut donc au plus deux coups à Dominator pour gagner sur $G \bowtie H$.

(ii) Si G est isomorphe à K_1 alors à son premier coup Staller est obligée de jouer sur son unique sommet sinon Dominator pourrait jouer dessus et gagner. Les seuls sommets restant sont ceux de H et Dominator joue en premier dessus. Dominator et Staller peuvent donc appliquer leurs stratégies optimales sur H dans le cas où Dominator commence et le sommet de G n'a pas d'influence car tous les coups de Dominator sur H le dominent. On a donc bien $\gamma'_{\text{MB}}(G \bowtie H) = \gamma_{\text{MB}}(H)$ dans ce cas.

Si ni G ni H ne sont isomorphes à K_1 , mais que l'un de ces deux graphes possède deux sommets universels ou s'ils possèdent tous les deux un sommet universel, alors $G \bowtie H$ a deux sommets universels et Dominator pourra jouer sur l'un des deux à son premier coup quoi que fasse Staller. Donc on a bien $\gamma'_{\text{MB}}(G \bowtie H) = 1$.

Sinon, comme précédemment, G et H n'étant pas isomorphes à K_1 , $G \bowtie H$ admet un ensemble dominant par appariement constitué de deux paires et Dominator peut gagner en deux coups. Ce qui prouve que $\gamma'_{\text{MB}}(G \bowtie H) = 2$. \square

La combinaison de ces résultats sur l'union et le joint nous donne la complexité de la classe des cographes. Rappelons en effet que les cographes peuvent être construits inductivement à partir d'un sommet en faisant l'union ou le joint de deux cographes. De plus, pour un cographe donné, retrouver cette suite d'unions et de joints peut se faire en temps linéaire [43]. Puisque l'issue du graphe K_1 est connue et que c'est aussi le cas pour l'union et le joint, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.25. *Décider de l'issue du jeu de domination Maker-Breaker sur les cographes peut se faire en temps linéaire.*

Comme affirmé dans la remarque 3.17, certaines familles de graphes ont pour issue \mathcal{D} si et seulement si elles admettent un ensemble dominant par appariement. Montrons que la famille des cographes satisfait cette propriété.

Théorème 3.26 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Un cographe G est d'issue \mathcal{D} si et seulement si il admet un ensemble dominant par appariement.*

Démonstration. D'après la proposition 3.13 si un graphe admet un ensemble dominant par appariement, alors il est d'issue \mathcal{D} . Il reste donc à prouver que tous les cographes d'issue \mathcal{D} admettent un ensemble dominant par appariement.

La preuve se fera par induction sur le nombre n de sommets de G .

Montrons d'abord que le résultat est vrai pour $n \leq 2$. Les seuls cographes possibles sont K_1 , K_2 et $K_1 \cup K_1$. Parmi eux, le seul graphe d'issue \mathcal{D} est K_2 et il admet un couplage parfait et donc un ensemble dominant par appariement.

Supposons à présent que tout cographe d'issue \mathcal{D} et d'ordre inférieur ou égal à n admet un ensemble dominant par appariement. Soit G un cographe d'issue \mathcal{D} et d'ordre $n + 1$. Par définition des cographes, G est l'union ou le joint de deux cographes plus petits.

Si G est l'union de deux cographes G_1 et G_2 , alors ils sont nécessairement d'issue \mathcal{D} d'après le théorème 3.21. Par hypothèse d'induction ils admettent tous les deux un ensemble dominant par appariement, dont l'union est un ensemble dominant par appariement de G .

Supposons à présent que G est le joint de deux cographes G_1 et G_2 .

S'ils sont tous les deux isomorphes à K_1 , alors G est isomorphe à K_2 et admet un dominant par appariement.

S'ils ont tous les deux plus de deux sommets, avec u_1 et v_1 des sommets de G_1 et u_2 et v_2 des sommets de G_2 , alors $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ est un ensemble dominant par appariement de G .

Supposons maintenant que $G_1 = K_1$ et soit x son unique sommet. G_2 a au moins deux sommets et est nécessairement d'issue \mathcal{N} ou \mathcal{D} d'après le théorème 3.23. Si G_2 est d'issue \mathcal{D} alors, par hypothèse d'induction, il admet un ensemble dominant par appariement. Tous les sommets de cet ensemble sont voisins de x et il reste donc un ensemble dominant par appariement pour G .

Supposons à présent que $o(G_2) = \mathcal{N}$. G_2 est soit l'union, soit le joint de deux cographes. Si G est le joint de deux cographes, alors, d'après le théorème 3.23, il doit être le joint de K_1 d'unique sommet y et d'un graphe d'issue \mathcal{S} . Remarquons que x et y sont tous deux des sommets universels de G donc $\{(x, y)\}$ est un ensemble dominant par appariement pour G . Si G_2 est l'union de deux cographes H_1 et H_2 alors, sans perdre en généralité, d'après le théorème 3.21, $o(H_1) = \mathcal{D}$ et $o(H_2) = \mathcal{N}$. Par hypothèse d'induction H_1 admet un ensemble dominant par appariement S_1 . Notons aussi que d'après le théorème 3.23, $x \bowtie H_2$ est d'issue \mathcal{D} et par hypothèse d'induction admet un ensemble dominant par appariement S_2 . Puisque S_1 domine H_1 par appariement et que S_2 domine $x \bowtie H_2$ par appariement, $S_1 \cup S_2$ est un ensemble dominant par appariement pour G . \square

Les nombres de domination Maker-Breaker de l'union ne peuvent pas être calculés aussi facilement que son issue et l'étude des cographes pour les nombres de domination Maker-Breaker semble donc bien plus délicate.

5.2 Opération de collage

Comme on l'a vu précédemment, en connaissant l'issue de deux graphes G et H on peut connaître l'issue des graphes $G \cup H$ et $G \bowtie H$. Ce qui rend l'étude de ces opérations possible est la structure très contrainte des graphes obtenus. Cependant, tous les graphes ne peuvent pas se décomposer comme des unions ou joints d'autres graphes. Une autre structure de graphes que l'on peut vouloir étudier sont les points d'articulations. Il semble en effet intuitif que si un graphe dispose d'un point d'articulation alors les stratégies sur chacune des parties de part et d'autre de ce sommet restent similaires aux stratégies qu'on appliquerait si ces parties étaient déconnectées.

Intéressons-nous donc à présent à l'opération consistant à coller deux graphes sur un sommet. Cette opération sera utile dans l'étude des arbres. Une définition plus formelle est la suivante :

Définition 3.27. Soit $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes et soit $u \in V_G$ et $v \in V_H$ deux sommets. Le *collage* de G et de H sur u et v est le graphe $G \bowtie_{u,v} H$ d'ensemble de sommets $(V_G \setminus \{u\}) \cup (V_H \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ (où w est un nouveau sommet) et pour lequel xy est une arête si et seulement si xy est une arête de G ou de H ou $y = w$ et xu est une arête de G ou xv est une arête de H .

Si le sommet u est clair dans le contexte ou s'il n'a pas d'importance, le collage sera noté $G \bowtie_v H$. De manière similaire, si v n'est pas utile dans la notation on pourra aussi le retirer.

La Figure 3.13 donne une représentation du collage de deux graphes.

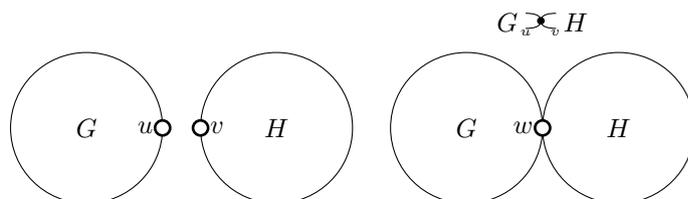


FIGURE 3.13 – Représentation du collage des graphes G et H sur les sommets u et v .

On souhaiterait obtenir un tableau tel que celui de la table 3.1. Une première remarque que l'on peut faire à ce propos est que connaître l'issue de G et de H ne semble pas suffisant pour construire un tel tableau. En effet, l'issue du collage dépend aussi des sommets u et v . Cependant, construire un tableau dont les entrées sont les issues de G et de H avec et sans u et v n'est pas non plus possible. En effet les graphes G_1 et G_2 de la Figure 3.14 sont tous les deux d'issue \mathcal{N} normalement et d'issue \mathcal{S} si on retire u ou v , cependant l'issue de $G_1 \bowtie_u G_1$ est \mathcal{N} et celle de $G_2 \bowtie_v G_2$ est \mathcal{S} .

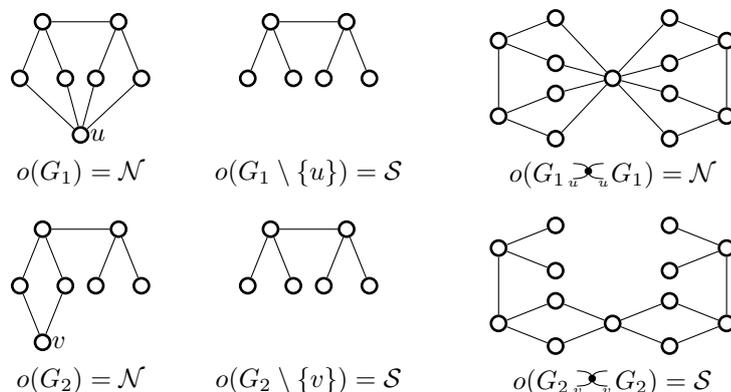


FIGURE 3.14 – Deux graphes de mêmes issues mais dont les collages ont une issue différente

Si l'idée d'un résultat simple pour tous les collages $G \bowtie_{u,v} H$ est à abandonner, on peut tout de même chercher les graphes qui peuvent être simplifiés par l'opération de collage. C'est ce que nous allons faire en introduisant les graphes *neutres*.

Soit H un graphe et v un sommet de H . On dit que le couple (H, v) est *neutre* pour l'opération de collage si pour tout graphe G et tout sommet u de G , $o(G \bowtie_v H) = o(G)$.

Théorème 3.28 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Soit H un graphe et v un sommet de H . Le couple (H, v) est neutre pour l'opération de collage si et seulement si $o(H) = \mathcal{N}$ et $o(H \setminus \{v\}) = \mathcal{D}$.*

Démonstration. Premièrement, soit H un graphe et u un sommet de H . Supposons que (H, v) est neutre pour l'opération de collage. Par définition de la neutralité, $o(K_1 \bowtie_v H) = o(K_1)$. Or $K_1 \bowtie_v H = H$ et $o(K_1) = \mathcal{N}$ donc on a bien $o(H) = \mathcal{N}$.

Considérons à présent le graphe $G = K_2 \bowtie_v H$ qui est constitué du graphe H avec un sommet pendant v' incident à v . Puisque (H, v) est neutre, G a la même issue que K_2 c'est-à-dire \mathcal{D} . En particulier, Dominator a une stratégie gagnante sur G en tant que second joueur. Si Staller commence sur G et joue sur v , Dominator doit répondre sur v' sinon Staller gagne. À présent Staller joue en premier sur $H \setminus \{u\}$ et Dominator dispose toujours d'une stratégie gagnante, donc l'issue de $H \setminus \{u\}$ est \mathcal{D} .

Cela prouve que ces conditions sont nécessaires pour que (H, v) soit neutre, prouvons à présent qu'elles sont suffisantes.

Soit H un graphe, v un sommet de H et $H' = H \setminus \{v\}$, tels que $o(H) = \mathcal{N}$ et $o(H') = \mathcal{D}$. Soit G un graphe et u un sommet de G . Dans la suite on identifie les sommets u et v à w le collage de G et H sera noté $G \bowtie H$.

Puisque $o(H') = \mathcal{D}$, $o(G \cup H') = o(G)$ d'après le théorème 3.21. De plus, $G \cup H'$ est un sous-graphe de $G \bowtie H$ ou seulement des arêtes sont retirées, donc, d'après la proposition 3.7, $o(G \bowtie H) \succeq o(G \cup H') = o(G)$.

Prouvons à présent que $o(G \bowtie H) \preceq o(G)$ ce qui conclura la preuve. Notons que si $o(G) = \mathcal{D}$ on a nécessairement $o(G \bowtie H) \preceq o(G)$.

Supposons que $o(G) \preceq \mathcal{N}$. Cela signifie que Staller a une stratégie gagnante sur G en tant que première joueuse. Puisque $o(H) = \mathcal{N}$, Staller a aussi une stratégie sur H en tant que première joueuse. La stratégie suivante est une stratégie gagnante pour Staller sur $G \bowtie H$ en tant que première joueuse. Staller commence par appliquer sa stratégie gagnante sur H jusqu'à ce que sa stratégie lui indique de jouer sur w . Si, durant cette phase, Dominator joue sur w , en suivant cette stratégie Staller isolera un sommet de H différent de w et adjacent à aucun sommet de G , elle gagnera donc. Si Dominator joue un sommet de $G \setminus \{w\}$ alors Staller peut imaginer qu'il a joué w , isolera un autre sommet de H et gagnera comme précédemment. On peut donc supposer que Dominator joue toujours dans H' .

Quand la stratégie de Staller sur H est de jouer sur w , à la place elle commence à appliquer sa stratégie gagnante sur G . Comme précédemment, si Dominator ne joue pas dans $G \setminus \{w\}$, Staller gagnera en isolant un sommet de G différent de w et donc non adjacent à H . On peut donc supposer que Dominator joue uniquement dans $G \setminus \{w\}$. Staller continue à appliquer sa stratégie gagnante sur G jusqu'à ce que cette stratégie lui indique de jouer sur w . Notons qu'à ce moment de la partie w est un coup gagnant pour Staller à la fois dans G et dans H .

Staller joue à présent w et répond à chacun des coups de Dominator avec sa stratégie gagnante dans la même composante. Puisqu'elle suit sa stratégie gagnante dans G et dans H , elle isolera un sommet dans chacun de ces graphes. Si l'un de ces sommets n'est pas w alors Staller gagne car ce sommet est isolé dans $G \bowtie H$. Si ces deux sommets sont w , alors w et tout son voisinage aura été joué par Staller dans $G \bowtie H$ et elle a gagné. Staller dispose donc bien d'une stratégie gagnante en tant que première joueuse et $o(G \bowtie H) \preceq \mathcal{N}$.

Supposons à présent que $o(G) = \mathcal{S}$, c'est-à-dire que Staller a une stratégie gagnante en tant que deuxième joueuse. Si Dominator commence la partie en jouant sur w , alors Staller peut appliquer sa stratégie gagnante sur G et elle gagnera comme précédemment. Si Dominator commence sur H' alors Staller peut imaginer qu'il a joué sur w et appliquer sa stratégie gagnante sur G . On peut donc supposer que Dominator commence sur $G \setminus \{w\}$. Ensuite Staller peut appliquer la même stratégie que précédemment : elle joue sa stratégie gagnante sur H jusqu'à ce qu'elle ait à jouer sur w , quand c'est la cas, elle change de composante et applique sa stratégie gagnante sur G jusqu'à ce qu'elle doive jouer sur w . C'est possible car G est d'issue \mathcal{S} et que Dominator doit répondre dans la même composante que Staller. Elle joue ensuite sur w et répond à Dominator avec sa stratégie gagnante dans la même composante que lui. Ainsi elle isolera un sommet de $G \bowtie_v H$ et $o(G \bowtie H) = \mathcal{S}$.

Les trois cas précédents prouvent que $o(G \underset{v}{\bowtie} H) \preceq o(G)$. Comme on a montré que $o(G \underset{v}{\bowtie} H) \succeq o(G)$, cela prouve que $o(G \underset{v}{\bowtie} H) = o(G)$. \square

L'existence d'un graphe neutre n'est pas triviale. Nous répondons à cette question en exhibant une famille infinie de graphes neutres :

Définition 3.29. Soit $n \geq 2$, le *graphe scindé pendant* de taille n , H_n , est le graphe composé d'une clique d'ordre n dont les sommets sont $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, un indépendant de taille $n - 1$ dont les sommets sont $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ auxquels sont ajoutées les arêtes $u_i v_i$ pour $1 \leq i \leq n - 1$.

La Figure 3.15 donne une représentation de H_2 , H_3 et H_n .

Proposition 3.30. Pour tout $n \geq 2$, (H_n, v) est neutre pour l'opération de collage.

Démonstration. Notons que $H_n \setminus \{v\}$ admet un couplage parfait et est donc d'issue \mathcal{D} d'après la proposition 3.13.

Si Dominator joue en premier sur H_n , un coup gagnant est de jouer sur v , alors le graphe restant admet un couplage parfait et il gagnera donc.

Si Staller joue en premier sur H_n , une stratégie gagnante est de jouer sur chaque v_i . Dominator doit répondre sur u_i sinon Staller gagne en isolant ce sommet. Quand tous les v_i sont joués, Staller peut jouer sur v ce qui l'isole et elle gagne donc.

Ainsi, chaque joueur a une stratégie gagnante en jouant en premier sur H_n , son issue est donc \mathcal{N} . D'après le théorème 3.28 (H_n, v) est donc neutre. \square

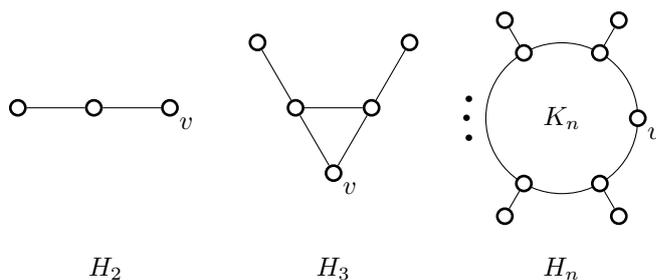


FIGURE 3.15 – Exemples de graphes scindés pendants.

L'intérêt principal des graphes neutres est que si un graphe G est de la forme $G' \underset{v}{\bowtie} H$ avec (H, v) neutre, on peut se restreindre à l'étude de G' pour l'étude de G . Nous allons maintenant considérer le graphe neutre le plus simple : $H = H_2 = P_3$. Retirer H revient à retirer un P_2 pendant, ce qui est utile pour l'étude des arbres. Nous avons cependant obtenu des résultats plus généraux pour le graphe neutre P_3 .

Pour un graphe G donné, on définit le *graphe résiduel* de G comme étant un graphe obtenu en retirant itérativement des P_2 pendants à G tant que cela est possible. On peut faire l'observation suivante qui affirme que l'ordre de retrait n'est pas important pour les graphes résiduels :

Lemme 3.31. Étant donné un graphe G , le graphe résiduel de G est unique (à isomorphisme près).

Démonstration. Soit $P' = xy$ un P_2 pendant arbitraire de G , avec x une feuille de G et z l'unique autre voisin de y dans G . Alors, soit P' est retiré pendant le processus itératif d'effeuillage de P_2 pendants, soit P' n'est pas retiré du tout. Cette dernière possibilité ne peut arriver que dans deux cas : soit il ne reste que les sommets x, y, z et le P_2 pendant yz est retiré, ne laissant que x , soit il ne reste que les sommets x, y, z, t , avec t un voisin de z et le P_2 pendant zt est retiré, ne laissant que x et y qui ne peuvent plus être enlevés. Dans ces deux cas le graphe résiduel est soit K_1 soit P_2 . De plus, par induction chaque P_2 pendant qui apparaît pendant de processus d'effeuillage va soit être retiré soit donner un graphe résiduel K_1 ou P_2 . Un même graphe G ne peut pas avoir comme graphes résiduels K_1 et P_2 car à chaque fois qu'un P_2 est retiré, exactement deux sommets sont enlevés et donc un graphe résiduel de G conserve la parité de $V(G)$. \square

On peut donc parler du graphe résiduel de G , que l'on notera $R(G)$.

Notons que la preuve du lemme 3.31 révèle aussi que si $R(G) \notin \{K_1, P_2\}$, alors $G \setminus V(R(G))$, le graphe induit par les sommets retirés, est unique. Pour voir que ce n'est pas le cas si $R(G) = K_1$, on peut observer le graphe P_{2k+1} , $k \geq 2$, et les différentes séquences de P_2 possibles.

Comme P_3 est neutre, l'issue de G est la même que l'issue de $R(G)$. On peut aussi se poser la question de la valeur des nombres de domination Maker-Breaker en retirant des P_2 pendants.

Pour ce faire, on peut dans un premier temps s'interroger sur la forme de ce qui est enlevé à G pour obtenir $R(G)$.

Lemme 3.32. *Soit G un graphe et $R(G)$ un graphe résiduel de G .*

- (i) $G \setminus V(R(G))$ est une forêt qui admet un unique couplage parfait.
- (ii) G admet un couplage parfait si et seulement si $R(G)$ admet un couplage parfait.

Démonstration. (i) $G \setminus V(R(G))$ est une forêt car ce graphe peut être construit à partir du graphe vide par l'ajout successifs de P_2 pendants. Si $x_i y_i$, $i \in I$, sont les P_2 qui ont été retirés à G pour former $R(G)$, alors $\{x_i y_i\}_{i \in I}$ forme aussi l'unique couplage parfait de $G \setminus V(R(G))$.

(ii) Si G admet un couplage parfait, alors sa restriction à $G \setminus V(R(G))$ doit être son unique couplage parfait (car chaque composante de $G \setminus V(R(G))$ n'est connecté à $R(G)$ qu'en un seul sommet). La restriction de ce couplage parfait à $R(G)$ doit donc aussi être un couplage parfait. Similairement, si $R(G)$ admet un couplage parfait, alors il peut être étendu à G grâce au couplage parfait du point (i). \square

Comme on sait que P_3 est neutre pour l'opération de collage, en caractérisant les différentes formes que peut prendre le graphe résiduel d'un arbre, on peut résoudre le jeu de domination Maker-Breaker sur la classe des arbres.

Lemme 3.33. *Pour tout arbre T , soit $R(T)$ a l'une des formes suivantes :*

- K_1 ,
- P_2 ,
- $K_{1,n}$ avec $n \geq 3$,

soit il existe deux sommets distincts u et v de $R(T)$ tels que u et v sont adjacents à au moins deux feuilles.

La Figure 3.16 représente ces différents cas.

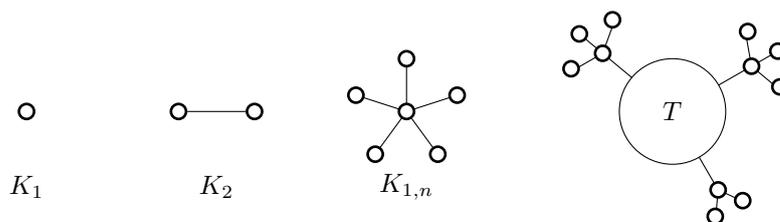


FIGURE 3.16 – Différentes réductions possibles pour les arbres.

Démonstration. Soit $R(T)$ le graphe résiduel d'un arbre T .

Si $R(T)$ n'a que des sommets de degré 1 ou 2 alors $R(T)$ est un chemin. Les seuls chemins qui peuvent être des graphes résiduels sont K_1 et P_2 .

Supposons que $R(T)$ possède au moins un sommet de degré au moins 3, r , et enracinons $R(T)$ sur r . Soit T_1, \dots, T_k les sous-arbres connectés à r .

Considérons un sous-arbre T_i qui n'est pas constitué d'un seul sommet. Soit x_i une feuille de T_i de profondeur maximale. L'unique voisin de x_i , y_i est de degré au moins 3 sinon on pourrait retirer un P_2 pendant à $R(T)$. Le sommet y_i a donc au moins un autre descendant qui est nécessairement une feuille par maximalité de la profondeur de x_i . Ainsi pour chaque sous-arbre qui n'est pas réduit à un sommet, il y a au moins un sommet auquel sont rattachées au moins deux feuilles.

Ainsi, s'il y a deux sous-arbres d'ordre au moins 2, nous sommes dans le dernier cas. S'il n'y a qu'un seul sous-arbre d'ordre supérieur à 2 alors, comme r est de degré au moins 3, il y a

au moins deux feuilles attachées à r et nous sommes aussi dans le dernier cas. Enfin, si tous les sous-arbres sont réduits à un seul sommet, $R(T)$ est une étoile dont r est le centre, ce qui correspond au troisième cas. \square

Ce lemme nous permet donc de résoudre le jeu de domination Maker-Breaker sur les arbres :

Théorème 3.34 (Duchêne, G., Parreau et Renault, 2018+ [52]). *Décider de l'issue du jeu de domination Maker-Breaker sur les arbres peut se faire en temps polynomial.*

Démonstration. L'algorithme suivant résout le jeu de domination Maker-Breaker en temps polynomial sur les arbres.

Pour un arbre T on retire itérativement des P_2 jusqu'à obtenir $R(T)$. Si $R(T) = P_2$, renvoyer la réponse \mathcal{D} . Si $R(T) = K_1$ ou $K_{1,n}$, avec $n \geq 3$, renvoyer la réponse \mathcal{N} . Renvoyer \mathcal{S} sinon.

Cet algorithme est bien polynomial. En effet, retirer des P_2 pendants peut être fait en temps polynomial en gardant en mémoire l'ensemble des feuilles à chaque étape et en mettant à jour cet ensemble quand nécessaire. Vérifier qu'un arbre est K_1 , P_2 ou une étoile peut aussi se faire en temps polynomial.

Prouvons à présent la justesse de l'algorithme. Soit T_1, \dots, T_k les arbres intermédiaires obtenus en retirant les P_2 pendants. D'après la proposition 3.30, on sait que P_3 est neutre et les P_2 pendants peuvent être vus comme des opérations de collage avec un P_3 . Ainsi, $o(T) = o(T_1) = \dots = o(T_k) = o(R(T))$, et l'issue de T est la même que l'issue de $R(T)$. Comme $R(T)$ est un graphe résiduel, il est d'une forme décrite dans le lemme 3.33. Si c'est P_2 l'issue est \mathcal{D} . Si c'est K_1 ou $K_{1,n}$, avec $n \geq 3$, alors le premier joueur peut jouer sur le sommet central et gagner la partie, donc l'issue est \mathcal{N} . Dans le dernier cas, au moins deux sommets distincts sont adjacents à deux feuilles ou plus. Si Staller joue en deuxième sur $R(T)$, quel que soit le premier coup de Dominator un de ces sommets et ces feuilles resteront non jouées. Staller peut donc jouer sur ce sommet et isoler une de ses feuilles au coup suivant. L'issue de $R(T)$ est donc bien \mathcal{S} .

L'issue que renvoie l'algorithme est bien la même issue que $R(T)$, c'est à dire l'issue de T . L'algorithme est donc bien correct. \square

Remarque 3.35. Notons qu'un arbre a pour issue \mathcal{D} seulement si en retirant itérativement des P_2 pendants le graphe obtenu est P_2 . Cela signifie qu'un arbre a pour issue \mathcal{D} si et seulement si il admet un couplage parfait et donc un ensemble dominant par appariement.

Après en avoir trouvé les issues, intéressons-nous à présent aux nombres de domination Maker-Breaker des arbres. Constatons d'abord que $G \setminus V(R(G))$ est une forêt et définissons la stratégie de Staller sur cette forêt.

Lemme 3.36. *Si T est un arbre qui admet un couplage parfait et $v \in V(T)$, alors Staller a une stratégie en tant que première joueuse pour forcer Dominator à sélectionner au moins $\frac{|V(T)|}{2}$ sommets pour dominer T et v est joué par Staller à son dernier coup.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur $|V(T)|$. Si $T = P_2$ et $v \in V(P_2)$, alors Staller peut jouer sur v et Dominator doit répondre sur l'autre sommet.

Supposons à présent que $|V(T)| \geq 4$ et enracinons T sur un sommet arbitraire r . Soit x une feuille à distance maximale de r et soit y l'unique voisin de x . Alors $\deg(y) = 2$ car T admet un couplage parfait et le contraire contredirait le fait que x est à distance maximale de r . Soit z l'autre voisin de y et $T' = T \setminus \{x, y\}$. Comme T admet un couplage parfait, xy fait partie de ce couplage et donc T' admet aussi un couplage parfait. Si v est un sommet de T' , alors une stratégie de Staller est de commencer par jouer sur y . Dominator doit répondre sur x autrement Staller gagnerait. Ensuite Staller peut appliquer sa stratégie à T' qui existe par hypothèse d'induction. Si $v \notin V(T')$, alors Staller applique sa stratégie à T' en choisissant de finir sur z , puis elle joue v au coup suivant. Notons que si Dominator joue sur v alors que Staller joue encore sur T' alors Staller sera à même d'isoler un sommet de T' .

À l'aide de cette stratégie on peut conclure que le nombre total de coups de Dominator est $\frac{|V(T')|}{2} + 1 = \frac{|V(T)|}{2}$. \square

Notons que dans la stratégie de Staller, à moins que Staller ne désire jouer sur une feuille à son dernier coup, elle joue toujours sur le voisin d'une feuille, forçant Dominator à répondre sur la feuille en question, ce qui sépare le P_2 du reste du graphe.

Nous pouvons maintenant donner les nombres de domination Maker-Breker de G en fonction de $R(G)$.

Théorème 3.37 (G., Iršič et Klavžar, 2019 [65]). *Soit $R(G)$ un graphe résiduel de G et soit $H = G \setminus V(R(G))$. On a*

- (i) $\gamma'_{\text{MB}}(G) = \frac{|V(H)|}{2} + \gamma'_{\text{MB}}(R(G))$,
- (ii) $\frac{|V(H)|}{2} + \gamma_{\text{MB}}(R(G)) - 1 \leq \gamma_{\text{MB}}(G) \leq \frac{|V(H)|}{2} + \gamma_{\text{MB}}(R(G))$.

Démonstration. (i) H admet un couplage parfait et est une forêt d'après le lemme 3.32(i). D'après le lemme 3.36, si Staller commence sur H , elle peut jouer sur chaque arbre de H et finir sur les sommets adjacents à $R(G)$. Dominator doit répondre dans le couplage sinon Staller gagnerait la partie. Ainsi, Dominator joue au moins $\frac{|V(H)|}{2}$ coups sur H . De plus, Staller joue sur les sommets adjacents à $R(G)$, donc les coups de Dominator ne peuvent pas l'aider à dominer $R(G)$. Ainsi Staller peut appliquer sa stratégie sur $R(G)$ et forcer Dominator à jouer au moins $\gamma'_{\text{MB}}(R(G))$ coups.

D'autre part, si Dominator répond dans le couplage parfait de H et joue sa stratégie optimale dans $R(G)$, il peut aussi s'assurer de ne pas jouer plus de $\frac{|V(H)|}{2} + \gamma'_{\text{MB}}(R(G))$ coups. Ainsi, on a $\gamma'_{\text{MB}}(G) = \frac{|V(H)|}{2} + \gamma'_{\text{MB}}(R(G))$.

(ii) Supposons à présent que Dominator joue en premier sur G . Pour prouver la borne haute, la stratégie de Dominator est d'appliquer sa stratégie optimale sur $R(G)$ et de jouer suivant le couplage parfait dans H , ce qui, de façon similaire au cas précédent, donne une borne haute de $\gamma_{\text{MB}}(G) \leq \frac{|V(H)|}{2} + \gamma_{\text{MB}}(R(G))$.

Pour prouver la borne basse, considérons les stratégies suivantes en fonction du premier coup de Dominator. On distinguera deux cas, le second ayant deux sous-cas, qui sont représentés dans la Figure 3.17.

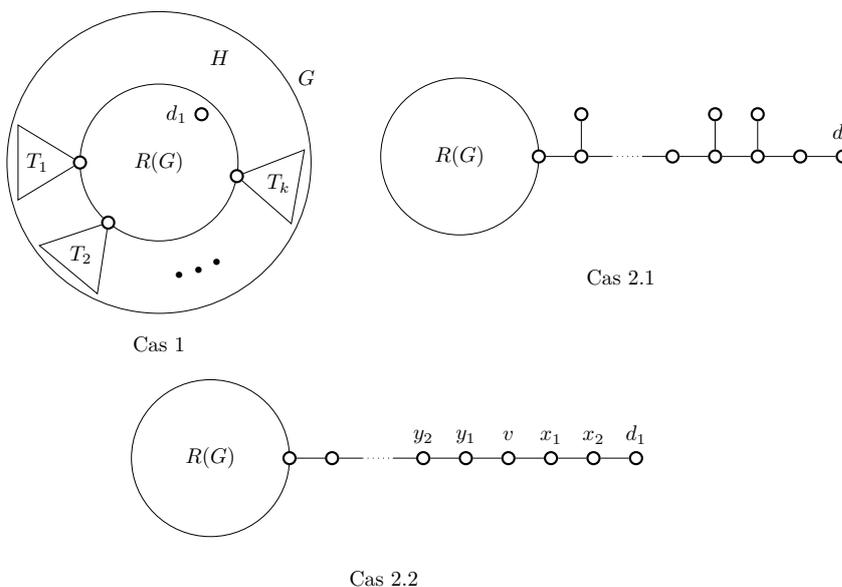


FIGURE 3.17 – Représentations des différents cas de la preuve du théorème 3.37

Cas 1 : Le premier coup de Dominator est sur $R(G)$.

Staller applique alors sa stratégie du lemme 3.36 à chaque arbre de H , jouant le dernier coup sur chaque arbre sur le sommet adjacent à $R(G)$. Ce faisant, elle force Dominator à jouer $\frac{|V(H)|}{2}$ sur H . Après cela ce sera encore à elle de jouer et elle pourra répondre au premier coup de Dominator avec sa stratégie optimale sur $R(G)$, donc au moins $\gamma_{\text{MB}}(R(G))$ coups seront joués par Dominator.

Cas 2 : Le premier coup de Dominator est sur H .

Soit d_1 le sommet joué par Dominator à son premier coup, soit T l'arbre de H contenant d_1 , soit P le chemin de T reliant d_1 à $R(G)$ et soit M l'unique couplage parfait de T (cf. lemme 3.32(i)).

Dans ce cas, Staller commence par appliquer sa stratégie du lemme 3.36 sur tous les autres arbres de H , jouant sur le sommet adjacent à $R(G)$ pour son dernier coup sur chaque arbre. Remarquons à présent que si on retire de M les arêtes incidentes à P , on obtient une forêt. Staller applique donc sa stratégie du lemme 3.36 sur chaque arbre de cette forêt en jouant son dernier coup sur le sommet le plus proche de P . Il est possible que des sommets incidents à P restent non joués et non dominés.

Cas 2.1 : Au moins un des sommets adjacent à P est non dominé, comme représenté dans la Figure 3.17.

Soit u un sommet non dominé adjacent à P . Staller joue sur son voisin dans P , forçant Dominator à répondre sur u . Staller fait de même pour tous les sommets non dominés incidents à P . Après cette étape, les seuls sommets non dominés de T sont sur P . De plus, jusqu'ici toutes les arêtes de M dont les deux sommets ont été joués contiennent un sommet joué par Dominator.

Tant qu'il y a des arêtes de M qui n'ont pas été entièrement jouées, il y a au moins une de ces arêtes e dont l'un des sommets est adjacent à un sommet s de P déjà joué par Staller. Sa stratégie est de jouer sur le sommet de e à distance 2 de s . Dominator est obligé de répondre sur l'autre sommet de e sinon Staller l'isolera au coup suivant. Staller peut réitérer cette stratégie jusqu'à ce que tous les sommets de P aient été joués. Staller peut donc forcer Dominator à jouer dans toutes les arêtes de M .

Cas 2.2 : Les seuls sommets non dominés de T sont sur P .

La stratégie de Staller est de jouer sur le sommet v de P à distance 3 de d_1 . On note x_i les sommets à distance i de v dans la direction de d_1 et on note y_i les sommets à distance i de v en direction de $R(G)$, comme représenté dans la Figure 3.17(2.2).

Dominator doit nécessairement répondre sur x_1 ou y_1 autrement l'un de ces deux sommets ainsi que v ne seront pas dominés et Staller pourra créer une double menace. Supposons en effet que Dominator ne joue ni sur x_1 ni sur y_1 et que x_1 reste non dominé après le coup de Dominator. Alors, en jouant sur x_1 Staller menace d'isoler v en jouant sur y_1 mais aussi d'isoler x_1 en jouant sur x_2 . Dominator ne peut pas répondre à ces deux menaces et Staller gagnera donc la partie. La situation est similaire si c'est y_1 qui n'est pas dominé.

Supposons à présent que Dominator réponde au coup de Staller en jouant sur x_1 . Alors Staller joue sur y_2 , forçant Dominator à jouer sur y_1 . Staller répète cette stratégie en jouant sur les sommets y_{2k} dans l'ordre croissant, forçant à chaque fois Dominator à répondre sur y_{2k-1} .

Si au contraire Dominator joue sur y_1 , alors Staller joue sur x_2 , forçant Dominator à répondre sur x_1 . Puis elle applique la même stratégie que précédemment en prenant y_1 comme nouveau d_1 et jouant donc sur y_4 .

Dans les deux cas, Dominator est forcé à jouer au moins un coup dans chaque arête de M , ainsi au moins $\frac{|V(T)|}{2}$ coups ont été joués dans T . Dans $H \setminus T$, $\frac{|V(H)| - |V(T)|}{2}$ ont été joués d'après le lemme 3.36.

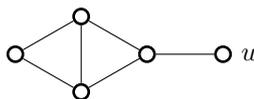
Après que T est entièrement dominé, Staller applique sa stratégie optimale sur $R(G)$. Il peut cependant arriver qu'un sommet u de $R(G)$ soit déjà dominé (par un coup de Dominator dans H proche de $R(G)$). Notons $R(G)|u$ le fait que le sommet u est déjà dominé dans $R(G)$. Comme la stratégie de Staller sur H force Dominator à répondre sur H , Staller jouera le premier coup sur $R(G)$. Cependant, comme elle peut imaginer que Dominator a joué en premier et sur u on a :

$$\gamma'_{\text{MB}}(R(G)|u) \geq \gamma'_{\text{MB}}(R(G)|N[u]) \geq \gamma_{\text{MB}}(R(G)) - 1.$$

Cela prouve que le nombre minimum de coups de Dominator sur $R(G)$ est $\gamma_{\text{MB}}(R(G)) - 1$.

Dans tous les cas, Dominator joue au moins $\frac{|V(H)|}{2} + \gamma_{\text{MB}}(R(G)) - 1$ coups, ce qui prouve la borne basse. \square

Notons que dans l'inégalité $\gamma'_{\text{MB}}(R(G)|u) \geq \gamma_{\text{MB}}(R(G)) - 1$ de la preuve précédente, le cas d'égalité peut être atteint. Considérons, par exemple, le graphe G de la Figure 3.18. On peut observer que $\gamma_{\text{MB}}(G) = 2$ et $\gamma'_{\text{MB}}(G|u) = 1$.


 FIGURE 3.18 – Un graphe G satisfaisant la propriété $\gamma'_{\text{MB}}(G|u) = \gamma_{\text{MB}}(G) - 1$.

En attachant à G des arbres ayant des couplages parfaits, dont au moins l'un d'entre eux est attaché à u , on obtient des graphes qui atteignent la borne inférieure du théorème 3.37(ii).

On peut à présent caractériser les nombres de domination Maker-Breaker en fonction des graphes résiduels des différents arbres.

Théorème 3.38 (G., Iršič et Klavžar, 2019 [65]). *Soit T un arbre à n sommets,*

$$\gamma_{\text{MB}}(T) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } T \text{ admet un couplage parfait,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } R(T) \cong K_1, \\ \frac{n-k+1}{2}, & \text{si } R(T) \cong K_{1,k} \text{ pour } k \geq 3, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\gamma'_{\text{MB}}(T) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } T \text{ admet un couplage parfait,} \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit T un arbre. Notons d'abord que d'après le lemme 3.32 les différents cas du théorème 3.38 sont bien disjoints.

Si T admet un couplage parfait, alors $\gamma_{\text{MB}}(T) \leq \frac{|V(T)|}{2}$ d'après la remarque 3.15. De plus, le lemme 3.36 nous permet d'affirmer que $\gamma_{\text{MB}}(T) \geq \frac{|V(T)|}{2}$, donc $\gamma_{\text{MB}}(T) = \frac{|V(T)|}{2}$. Le même raisonnement prouve que dans ce cas $\gamma'_{\text{MB}}(T) = \frac{|V(T)|}{2}$.

Si $R(T) \cong K_1$ et si v est le sommet restant, alors $T - v$ admet un couplage parfait d'après le lemme 3.36. Dans ce cas, le premier coup de Dominator est sur un voisin de v , qui appartient donc à une arête e du couplage de $T - v$. Ce faisant Dominator domine à la fois e et v . Par la suite il suffit à Dominator de jouer dans le reste du couplage de $T - v$. Ainsi Dominator joue au plus $\frac{|V(T)|-1}{2}$ coups pour dominer T . D'après le lemme 3.36, $\gamma_{\text{MB}}(T) \geq \frac{|V(T) \setminus \{v\}|}{2} + \gamma_{\text{MB}}(K_1) - 1$ ce qui vaut $\frac{|V(T)|-1}{2}$ car $\gamma_{\text{MB}}(K_1) = 1$. Donc on a bien $\gamma_{\text{MB}}(T) = \frac{|V(T)|-1}{2}$.

Si $R(T) \cong K_{1,k}$ avec $k \geq 3$, alors $T - K_{1,k}$ admet un couplage parfait. Dominator peut jouer son premier coup au centre de l'étoile $K_{1,k}$ et il peut ensuite jouer sur le couplage pour le reste de la partie. En suivant cette stratégie, il joue au plus $1 + \frac{|V(T)|-k-1}{2} = \frac{|V(T)|-k+1}{2}$ coups. De plus, Staller peut s'assurer que Dominator ne gagne pas avec moins de coups. Si le premier coup de Dominator est bien au centre de l'étoile, alors la stratégie de Staller dans $T - K_{1,k}$ telle que décrite dans le lemme 3.36 assure que Staller va forcer Dominator à jouer au moins un coup par sommet du couplage. Si le premier coup de Dominator est sur un autre sommet de T alors Dominator joue sur une feuille de $K_{1,k}$ ou sur un sous-arbre adjacent à une de ces feuilles. Soit v la feuille en question. En appliquant sa stratégie sur les arbres admettant un couplage parfait, Staller peut jouer sur tous les arbres de $T - K_{1,k}$ qui ne sont pas adjacents à v et finir sur les sommets adjacents à une feuille de $K_{1,k}$. Quand il n'y a plus de tel arbre, tous les sommets voisins des feuilles de $K_{1,k}$, excepté v , sont joués par Staller. Staller peut donc jouer sur le centre de l'étoile ce qui lui permettra d'isoler une des feuilles de l'étoile au coup suivant. Staller gagne donc si Dominator ne joue pas sur le centre de l'étoile à son premier coup. Ce qui prouve donc que $\gamma_{\text{MB}}(T) = \frac{|V(T)|-k+1}{2}$.

Dans tous les autres cas, le théorème 3.34 nous permet de déduire que Staller gagne sur T et que le nombre de domination Maker-Breaker en question a pour valeur l'infini. \square

Ainsi déterminer γ_{MB} et γ'_{MB} se fait en temps polynomial sur les arbres ce que nous n'avons pas réussi à déterminer pour les cographes.

6 Le jeu de domination totale Maker-Breaker

6.1 Le problème, premiers résultats

Tout comme le jeu de domination possède une variante avec la domination totale, on s'intéresse ici à une variante du même type pour le jeu de domination Maker-Breaker ; le *jeu de domination totale Maker-Breaker*. Ce jeu est similaire au jeu de domination Maker-Breaker en tout point, si ce n'est que dans ce jeu Dominator gagne s'il construit un ensemble totalement dominant et non juste un ensemble dominant. Nous nous sommes, avec Henning, Iršič et Klavžar, intéressés à ce jeu et avons écrit un article à ce sujet [62]. Je ne vais pas revenir ici sur tous les résultats de cet article, beaucoup étant assez similaires à ceux obtenus sur le jeu de domination Maker-Breaker.

La plupart des résultats donnés dans la partie précédente s'étendent au jeu de domination totale Maker-Breaker, en particulier la PSPACE-complétude et les issues de joints et d'unions de graphes. Nous nous intéressons à présent à une divergence dans l'étude de ces deux jeux, à savoir les résultats sur les cactus.

6.2 Les cactus

Une partie très importante du travail que nous avons réalisé sur le jeu de domination Maker-Breaker a consisté à résoudre ce jeu sur les arbres. Pour le jeu de domination totale Maker-Breaker, cela est assez simple. Si Staller joue le premier coup, elle gagnera toujours en jouant sur le voisin d'une feuille. Si au contraire Dominator joue le premier coup, le seul cas où il gagne est lorsque l'arbre est une étoile et il gagne en jouant sur le sommet central.

Toutefois la classe des *cactus*, une sur-classe des arbres, partage une structure similaire aux arbres et ne peut pas être résolue aussi aisément. Étant donné un graphe G , un *bloc* de G est un sous-graphe induit 2-connexe de G , c'est-à-dire que c'est un sous-graphe connexe de G qui reste connexe si on enlève n'importe lequel de ses sommets. Un graphe connexe G est un cactus si chaque bloc de G est soit un cycle soit K_2 . Un *bloc terminal* d'un cactus G est un bloc qui intersecte les autres blocs de G sur au plus un sommet. De plus, G est un *cactus étoilé* si G contient un sommet qui appartient à tous les blocs de G . De manière équivalente, G est un cactus étoilé si tous les blocs de G sont terminaux. Le nom cactus étoilé vient d'une part de la géométrie du graphe mais aussi du fait que les seuls arbres qui sont aussi des cactus étoilés sont les étoiles elles-mêmes.

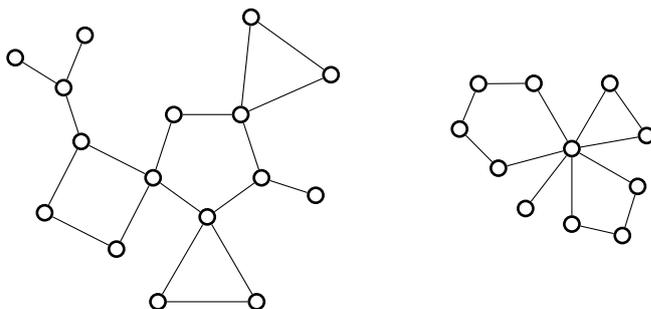


FIGURE 3.19 – Exemple de cactus et de cactus étoilé

Pour traiter les cactus nous allons utiliser une méthode similaire à celle utilisée pour résoudre le jeu de domination Maker-Breaker sur les arbres. On va retirer itérativement des C_4 sans changer l'issue du jeu, jusqu'à arriver à une situation que l'on sait résoudre.

Lemme 3.39. *Si $C = C_4$ est un bloc terminal d'un graphe G , alors l'issue du jeu quand Staller commence sur G est la même que sur $G \setminus C$.*

Démonstration. Si $G = C_4$ alors l'affirmation est vraie car C_4 et $G \setminus C_4 = \emptyset$ sont tous les deux \mathcal{D} . On peut donc supposer par la suite que C contient un unique sommet u de degré strictement supérieur à 2. Soit $G' = G \setminus C$, supposons que Dominator a une stratégie gagnante sur G' si Staller commence. Comme C est d'issue \mathcal{D} , Dominator peut suivre sa stratégie gagnante dans G' et C en répondant aux coups de Staller dans le même graphe qu'elle. Il dominera donc

G' et C et donc G . Si au contraire Staller a une stratégie gagnante sur G' alors sa stratégie gagnante lorsqu'elle commence est de jouer sur u . Dominator doit répondre en jouant sur le sommet opposé à u dans C sinon Staller gagnerait dans C . À présent, Staller peut appliquer sa stratégie gagnante sur G' en sachant qu'elle a joué sur le seul sommet de C connecté à G' et donc susceptible de perturber sa stratégie. En appliquant sa stratégie gagnante sur G' , elle réussira donc à isoler un sommet et à gagner. \square

Remarquons que ce lemme ne peut pas être étendu au cas où Dominator joue le premier coup, comme le montre la Figure 3.20.

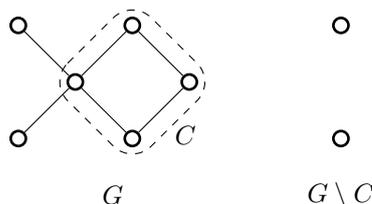


FIGURE 3.20 – Le graphe G est d'issue \mathcal{N} mais l'issue change en \mathcal{S} lorsqu'on retire le C_4 .

Ainsi, nous ne pouvons pas juste retirer des C_4 terminaux jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, comme nous le faisons avec des P_2 dans les arbres pour le cas du jeu de domination Maker-Breaker. Notons toutefois que ce lemme reste valide même si d'autres coups ont déjà été joués dans le graphe, tant que c'est le tour de Staller et qu'aucun des sommets du C_4 n'a été joué. Nous nous servons donc de cette propriété pour trouver l'issue du jeu de domination totale Maker-Breaker sur les cactus.

Pour ce faire, nous allons chercher des cas de base que nous saurons résoudre sans retirer de C_4 , à savoir les cactus étoilés. Commençons par traiter le cas où le cactus étoilé n'est constitué que d'un seul bloc, c'est-à-dire quand il s'agit de K_2 ou d'un cycle.

Lemme 3.40. *Le graphe K_2 a pour issue \mathcal{S} , le cycle C_3 a pour issue \mathcal{N} , le cycle C_4 a pour issue \mathcal{D} et tous les cycles C_n , $n \geq 5$, ont pour issue \mathcal{S} .*

Démonstration. Dans le cas de P_2 comme dit précédemment, quel que soit le sommet sur lequel Staller joue elle isole l'autre sommet, ce graphe est donc bien d'issue \mathcal{S} .

Soit v_1, \dots, v_n des sommets de C_n ordonnés de façon à ce que $v_i v_{i+1}$ forme une arête pour tout $i \leq n$ (en identifiant v_{n+1} à v_1). Il est clair que dans le cas de C_3 le joueur sélectionnant deux des trois sommets gagnera la partie. Considérons le cas où Staller commence sur C_4 et supposons sans perdre en généralité que Staller joue v_1 à son premier coup. Dominator peut alors répondre avec v_3 , dominant totalement v_2 et v_4 . De plus, avec son prochain coup sur v_2 ou v_4 , il dominera totalement v_1 et v_3 , les deux sommets restant. Le graphe C_4 a donc pour issue \mathcal{D} .

Soit $n \geq 5$ et considérons le cas où Dominator commence sur C_n . On peut supposer sans perdre en généralité que Dominator joue v_1 pour son premier coup. Alors le coup v_2 est un coup gagnant pour Staller. En effet, Staller gagne en jouant sur v_4 ou sur v_n au coup suivant et Dominator ne peut pas prévenir les deux menaces. Donc C_n est bien \mathcal{S} pour $n \geq 5$. \square

Étudions à présent les cactus étoilés constitués de plusieurs blocs :

Lemme 3.41. *Soit G un cactus étoilé contenant au moins deux blocs. Le jeu de domination totale sur G est d'issue \mathcal{N} si et seulement si les cycles de G sont de taille au plus 5 et G satisfait l'un des cas suivants : G a un bloc de taille 3, G a un bloc de taille 4 ou G a deux blocs de taille 2. Dans tous les autres cas, l'issue de G est \mathcal{S} .*

Démonstration. Soit u le sommet du cactus étoilé G qui appartient à tous les blocs de G .

Supposons dans un premier temps que Staller commence sur G . Alors Staller a toujours une stratégie gagnante en jouant sur u à son premier coup. En effet, si G contient un bloc K_2 alors ce premier coup de Staller est déjà un coup gagnant car elle a isolé la feuille du K_2 . Sinon, u est contenu dans au moins deux cycles et après le premier coup de Dominator un de ces cycles reste non joué. Staller peut gagner dans ce cycle en jouant sur l'autre voisin d'un voisin de u . Donc si

Staller joue en premier sur un cactus étoilé contenant au moins deux blocs, elle a une stratégie gagnante.

Supposons à présent que Dominator joue le premier et considérons les cas suivants :

Cas 1 : G contient un cycle d'ordre au moins 6.

Soit C un tel cycle. Supposons dans un premier temps que Dominator joue son premier coup sur u ou sur un autre sommet de G qui n'appartient pas à C . Alors Staller peut jouer sur un sommet v de C à distance 3 de u . Ce faisant, Staller menace d'isoler les deux voisins de v à son prochain coup et Dominator ne peut empêcher qu'un seul de ces coups. Staller gagnera donc. Si, au contraire le premier coup de Dominator est sur un sommet w de C , différent de u , alors jouer sur u est un coup gagnant pour Staller. Si G contient un bloc K_2 alors, comme précédemment, Staller a déjà gagné. Si ce n'est pas le cas, u appartient à au moins un autre cycle C' . Si le deuxième coup de Dominator est sur C' alors il y a au moins un des voisins de u dans C qui n'est pas dominé totalement par Dominator et Staller peut l'isoler à son prochain coup. Si le deuxième coup de Dominator est sur C alors Staller peut isoler un voisin de u dans C' .

Cas 2 : Tous les cycles de G sont de taille 5 et G contient au plus un bloc K_2 .

Si Dominator ne commence pas sur u alors Staller peut appliquer la même stratégie que précédemment et gagnera la partie. Supposons donc que le premier coup de Dominator est sur u . Soit C un des cycle C_5 (il en existe au moins un car G contient au moins deux blocs et au plus un K_2). On note les sommets de C $u_1 = u, u_2, u_3, u_4, u_5$ de façon à ce que $u_i u_{i+1}$ forme une arête pour $i \leq 5$ (en identifiant u_6 à u_1). Alors Staller joue sur u_2 , menaçant u_3 . Dominator est obligé de répondre sur u_4 . Staller joue ensuite sur u_5 , menaçant u_4 , et Dominator doit répondre sur u_3 . Staller a joué tous les voisins de u dans C et c'est de nouveau à son tour de jouer. Elle applique la même stratégie à tous les blocs C_5 . S'il n'y a pas de bloc K_2 , alors Staller a réussi à isoler u . S'il y a un bloc K_2 , alors la feuille de ce K_2 est l'unique voisin de u restant et c'est au tour de Staller de jouer. Elle peut donc jouer sur cette feuille et isoler u , ce qui lui fait gagner la partie.

Cas 3 : G ne contient que des cycles de taille au plus 5, et il y a au moins deux blocs K_2 , ou un bloc C_3 , ou un bloc C_4 .

Dans ce cas nous allons prouver que Dominator a une stratégie gagnante. Le premier coup de Dominator dans cette stratégie est de jouer sur u . Soit C un C_5 de G dont les sommets sont $u_1 = u, u_2, u_3, u_4, u_5$. Si Staller joue un des sommets de la paire $\{u_2, u_4\}$ alors Dominator répond dans l'autre sommet de la paire. De la même façon si Dominator joue l'un des sommets de $\{u_3, u_5\}$ alors Dominator répond sur l'autre sommet. Cela assure que u_3 et u_4 seront dominés, u_2 et u_5 étaient déjà dominés par le coup de Dominator sur u . Dominator applique cette stratégie à tous les cycles C_5 . Si Staller joue dans un cycle C_3 ou C_4 , alors au moins un des voisins de u dans ce cycle est encore non joué et Dominator peut répondre sur ce sommet, ce qui domine entièrement ce cycle, u compris. Supposons enfin que Staller joue sur la feuille d'un K_2 , s'il n'y a pas de cycle C_3 ou C_4 il y a un autre K_2 et Dominator peut répondre sur la feuille de ce K_2 dominant u , toutes les feuilles des K_2 ayant été dominées par le coup de Dominator sur u . Ainsi, Dominator peut dominer entièrement le cactus étoilé G . \square

Intéressons-nous à présent au cas général des cactus avec le cas où Staller commence.

Lemme 3.42. *Si G est un cactus non vide qui ne contient aucun bloc terminal C_4 , alors Staller a une stratégie gagnante en commençant sur G .*

Démonstration. Si $G = K_1$, il est clair que le lemme est vérifié. Supposons à présent que $\delta(G) = 1$. Staller peut jouer sur un sommet adjacent à une feuille et gagne immédiatement. Enfin, supposons que $\delta(G) \geq 2$ ce qui revient à dire que chaque bloc terminal de G est un cycle. De plus, d'après l'énoncé du lemme, aucun de ces cycles n'est un C_4 . Si $G = C_n$, avec $n \neq 4$, alors Staller a une stratégie gagnante d'après le lemme 3.40. Supposons enfin que G a plus d'un cycle et soit C un bloc terminal de G . Soit u l'unique sommet de C qui connecte ce bloc terminal au reste de G . Une stratégie gagnante pour Staller est de jouer son premier coup sur u ce qui crée une menace sur les deux voisins de u dans C . Comme C n'est pas un C_4 , Dominator ne peut pas dominer ces deux sommets en un seul coup et donc Staller gagnera au coup suivant. \square

Comme on l'a vu dans le lemme 3.40, C_3 est le seul cactus d'un seul bloc d'issue \mathcal{N} . Donc, en ayant à l'esprit le lemme 3.41, on définit l'ensemble de cactus suivant, qui nous servira par la suite :

Définition 3.43. Un cactus étoilé G est un \mathcal{N} -cactus étoilé si $G = C_3$ ou si G a au moins deux blocs, que ses cycles sont au plus de taille 5, qu'il contient un bloc C_3 , un bloc C_4 ou deux blocs K_2 .

Le résultat principal de cette partie peut à présent se formuler de la façon suivante :

Théorème 3.44 (G., Henning, Iršič et Klavžar, 2019+ [62]). *Soit G un cactus avec au moins deux blocs,*

- (i) G est \mathcal{D} si et seulement si $V(G)$ peut être couvert par des C_4 disjoints ;
- (ii) G est \mathcal{N} si et seulement si il existe une séquence de blocs terminaux C_4 telle qu'en les retirant itérativement on obtient un \mathcal{N} -cactus étoilé.
- (iii) G est \mathcal{S} dans tous les autres cas.

Démonstration. (i) Si G peut être couvert par des C_4 disjoints, alors G admet une union de graphes d'issue \mathcal{D} comme sous-graphe et est donc lui même d'issue \mathcal{D} . Réciproquement, supposons que G ne peut pas être couvert par des C_4 disjoints. Soit H un graphe obtenu en retirant itérativement de G des blocs terminaux C_4 . Le graphe H n'est pas le graphe vide, car autrement G pourrait être couvert par des C_4 disjoints, et d'après le lemme 3.39, l'issue de H quand Staller commence est la même que celle de G . Or d'après le lemme 3.42, Staller a une stratégie gagnante en commençant sur H . Staller a donc une stratégie gagnante en commençant sur G et G n'est pas d'issue \mathcal{D} .

(ii) Supposons dans un premier temps qu'il existe une séquence de blocs terminaux C_4 telle que si on retire itérativement ces C_4 le résultat est un \mathcal{N} -cactus étoilé, noté H . Alors, une stratégie gagnante pour Dominator en tant que premier joueur est d'appliquer sa stratégie gagnante sur chacun de ces sous-graphes. Ainsi, il joue son premier coup sur H puis répond dans chaque sous-graphe avec sa stratégie gagnante. Si au contraire c'est Staller qui joue en premier, d'après le lemme 3.39, l'issue du jeu sur G est la même que sur H . Elle a donc une stratégie gagnante sur G d'après le lemme 3.41.

(iii) Supposons maintenant qu'il n'existe pas de séquence de blocs terminaux C_4 telle qu'en les retirant on obtienne un \mathcal{N} -cactus étoilé. Supposons que Dominator commence et notons u le sommet sur lequel il joue son premier coup. Soit H le graphe obtenu en retirant itérativement des blocs terminaux C_4 ne contenant pas u tant que cela est possible. Le graphe H est différent d'un cycle C_4 car autrement G pourrait être couvert par des C_4 disjoints. D'après le lemme 3.39, l'issue du jeu sur H est la même que celle sur G . Si H n'est pas un cactus étoilé, alors H contient au moins deux blocs terminaux disjoints. Un de ces blocs terminaux ne contient pas u et n'est pas un C_4 . En jouant sur le sommet de liaison entre ce bloc et le reste du graphe, Staller gagnera la partie. En effet, si ce bloc est un K_2 elle a isolé sa feuille avec ce coup et sinon elle a créé deux menaces auxquelles Dominator ne peut pas répondre. Si H est un cactus étoilé, alors par supposition de départ ce n'est pas un \mathcal{N} -cactus étoilé ni un C_4 et donc il a pour issue \mathcal{S} . Staller a donc une stratégie gagnante sur H après que Dominator a joué u . L'issue de G est donc \mathcal{S} . \square

La figure 3.21 donne un exemple de cactus pour chaque issue possible du jeu de domination totale Maker-Breaker.

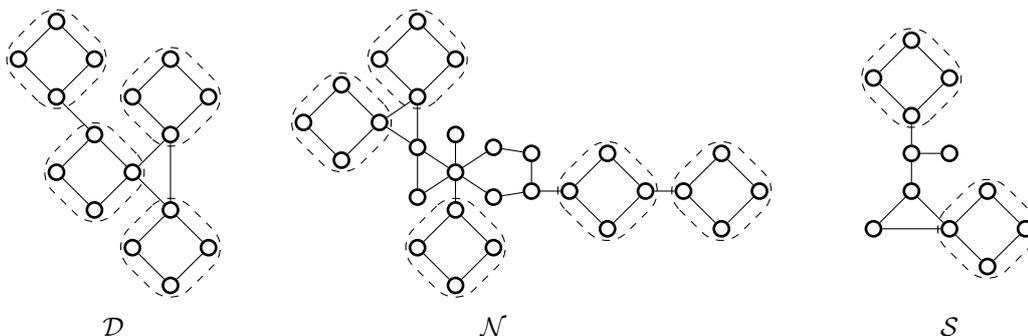


FIGURE 3.21 – Exemple de chaque type de cactus

Si on applique ce théorème aux arbres, qui sont aussi des cactus, on retrouve bien que les seuls arbres qui ne sont pas d'issue \mathcal{S} sont les étoiles, comme affirmé en début de partie.

On peut mettre en parallèle ce résultat et celui obtenu sur les arbres pour le jeu de domination Maker-Breaker. Ici le cycle C_4 joue le rôle que jouait P_2 pour les arbres et les \mathcal{N} -cactus étoilés jouent le rôle précédemment tenu par les étoiles. Il est aussi intéressant de constater que P_2 est le plus petit graphe \mathcal{D} pour le jeu de domination Maker-Breaker et que C_4 est le plus petit graphe \mathcal{D} pour le jeu de domination totale Maker-Breaker (tant pour le nombre de sommets que pour le nombre d'arêtes).

7 Jeux Avoïder-Enforcer

7.1 Le contrepoint de Maker-Breaker

Les jeux Maker-Breaker ont un contrepoint appelé jeux Avoïder-Enforcer. Dans ces jeux, deux joueurs, Avoïder et Enforcer, sélectionnent alternativement des sommets d'un hypergraphe \mathcal{H} , tout comme dans les jeux Maker-Breaker. Cependant, là où ces jeux se distinguent, c'est qu'Avoïder perd s'il sélectionne tous les sommets d'une des hyperarêtes de \mathcal{H} et qu'Enforcer gagne si elle arrive à forcer Avoïder à sélectionner un tel ensemble de sommets. Ils sont donc l'équivalent des jeux misère pour les jeux combinatoires, les conditions de victoire devenant des conditions de défaite.

Ces jeux ont été bien moins étudiés que les jeux Maker-Breaker. Le jeu de Sim, introduit par Simmons en 1969, est probablement le premier représentant du genre. Dans ce jeu, deux joueurs sélectionnent alternativement les arêtes d'une clique K_6 et le premier joueur à former un triangle perd la partie. Il est intéressant de constater que comme le nombre de Ramsey $R(3, 3)$ vaut 6, ce jeu n'a pas de position de match nul.

Beck a par la suite donné une définition générale en 1996 [15] en même temps qu'il formalisait les jeux positionnels dans leur ensemble. Cependant, ce n'est que très récemment que des résultats généraux ont été donnés sur les jeux Avoïder-Enforcer pour la première fois par Hefetz *et al.* en 2010 [74].

Tout comme les jeux Maker-Breaker, les jeux Avoïder-Enforcer n'ont été que très peu sujet d'approche combinatoire. Dans la suite je vais donner quelques résultats sur la variante Avoïder-Enforcer du jeu de domination.

7.2 Le jeu de domination Avoïder-Enforcer

Commençons par définir formellement le jeu et les issues possibles de ce jeu.

Le jeu de domination Avoïder-Enforcer est joué sur un graphe G . Deux joueurs, Avoïder et Enforcer, sélectionnent alternativement des sommets de G . Avoïder perd si les sommets qu'il a sélectionnés forment un ensemble dominant de G . Enforcer, au contraire, perd s'il existe un sommet u de G dont elle a sélectionné tout le voisinage fermé. Ce jeu est fini, à information complète et sans match nul possible. L'un des deux joueurs a donc une stratégie gagnante. On va chercher à déterminer pour chaque graphe quel joueur a une stratégie gagnante. Tout comme pour le jeu de domination Maker-Breaker nous allons donc définir les issues possibles du jeu de domination Avoïder-Enforcer.

Définition 3.45. Une position (G, c) a quatre issues possibles :

- \mathcal{A} , si Avoïder a une stratégie gagnante quel que soit le premier joueur
- \mathcal{E} , si Enforcer a une stratégie gagnante quel que soit le premier joueur
- \mathcal{N} , si le premier joueur a une stratégie gagnante
- \mathcal{P} , si le deuxième joueur a une stratégie gagnante.

Nous pouvons aussi constater que contrairement au jeu de domination Maker-Breaker, toutes les issues de ce jeu sont réalisables comme montré dans la Figure 3.22.

Cependant, cette décomposition en issues en fonction du premier joueur n'est pas la plus pertinente pour les jeux Avoïder-Enforcer. En effet, la proposition suivante, qui est le pendant de la proposition 3.6, montre qu'il n'est jamais avantageux de finir pour les jeux Avoïder-Enforcer. Ce que nous entendons par "finir", c'est "jouer le dernier coup si la partie continue jusqu'à ce que tous les sommets soient joués". Ainsi, le joueur qui commence lorsqu'il y a un nombre impair

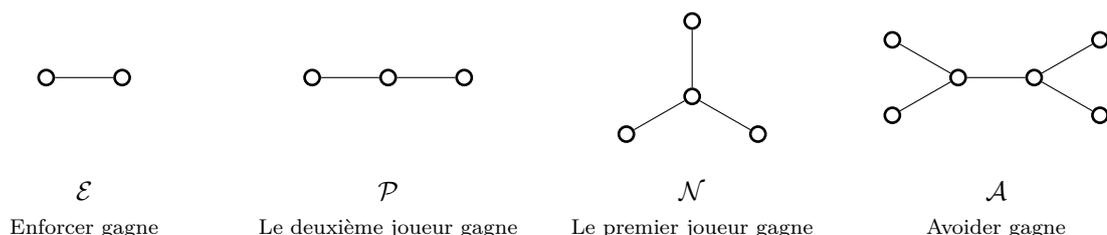


FIGURE 3.22 – Exemple de graphes pour toutes les issues possibles du jeu de domination Éviter-Enforcer.

de sommets joue le dernier coup, tandis que c'est le deuxième joueur qui joue le dernier coup lorsqu'il y a un nombre pair de sommets. C'est dans ce sens que nous entendons "dernier coup" et "avant-dernier coup" dans la proposition suivante¹ :

Proposition 3.46. *Soit G un graphe, si Éviter a une stratégie gagnante sur G pour le jeu de domination Éviter-Enforcer en jouant le dernier coup, alors il a aussi une stratégie gagnante en jouant l'avant-dernier coup.*

Démonstration. Supposons qu'il y ait un nombre pair de sommets et qu'Éviter gagne en étant le deuxième joueur, et donc en jouant le dernier coup. S'il joue en premier, Éviter peut jouer un premier coup arbitraire sur un sommet u et "oublier" ensuite ce coup. Il applique ensuite sa stratégie gagnante en tant que deuxième joueur. Si, à un moment donné, il doit jouer sur u , il joue à la place sur un autre sommet v arbitraire et imagine à la place avoir joué sur u . Il applique la même méthode s'il doit ensuite jouer sur v . Comme Éviter a une stratégie gagnante alors qu'il joue le dernier coup, cela signifie qu'à un moment donné Enforcer a plusieurs coups possibles et qu'ils sont tous perdants, c'est-à-dire qu'ils lui font tous sélectionner un ensemble transversal de l'hypergraphe. Plaçons-nous à présent dans le cas où Éviter jouait le premier coup et soit w le sommet actuellement "oublié" par Éviter. Comme Éviter suivait sa stratégie gagnante en tant que dernier joueur, tous les coups d'Enforcer sont perdants, un de ces coups dans la stratégie d'Éviter est w mais il reste d'autres coups à Enforcer et il perd en jouant l'un d'entre eux.

Supposons à présent qu'il y a un nombre impair de sommets et qu'Éviter a une stratégie gagnante en jouant le premier coup, et donc en jouant le dernier coup. S'il joue en s et qu'Enforcer joue un sommet u à son premier coup, Éviter peut "oublier" ce coup d'Enforcer et appliquer sa stratégie gagnante comme s'il était premier joueur. Comme précédemment, s'il doit jouer sur u il joue à la place sur un autre sommet et imagine avoir joué sur u . De plus, toujours comme précédemment, comme Éviter a une stratégie gagnante en jouant le dernier coup cela signifie qu'à un moment donné Enforcer perd alors qu'il lui reste plusieurs coups possibles, dans notre cas un de ces coups est possiblement pris par le coup "oublié" d'Éviter mais il reste encore un coup possible et tous ses coups sont perdants. □

Étant donné ce résultat, il semble plus pertinent de redéfinir autrement les issues du jeu Éviter-Enforcer de la façon suivante :

Définition 3.47. Une position G a trois issues possibles :

- \mathcal{A} , si Éviter a une stratégie gagnante quel que soit le dernier joueur
- \mathcal{E} , si Enforcer a une stratégie gagnante quel que soit le dernier joueur
- \mathcal{SL} , si le joueur qui joue l'avant dernier coup a une stratégie gagnante.

On peut remarquer que tous les cas auxquels on avait auparavant attribué l'issue \mathcal{N} ou \mathcal{P} sont à présent d'issue \mathcal{SL} , les graphes qui avaient les issues \mathcal{A} et \mathcal{E} conservent les mêmes issues. La notation pour l'issue \mathcal{SL} vient de "second to last", "avant-dernier" en anglais. Cette notation a été choisie pour des raisons de cohérence avec les notations \mathcal{N} et \mathcal{P} définies précédemment.

1. La preuve de cette proposition n'est pas très difficile et s'inspire grandement de celle de la proposition 3.6, cependant je n'ai pas trouvé cette proposition dans la littérature et ne sait donc pas à qui en attribuer la parenté.

Le résultat principal de cette partie concerne les arbres pour lesquels nous allons chercher à attribuer les issues que nous avons définies. Comme nous allons le voir, la méthode pour trouver l'issue du jeu de domination Avoïder-Enforcer sur les arbres est similaire à celle utilisée pour le jeu de domination Maker-Breaker. En effet, nous commençons par montrer que l'on peut retirer des P_2 pendants sans changer l'issue du jeu de domination Avoïder-Enforcer, c'est-à-dire que P_3 est un graphe neutre pour le collage pour le jeu de domination Avoïder-Enforcer.

Théorème 3.48 (Gledel). *Le graphe P_3 est neutre pour l'opération de collage pour le jeu de domination Avoïder-Enforcer.*

Démonstration. Prouvons que retirer des P_2 pendants ne change pas l'issue du jeu de domination Avoïder-Enforcer. Soit G un graphe, xy un P_2 pendant de G avec x une feuille, z l'autre voisin de y dans G et notons G' le graphe obtenu en retirant xy à G .

Supposons qu'Enforcer ait une stratégie gagnante sur G' (en tant que dernière ou avant-dernière joueuse), alors sur G elle peut appliquer la même stratégie que sur G' en rajoutant que si Avoïder joue sur x ou y , elle répond sur l'autre sommet du P_2 . Si tous les sommets de G' sont joués et que ni x ni y n'ont été joués, elle joue sur x et Avoïder jouera le dernier coup de la partie sur y . Comme elle suit sa stratégie gagnante sur G' , elle réussit à forcer Avoïder à créer un ensemble dominant pour G' , de plus, dans la stratégie précédente Avoïder joue forcément sur x ou y dominant aussi le P_2 .

Cela prouve que si un graphe est d'issue \mathcal{E} , rajouter des P_2 pendants ne change pas l'issue du jeu de domination Avoïder-Enforcer.

Si Avoïder a une stratégie gagnante sur G' et qu'Enforcer joue le dernier coup, Avoïder applique la même stratégie que sur G' . Si Enforcer joue sur x ou y avant les deux derniers coups, alors Avoïder ne joue plus que sur G' et, comme Enforcer joue le dernier coup, elle jouera sur le deuxième sommet du P_2 isolant x et perdant. Si au contraire c'est à Avoïder de jouer et qu'il ne reste plus que les sommets x et y , alors Avoïder joue sur x forçant Enforcer à jouer sur y . Comme Avoïder a appliqué sa stratégie gagnante sur G' il y a nécessairement un sommet de G' isolé par Enforcer dans G' . Si ce sommet est z , il est aussi isolé dans G car Enforcer a joué sur y .

Cela prouve donc qu'en rajoutant des P_2 pendants à un graphe d'issue \mathcal{SL} on obtient un graphe d'issue \mathcal{SL} (car on sait déjà que si Enforcer a une stratégie gagnante, rajouter des P_2 pendants conserve cette stratégie gagnante).

Supposons enfin qu'Avoïder a une stratégie gagnante sur G' alors qu'il joue le dernier coup. Nous distinguons quatre cas possibles.

Cas 1 : Si la stratégie d'Avoïder lui dicte de jouer sur z alors qu'aucun de ces sommets n'a été joué précédemment, il joue sur z et, par la suite, si Enforcer joue sur un des sommets x ou y , Avoïder répond sur l'autre sommet. Dans ce cas, comme Avoïder applique sa stratégie gagnante sur G' , Enforcer va isoler un autre sommet que z . Les coups sur x et y ne changent rien à cette stratégie.

Cas 2 : Si Enforcer joue sur y , alors Avoïder répond sur x . La stratégie d'Avoïder reste alors inchangée. Il peut toujours forcer Enforcer à isoler un sommet de G' . Si ce sommet est z , alors comme Enforcer a joué sur y , il est aussi isolé dans G .

Cas 3 : Si Enforcer joue sur z , alors Avoïder joue sur x et "oublie" ces coups. Si, à un moment, Enforcer joue sur y , Avoïder fait comme si elle avait joué sur z dans G' . Si au contraire la stratégie d'Avoïder lui dicte de jouer sur z alors il joue sur y . Comme précédemment, si Enforcer joue sur z et y et qu'Avoïder joue sur x , la stratégie d'Avoïder marche toujours et si le sommet qu'Enforcer isole dans G' est z , il est aussi isolé dans G . Si au contraire Avoïder joue sur y c'est qu'Enforcer isolait un autre sommet de G_i , ce qui est toujours le cas dans G .

Cas 4 : Si Enforcer joue sur x , alors Avoïder joue sur z et "oublie" ces coups. Si plus tard sa stratégie lui dicte de jouer sur z il joue sur y à la place. À présent, Enforcer ne peut pas jouer sur le sommet y , autrement elle isolerait immédiatement x . En suivant sa stratégie gagnante sur G' , il y a deux cas pour Avoïder. Soit Avoïder joue à un moment sur z et il y d'autres sommets qu'Enforcer est obligée à isoler, auquel cas il isole toujours l'un de ces sommets. Soit z est sensé faire partie des coups perdants d'Enforcer. Notons alors que tous les coups perdants dans G' pour Enforcer, autres que z , restent des coups perdants dans G . En effet, soit z' un autre coup perdant d'Enforcer et soit t un sommet isolé si Enforcer joue sur z' (possiblement z' lui-même). Le sommet t ne peut pas être dans le voisinage de z car autrement il y aurait deux sommets non joués dans le voisinage de t et ce ne serait pas un sommet isolé après qu'Enforcer joue sur z . Ainsi t n'est pas dans le voisinage de z et son voisinage est donc inchangé dans T et z' reste un

coup perdant pour Enforcer dans T . Enforcer n'a donc bien que des coups perdants et Avoïder gagne la partie.

Cela prouve, enfin, qu'en rajoutant des P_2 pendants à un graphe d'issue \mathcal{A} on obtient un graphe d'issue \mathcal{A} . \square

Ce résultat nous permet de résoudre le jeu de domination Avoïder-Enforcer sur les arbres.

Théorème 3.49 (Gledel). *Décider de l'issue du jeu de domination Avoïder-Enforcer peut se faire en temps polynomial sur les arbres.*

Démonstration. D'après le lemme 3.33, le graphe résiduel d'un arbre est soit un K_1 , soit P_2 , soit une étoile à deux feuilles ou plus, soit un graphe dont au moins deux sommets sont voisins d'au moins deux feuilles.

Le graphe K_1 est clairement d'issue $\mathcal{S}\mathcal{L}$ car il n'y a qu'un seul sommet et le joueur jouant dessus perd. Le graphe P_2 est d'issue \mathcal{E} , en effet il n'y a que deux sommets voisins et Avoïder est forcé de jouer sur l'un d'entre eux. Les étoiles sont d'issues $\mathcal{S}\mathcal{L}$, en effet le joueur jouant sur le sommet central perd forcément la partie donc le joueur jouant le dernier coup perd.

Soit T un arbre avec au moins deux sommets u et v , qui sont adjacents à au moins deux feuilles chacun. Soit u_1 et u_2 deux feuilles adjacentes à u et soit v_1 et v_2 deux feuilles adjacentes à v . La stratégie d'Avoïder sur T est la suivante : si Enforcer joue sur u_1 ou u_2 (respectivement v_1 ou v_2) Avoïder joue sur l'autre feuille de u (resp. de v). Dans tous les autres cas, Avoïder joue sur un sommet arbitraire de $V(T) \setminus \{u, u_1, u_2, v, v_1, v_2\}$. Si Enforcer joue sur u ou v , soit elle a déjà joué sur l'une des feuilles de ce sommet, auquel cas elle isole cette feuille et perd immédiatement, soit aucune des deux feuilles n'a été jouée et ces deux feuilles sont à présent des coups perdants pour elle et il suffit à Avoïder d'éviter de jouer sur ces feuilles pour qu'Enforcer soit, à un moment donné, forcée de jouer dessus et de perdre. Comme Avoïder joue le dernier coup et qu'il y a un nombre pair de sommets dans $\{u, u_1, u_2, v, v_1, v_2\}$, c'est Enforcer qui jouera le premier coup sur ces sommets et elle perdra donc.

Comme on l'a vu dans la preuve du théorème 3.34, retirer des P_2 pendants se fait en temps polynomial, donc trouver l'issue du jeu de domination Avoïder-Enforcer est polynomial sur les arbres. \square

Dans la preuve du théorème précédent, on a pu remarquer que les arbres qui étaient \mathcal{D} pour le jeu de domination Maker-Breaker sont \mathcal{E} pour le jeu de domination Avoïder-Enforcer, ceux qui étaient \mathcal{S} sont \mathcal{A} et ceux qui étaient \mathcal{N} sont $\mathcal{S}\mathcal{L}$. Il serait intéressant de chercher pour quelles classes de graphes ce constat reste vrai. Il serait peut-être aussi intéressant de savoir si tous les graphes neutres pour le jeu de domination Maker-Breaker sont aussi neutres pour le jeu de domination Avoïder-Enforcer.

On peut aussi remarquer que, plus généralement, les graphes admettant un ensemble dominant par appariement sont d'issue \mathcal{E} . En effet, pour $G = (V, E)$ un graphe admettant un ensemble dominant par appariement $D = \{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$, une stratégie gagnante pour Enforcer sur G est de ne pas jouer sur les sommets de D tant qu'Avoïder ne joue pas dessus et de répondre dans la même paire qu'Avoïder sinon. Si, à un moment donné, c'est à Enforcer de jouer et qu'il ne reste plus que des sommets de D alors il peut jouer un sommet quelconque u_i et ensuite répondre toujours dans la même paire qu'Avoïder. Si Avoïder joue v_i avant la fin de la partie alors Enforcer peut jouer un autre sommet u_j . Avoïder devra donc, à son dernier coup, jouer dans la même paire qu'Enforcer et aura donc joué un sommet dans chaque paire de D .

Ce résultat nous permet de décider de l'issue des cographe admettant un ensemble dominant par appariement, ce qui peut se faire en temps polynomial comme on l'a observé dans le théorème 3.26. Nous n'avons en revanche pas de résultats généraux sur la classe des cographe. L'étude du joint et de l'union n'est, en effet, pas aussi aisée que dans le cas du jeu de domination Maker-Breaker.

Pour le joint, Enforcer gagne lorsque chacun des deux graphes est d'ordre au moins 2 car il y a un ensemble dominant par appariement et il gagne aussi en tant qu'avant-dernier joueur si l'un des graphes est d'ordre 1 car il laisse le sommet universel à Avoïder. Cependant, dans le cas du joint entre K_1 et un graphe G où Enforcer joue le dernier coup, il n'est pas clair que l'issue de ce jeu soit toujours la même que celle du graphe G où Avoïder joue le dernier coup. En effet, le sommet universel sera nécessairement joué par Enforcer mais nous ne savons pas à quel moment. Cela revient à considérer le jeu sur G où Enforcer peut passer son tour à tout moment.

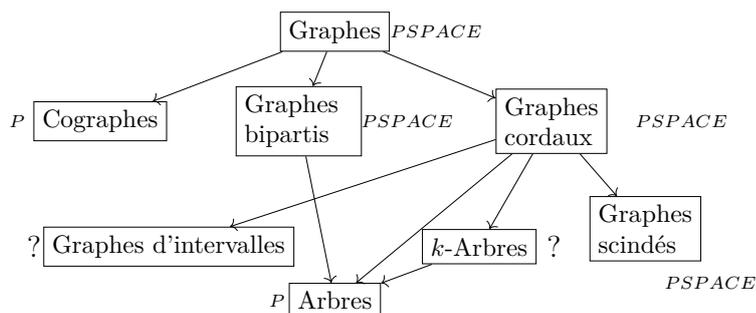


FIGURE 3.23 – Complexité du problème de décision associé au jeu de domination Maker-Breaker en fonction de la classe de graphe étudié.

Pour l’union, l’argument que nous utilisons dans le cas du jeu de domination Maker-Breaker était que Staller appliquait sa stratégie gagnante dans le graphe qu’elle préférait et était forcément avantagée si Dominator jouait dans l’autre graphe. Pour le cas du jeu de domination Avoïder-Enforcer, nous ne pouvons pas appliquer ce type d’argument car jouer dans l’un des graphes peut être nocif pour l’un des joueurs. Nous n’avons pour l’instant pas de résultat sur cette question.

Pour terminer la comparaison avec le jeu de domination Maker-Breaker, nous n’avons pas de résultat de complexité pour le jeu de domination Avoïder-Enforcer. Cela s’explique en partie par le fait qu’il n’existe pas, à ma connaissance, de preuve de complexité pour les jeux Avoïder-Enforcer. En effet, s’il en existait une, la réduction de la partie 4 s’appliquerait de la même façon.

8 Conclusion et perspectives

Au cours de ce chapitre nous avons montré que le problème du jeu de domination Maker-Breaker était $PSPACE$ -complet pour les graphes bipartis et les graphes scindés (et donc les graphes cordaux), mais qu’il était polynomial sur les arbres et les cographes. Il serait intéressant de continuer l’étude de la complexité pour des sous-classes des graphes cordaux, par exemple les k -arbres qui généralisent le concept d’arbres mais de manière plus connectée ou les graphes d’intervalles (voir Figure 3.23 pour une illustration de ces différentes complexités et des liens entre les classes de graphes). De plus, on a montré que déterminer le nombre de domination Maker-Breaker était aussi $PSPACE$ -complet même sur les graphes admettant un ensemble dominant par appariement et polynomial sur les arbres. Cependant, il semble pour l’instant difficile de déterminer le nombre de domination Maker-Breaker des cographes. Comme la classe des graphes admettant un ensemble dominant par appariement prouve qu’il existe un écart de complexité entre déterminer l’issue du jeu de domination Maker-Breaker et déterminer le nombre de domination Maker-Breaker, on peut se demander si c’est aussi le cas pour les cographes.

Nous avons étudié le jeu de domination Maker-Breaker sur l’union, le joint et l’opération de collage, cependant il y a d’autres opérations que l’on pourrait étudier avec le nombre de domination Maker-Breaker. En particulier, le produit cartésien est une opération naturelle et liée au problème de domination via la conjecture de Vizing. On peut, par exemple, remarquer que l’issue du produit cartésien d’un graphe G d’issue \mathcal{D} et d’un autre graphe H aura forcément comme issue \mathcal{D} car on peut alors partitionner $G \square H$ par des copies de G . Cependant il semble difficile de caractériser entièrement le produit cartésien comme on l’a fait pour l’union ou le joint. En effet le produit cartésien de deux graphes d’issue \mathcal{N} peut avoir comme issue \mathcal{D} , \mathcal{N} ou \mathcal{S} (avec par exemple les produits $P_3 \square P_3$, $P_3 \square K_{1,3}$ et $K_{1,4} \square K_{1,4}$).

Un peu plus éloigné du jeu de domination Maker-Breaker, le concept des ensembles dominants par appariement est aussi intéressant à étudier en soi. Nous avons montré que ce problème était NP -complet dans le cas général mais aussi qu’il était polynomial sur les arbres et cographes qui sont d’issue \mathcal{D} si et seulement si ils admettent un ensemble dominant par appariement. On peut chercher pour quelles autres classes de graphes ce problème est polynomial. Pour revenir sur le jeu de domination Maker-Breaker, on peut aussi chercher à caractériser les classes de graphes pour lesquelles un graphe est \mathcal{D} si et seulement si il admet un ensemble dominant par appariement.

Chapitre 4

Couverture par plus courts chemins

Les deux chapitres précédents traitent de variantes du problème de domination dans lequel la couverture se fait grâce au voisinage des sommets sélectionnés. Cependant, ce n'est pas le seul type de couverture qui est étudié dans les graphes et, dans ce chapitre, nous nous intéressons à la couverture de sommets par un ensemble de plus courts chemins entre des sommets du graphe.

Plusieurs paramètres sont liés à ce type de couverture de sommets. Celui que nous étudierons principalement dans ce chapitre est le *nombre géodésique fort* en le comparant à un paramètre proche, le *nombre géodésique*. Alors que le nombre géodésique a été introduit il y a plus de vingt ans [70] et a déjà fait l'objet de nombreuses études, le nombre géodésique fort n'a été, quant à lui, introduit que très récemment [95].

Tout au long de ce chapitre, les résultats obtenus sur le nombre géodésique fort sont comparés aux résultats existants sur le nombre géodésique. Dans un premier temps, nous introduisons ces deux paramètres et présentons des résultats connus à leur propos. L'étude du cas particulier des graphes bipartis complets est traitée dans un second temps. Puis nous introduisons un nouveau paramètre, le noyau géodésique fort, que l'on peut considérer comme une mesure de l'efficacité d'un ensemble géodésique fort donné. Nous étudions ensuite comment se comporte le nombre géodésique fort avec le produit cartésien. En particulier, nous utilisons le noyau géodésique fort pour améliorer des bornes existantes. Enfin, nous nous intéresserons aux hypercubes qui sont des graphes issus de produits cartésiens.

Les recherches que nous présentons dans ce chapitre ont été réalisées avec Sandi Klavžar et Vesna Iršič lors d'un séjour en Slovénie effectué de février à mai 2018. Ces travaux sont décomposés en deux articles [63, 64].

1 Nombre géodésique

Ce chapitre traite de plus courts chemins dans les graphes, aussi convient-il de définir quelques notions essentielles. Un plus court chemin entre deux sommets d'un graphe est aussi appelé *géodésique* entre ces deux sommets. L'ensemble des sommets couverts par des géodésiques entre les sommets u et v d'un graphe G est appelé l'*intervalle* entre u et v et est noté $I_G[u, v]$ ou $I[u, v]$ si le graphe dans lequel on se place est explicite dans le contexte.

Un ensemble S de sommets d'un graphe est appelé *ensemble géodésique* si chaque sommet du graphe appartient à une géodésique d'une paire de sommets de S . Une définition plus formelle est donnée ci-dessous :

Définition 4.1 (Harary, Loukakis et Tsouros, 1993 [70]). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble $S \subseteq V$ est un *ensemble géodésique* de G si $\bigcup_{u, v \in S^2} I[u, v] = V$. La taille d'un plus petit ensemble géodésique d'un graphe G est appelé le *nombre géodésique* de G et est noté $g(G)$.

Notons que pour tout graphe G , $V(G)$ est un ensemble géodésique de G . Tous les graphes admettent donc au moins un ensemble géodésique et le paramètre $g(G)$ est bien défini.

La Figure 4.1 donne un exemple d'ensembles géodésiques de taille minimum pour les graphes C_5 et C_6 .

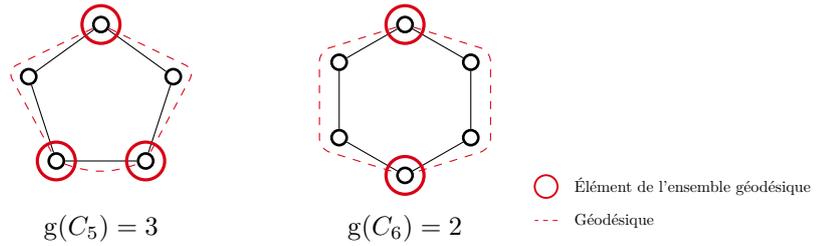


FIGURE 4.1 – Des ensembles géodésiques de taille minimum pour les graphes C_5 et C_6 .

Ce paramètre induit le problème de décision suivant :

ENSEMBLE GÉODÉSIQUE MINIMUM

Instance : Un graphe G et un entier k

Question : A-t-on $g(G) \leq k$?

Ce problème a été étudié pour la première fois par Harary, Loukakis et Tsouros en 1993 [70]. Dans cet article, les auteurs ont déterminé le nombre géodésique de certaines classes de graphes. Atici a ensuite montré en 2002 [9] que ce problème était NP-complet et, par la suite, Dourado *et al.* [51] ont montré en 2010 que c'était aussi le cas si l'on se restreignait aux graphes bipartis cordaux. Enfin, très récemment, Bueno *et al.* ont prouvé que le problème était NP-complet pour les graphes de degré maximal 3 [32].

Il est tout de même possible de caractériser les ensembles géodésiques minimaux dans certaines situations. Les sommets simpliciaux sont notamment très utiles pour déterminer les ensembles géodésiques. Un *sommet simplicial* est un sommet dont le voisinage forme une clique. En 2001, Chartrand, Harary et Zhang [39] remarquent la propriété suivante sur les sommets simpliciaux et les ensembles géodésiques.

Proposition 4.2 (Chartrand *et al.*, 2001 [39]). *Soit G un graphe, S un ensemble géodésique de G et U l'ensemble des sommets simpliciaux de G . On a $U \subseteq S$.*

En effet, les sommets simpliciaux n'appartiennent qu'aux géodésiques dont ils sont une extrémité, tout chemin passant par un sommet simplicial pouvant être raccourci en ne passant que par son voisinage.

Cette propriété permet notamment de déterminer le nombre géodésique des cliques et des arbres.

Remarque 4.3. Soit K_n une clique d'ordre $n \geq 2$, on a $g(K_n) = n$.

Remarque 4.4. Soit T un arbre et $\ell(T)$ l'ensemble des feuilles de T , on a $g(T) = |\ell(T)|$.

Dans une clique tous les sommets sont simpliciaux, ce qui prouve le résultat. Dans un arbre les seuls sommets simpliciaux sont les feuilles, un ensemble géodésique doit donc toutes les contenir. De plus, tous les sommets sont contenus dans des géodésiques entre des feuilles de l'arbre, l'ensemble des feuilles d'un arbre est donc l'unique ensemble géodésique minimum de cet arbre.

Remarquons aussi que la clique est le seul graphe dont le nombre géodésique est égal à l'ordre du graphe. Cela est dû au fait qu'une clique est le seul graphe dont tous les sommets sont simpliciaux. Si G est un graphe qui n'est pas une clique et u est un sommet de G qui n'est pas simplicial alors $V(G) \setminus \{u\}$ est un ensemble géodésique de G . En effet, comme u n'est pas un sommet simplicial, deux de ses voisins ne forment pas une arête et donc u est couvert par une géodésique entre ces deux voisins. Tous les autres sommets du graphe sont couverts en étant dans l'ensemble géodésique.

Les graphes de nombre géodésique 2 sont les graphes tels qu'il existe deux sommets dont l'intervalle entre ces deux sommets contient l'ensemble des sommets du graphe. C'est notamment le cas des grilles et des hypercubes.

En appliquant des méthodes similaires, Buckley, Harary et Quintas [31] ont prouvé que les seuls graphes G de nombre géodésique $|V(G) - 1|$ étaient ceux de la forme $K_1 \bowtie (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \dots \cup K_{n_k})$.

La Figure 4.2 présente l'exemple d'un tel graphe ainsi que d'une clique, d'un arbre et d'une grille avec leurs ensembles géodésiques respectifs.

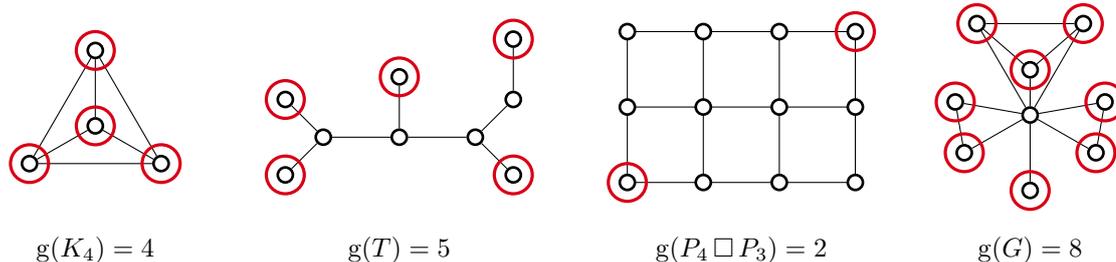


FIGURE 4.2 – Une clique, un arbre, une grille, un graphe de nombre géodésique $|V(G)| - 1$ et leurs ensembles géodésiques minimaux.

Il a aussi été démontré par Chartrand, Harary et Zhang [39] que pour tous entiers n et k , avec $2 \leq k \leq n$, il existe un graphe d'ordre n et de nombre géodésique k . Dans le même article, les auteurs prouvent que pour k , r et d des entiers, avec $r \leq d \leq 2r$, il existe un graphe de rayon r , de diamètre d et de nombre géodésique k .

Avec une approche probabiliste Chae *et al.* ont, quant à eux, déterminé le comportement asymptotique du nombre géodésique de graphes aléatoires [37].

Le nombre géodésique a aussi été étudié dans les graphes médians [10, 25], c'est-à-dire les graphes pour lesquels les intervalles entre trois sommets s'intersectent toujours en un seul sommet.

2 Nombre géodésique fort : définitions et premiers résultats

Dans la partie précédente nous avons vu que le nombre géodésique de certaines classes bien connues de graphes pouvait être très bas par rapport à l'ordre du graphe, comme c'est le cas pour les grilles. Dans certains cas, cela s'explique en général par le fait qu'il existe de très nombreuses géodésiques entre deux points donnés. L'idée du nombre géodésique fort est d'interdire l'utilisation de ces multiples géodésiques.

Contrairement aux ensembles géodésiques, dans un *ensemble géodésique fort*, seule une géodésique entre deux sommets sert à couvrir les sommets du graphe. En effet, un ensemble S de sommets d'un graphe est un ensemble géodésique fort s'il existe une façon de fixer une géodésique entre chaque paire de sommets de S de telle sorte que l'union de ces géodésiques couvre tous les sommets du graphe.

Définition 4.5 (Manuel *et al.*, 2018 [95]). Soit $G = (V, E)$ un graphe, $S \subseteq V$ est un *ensemble géodésique fort* de G s'il existe une fonction $\tilde{I} : \binom{S}{2} \rightarrow \mathcal{P}(V)$ qui à chaque paire de sommets (u, v) de S associe les sommets d'une géodésique entre u et v et telle que $\bigcup_{u,v \in \binom{S}{2}} \tilde{I}(u, v) = V$.

Le *nombre géodésique fort* d'un graphe G , noté $sg(G)$, est la taille d'un plus petit ensemble géodésique fort de G . On appelle *sg-ensemble* un ensemble géodésique fort de taille minimum.

La Figure 4.3 représente des exemples d'ensembles géodésiques forts minimaux pour les graphes C_5 et C_6 . Remarquons que le nombre géodésique fort des cycles est toujours 3, ce qui est la même valeur que le nombre géodésique des cycles impairs mais 1 de plus que les cycles pairs.

Ce paramètre induit le problème de décision suivant :

ENSEMBLE GÉODÉSIQUE FORT MINIMUM

Instance : Un graphe G et un entier k

Question : A-t-on $sg(G) \leq k$?

Ce problème a été introduit par Manuel *et al.* [95]. Dans cet article, les auteurs étudient notamment le nombre géodésique fort sur une sous-classe des graphes cordaux planaires, les réseaux apolloniens, et prouvent que le problème est NP-complet dans le cas général.

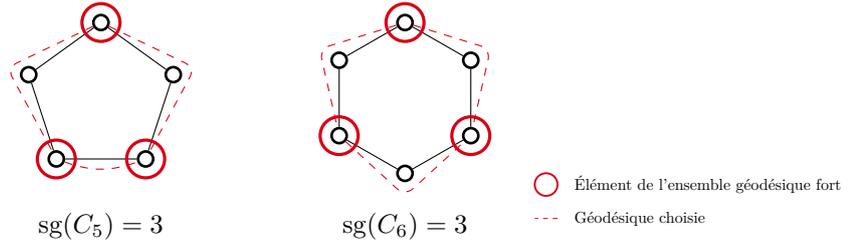


FIGURE 4.3 – Des ensembles géodésiques forts de taille minimum pour les graphes C_5 et C_6 .

Manuel *et al.* donnent aussi les bornes suivantes sur le nombre géodésique fort :

Théorème 4.6 (Manuel *et al.*, 2018 [95]). *Soit G un graphe avec $|V(G)| \geq 2$, on a $2 \leq \text{sg}(G) \leq |V(G)|$. De plus, la borne inférieure n'est atteinte que dans le cas des chemins et la borne supérieure ne l'est que dans le cas des cliques.*

Ces bornes ont ensuite été raffinées par Iršič [84] grâce à l'utilisation du diamètre :

Théorème 4.7 (Iršič, 2018 [84]). *Soit G un graphe et $d = \text{diam}(G)$, on a*

$$\frac{d - 3 + \sqrt{(d - 3)^2 + 8n(d - 1)}}{2(d - 1)} \leq \text{sg}(G) \leq |V(G)| - d + 1.$$

La première borne revient à dire que chaque géodésique couvre, au plus, autant de sommets que la taille du diamètre. Cette borne est équivalente à la précédente dans le cas des chemins car, dans ce cas, $n = d + 1$ et $(d - 3)^2 + 8n(d - 1) = (3d - 1)^2$. La seconde borne est due au fait que sélectionner tous les sommets sauf les sommets centraux du diamètre donne un ensemble géodésique fort. Elle est équivalente à la borne précédente dans le cas des cliques où on a $d = 1$.

Le lien évident entre le nombre géodésique et le nombre géodésique fort rend la comparaison de ces deux paramètres intéressante. Notons que tout ensemble géodésique fort d'un graphe est aussi un ensemble géodésique pour ce même graphe. Ainsi, pour tout graphe G , $\text{sg}(G) \geq g(G)$. De plus, la différence entre le nombre géodésique d'un graphe et son nombre géodésique fort peut être arbitrairement grande.

Prenons par exemple le graphe biparti complet $K_{2,n}$ représenté dans la Figure 4.4. Soit X et Y ses parties, avec $|X| = 2$ et $|Y| = n$, et soient u, v les sommets de X . Comme tous les sommets sont sur une des géodésiques entre u et v , $S = \{u, v\}$ est un ensemble géodésique pour $K_{2,n}$ et $g(K_{2,n}) = 2$. Toutefois si l'on s'intéresse au nombre géodésique fort, les seules géodésiques comprenant les sommets de Y et dont ils ne sont pas une extrémité sont celles entre u et v . Comme on ne peut fixer qu'une seule géodésique entre u et v , au moins $n - 1$ sommets de Y doivent être dans tout ensemble géodésique fort. Ce n'est pas suffisant pour couvrir tous les sommets de $K_{2,n}$ car un sommet de Y resterait non couvert. De plus, si $n \geq 3$, $S = Y$ est un ensemble géodésique fort de $K_{2,n}$ et donc $\text{sg}(K_{2,n}) = n$. Dans le cas où $n = 2$, on a $\text{sg}(K_{2,2}) = 3$.

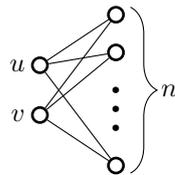


FIGURE 4.4 – Graphe $K_{2,n}$ avec $n \geq 3$, dont le nombre géodésique est 2 et le nombre géodésique fort est n .

Notons que, comme pour les ensembles géodésiques, les ensembles géodésiques forts d'un graphe contiennent tous les sommets simpliciaux de ce graphe.

Proposition 4.8 (Manuel *et al.*, 2018 [95]). *Soit G un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et U l'ensemble des sommets simpliciaux de G , on a $U \subseteq S$.*

Comme application de la proposition 4.8, considérons la classe de graphes suivante que nous utiliserons pour construire des graphes extrémaux dans la partie 4. Soit $S(G)$ le *graphe subdivisé* d'un graphe G , c'est-à-dire le graphe obtenu depuis G en subdivisant une fois chacune de ses arêtes. Soit $\widehat{S(G)}$ le graphe obtenu depuis $S(G)$ en ajoutant une arête entre toute paire de sommets $u, v \in V(S(G)) \setminus V(G)$. La Figure 4.5 représente le graphe $\widehat{S(K_4)}$. Remarquons que dans tout graphe $\widehat{S(G)}$, l'unique ensemble géodésique fort minimum est constitué de l'ensemble des sommets simpliciaux, c'est-à-dire des sommets du graphe G originel.

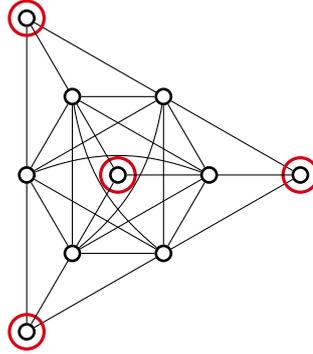


FIGURE 4.5 – Le graphe $\widehat{S(K_4)}$ et son ensemble géodésique fort.

La plupart des études qui ont été menées sur le nombre géodésique fort portent soit sur les graphes bipartis complets, soit sur le produit cartésien de graphes, deux cas que nous traiterons dans les parties à venir.

3 Graphes bipartis complets

Comme vu dans la partie précédente, le nombre géodésique et le nombre géodésique fort diffèrent grandement dans le cas d'un graphe biparti complet dont l'une des parties est de taille 2. Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas général de cette situation et déterminer le nombre géodésique fort des graphes bipartis complets.

Notons dans un premier temps que, comme l'ont observé Chartrand, Harary et Zhang [39], le nombre géodésique d'un graphe biparti complet s'exprime simplement de la façon suivante :

Proposition 4.9 (Chartrand *et al.*, 2001 [39]). *Soit $n, m \geq 2$, on a $g(K_{n,m}) = \min\{n, m, 4\}$.*

En effet, il suffit de mettre deux sommets de la plus petite partie dans un ensemble géodésique pour dominer entièrement l'autre partie. Dès lors nous avons le choix entre prendre deux sommets dans l'autre partie et ainsi avoir un ensemble géodésique de taille 4, ou ajouter tous les sommets de la plus petite partie dans l'ensemble géodésique.

Pour ce qui est du nombre géodésique fort, la tâche paraît moins triviale. Iršič a donné la valeur exacte du nombre géodésique fort des graphes bipartis complets équilibrés dans le théorème suivant :

Théorème 4.10 (Iršič, 2018 [84]). *Pour $n \geq 6$, on a*

$$sg(K_{n,n}) = \begin{cases} 2 \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil, & \text{si } 8n - 7 \text{ n'est pas un carré parfait,} \\ 2 \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil - 1, & \text{si } 8n - 7 \text{ est un carré parfait.} \end{cases}$$

Elle a aussi donné la valeur exacte du nombre géodésique de $K_{n,m}$ dans le cas où m est bien plus grand que n . Iršič et Konvalinka ont, par la suite, déterminé le comportement asymptotique de $sg(K_{n,m})$ [83].

Notons aussi que $\text{sg}(K_{1,n}) = n$ pour tout entier positif $n \geq 2$, comme $K_{1,n}$ est un arbre à n feuilles. Ce cas est donc omis des résultats suivants.

Dans la continuité de ces travaux, nous allons déterminer dans la suite de ce chapitre la valeur exacte du nombre géodésique fort de tous les graphes bipartis complets. Comme ce nombre est connu dans le cas où l'une des deux parties est de taille 2, nous supposons à présent que les deux parties sont de taille supérieure ou égale à 3.

Soit $3 \leq n \leq m$ des entiers et soit (X, Y) la bipartition de $K_{n,m}$, avec X la partie contenant n sommets et Y la partie contenant m sommets. Pour trouver la valeur de $\text{sg}(K_{n,m})$, nous allons supposer que nous avons sélectionné k sommets de X et nous allons chercher le nombre de sommets qu'il faut sélectionner dans Y pour former un ensemble géodésique fort.

Si k sommets de X ont été sélectionnés, les géodésiques entre ces sommets permettent de couvrir au plus $\binom{k}{2}$ sommets de Y , un sommet par paire de sommets sélectionnés dans X . Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, il faut donc sélectionner $f_1(k) = m - \binom{k}{2}$ sommets de Y pour pouvoir couvrir le reste des sommets de Y . De plus, si k sommets de X ont été sélectionnés, il reste $n - k$ sommets non couverts dans X et il faut donc sélectionner au moins $f_2(k) = \min\{q \in \mathbb{Z} : \binom{q}{2} \geq n - k\}$ sommets dans Y pour couvrir tous les sommets de X .

On définit $\tilde{f}_1(x) = m - \frac{x(x-1)}{2}$ et $\tilde{f}_2(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n-x)}}{2}$, comme les extensions continues de f_1 et f_2 sur \mathbb{R} . La valeur de $\tilde{f}_2(x)$ est la solution positive de l'équation $\frac{y(y-1)}{2} = n - x$. Notons que pour $k < n$, $f_2(k) = \lceil \tilde{f}_2(k) \rceil$ mais que $0 = f_2(n) \neq \lceil \tilde{f}_2(n) \rceil = 1$.

Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit les fonctions $F_1(k) = k + f_1(k)$ et $F_2(k) = k + f_2(k)$, deux bornes inférieures du nombre géodésique fort de $K_{n,m}$ lorsque k sommets de X sont sélectionnés, et $s(k) = \max\{F_1(k), F_2(k)\}$, le maximum de ces bornes inférieures qui est donc aussi une borne inférieure. Notons que, dans la suite de cette partie, les entiers n et m des fonctions définies plus haut seront explicites dans le contexte. Similairement aux fonctions f_1 et f_2 , on définit $\tilde{F}_1(x) = x + \tilde{f}_1(x)$ et $\tilde{F}_2(x) = x + \tilde{f}_2(x)$, les extensions continues de F_1 et F_2 .

Caractérisons à présent $\text{sg}(K_{n,m})$ à partir de ces fonctions nouvellement définies :

Lemme 4.11. *Si $3 \leq n \leq m$, alors $\text{sg}(K_{n,m}) = \min\{s(k) : k \in \{0, \dots, n\}\}$.*

Démonstration. Soit (X, Y) , $|X| = n$, $|Y| = m$, la bipartition des sommets de $K_{n,m}$. Soit S_k un ensemble géodésique minimum de ce graphe contenant exactement k sommets de X . Notons $\ell = |S_k \cap Y|$. Comme Y doit être couvert, $\ell \geq m - \binom{k}{2} = f_1(k)$.

Comme X doit aussi être couvert, ℓ doit être tel que $\binom{\ell}{2} \geq n - k$. Ainsi, par définition de f_2 , $\ell \geq f_2(k)$.

Si $\ell \geq f_1(k)$ et $\ell \geq f_2(k)$, alors X et Y sont tous deux couverts. Donc, par minimalité de S_k , $\ell = \max\{f_1(k), f_2(k)\}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{sg}(K_{n,m}) &= \min\{|S_k| : 0 \leq k \leq n\} \\ &= \min\{k + \max\{f_1(k), f_2(k)\} : 0 \leq k \leq n\} \\ &= \min\{s(k) : 0 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

□

Dans la suite de cette partie nous allons chercher à déterminer la valeur minimum de $s(k)$ afin de trouver une formule close pour $\text{sg}(K_{n,m})$. À cette fin, nous nous intéressons aux fonctions $\tilde{F}_1(x)$ et $\tilde{F}_2(x)$ et montrons que le minimum de la fonction $s(k)$ est proche du minimum des fonctions relaxées : $\min\{\max\{\tilde{F}_1(k), \tilde{F}_2(k)\} : 0 \leq k \leq n\}$.

La preuve du résultat principal de cette partie (le théorème 4.16) est constituée de détails techniques, nous divisons donc les étapes de cette preuve en différents lemmes. Commençons par étudier le comportement de F_1 , F_2 , \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 .

Lemme 4.12. *Les fonctions F_1 et \tilde{F}_1 sont strictement décroissantes sur l'intervalle $[3, n]$. Pour $k \leq 3$ on a $F_1(0) = F_1(3) = m$ et $F_1(1) = F_2(2) = m + 1$.*

Démonstration. La décroissance de ces fonctions résulte du fait que $x + m - \frac{x(x-1)}{2}$ est strictement décroissant pour $x \geq 3$. □

Lemme 4.13. *Les fonctions F_2 et \widetilde{F}_2 sont croissantes sur l'intervalle $[0, n-1]$. Pour $k \geq n-1$, on a $F_2(n-1) = n+1$ et $F_2(n) = n$. De plus, $|F_2(k+1) - F_2(k)| \leq 1$, pour tout $0 \leq k \leq n-1$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $f_2(k) = q$, pour $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Par définition de f_2 , cela signifie que $\binom{q-1}{2} < k \leq \binom{q}{2}$. On a donc $f_2(k+1) = q+1$ si $k = \binom{q}{2}$ et $f_2(k+1) = q$ sinon. Comme $F_2(k) = k + f_2(k)$, la fonction F_2 est croissante sur $[0, n-1]$ et l'écart entre deux valeurs consécutives est d'au plus 1. Une analyse de fonction permet de prouver que \widetilde{F}_2 est croissante sur l'intervalle $[0, n-1]$. \square

Étudions à présent l'intersection des fonctions \widetilde{F}_1 et \widetilde{F}_2 .

Lemme 4.14. *Si $n-3 < \binom{m-3}{2}$, $m-3 \leq \binom{n-3}{2}$ et $n \geq 3$, alors les fonctions \widetilde{F}_1 et \widetilde{F}_2 s'intersectent exactement une fois sur $[3, n-3]$.*

Démonstration. Remarquons que les conditions de ce lemme sont équivalentes à $7 \leq n \leq m \leq 3 + \binom{n-3}{2}$.

Par définition de f_2 , la condition $n-3 < \binom{m-3}{2}$ implique $f_2(3) \leq m-3$. De plus, $f_1(3) = m-3$, donc $\widetilde{f}_2(3) \leq f_2(3) \leq f_1(3) = \widetilde{f}_1(3)$. On a donc $\widetilde{F}_2(3) \leq \widetilde{F}_1(3)$.

De plus, on a $f_1(n-3) = m - \binom{n-3}{2}$ et $f_2(n-3) = 3$. La condition $m-3 \leq \binom{n-3}{2}$ implique donc $f_2(n-3) \geq f_1(n-3)$ et donc $\widetilde{F}_2(n-3) \geq \widetilde{F}_1(n-3)$.

Comme \widetilde{F}_2 est croissante et \widetilde{F}_1 strictement décroissante sur $[3, n-3]$, il en résulte que \widetilde{F}_1 et \widetilde{F}_2 s'intersectent exactement une fois sur l'intervalle $[3, n-3]$. \square

Prouvons, enfin, que le point d'intersection des fonctions \widetilde{F}_1 et \widetilde{F}_2 est proche de la valeur à partir de laquelle $F_1 - F_2$ change de signe.

Lemme 4.15. *Pour $m \geq n \geq 7$ et $m \leq 3 + \binom{n-3}{2}$, soit x^* l'intersection de \widetilde{F}_1 et \widetilde{F}_2 sur $[3, n-3]$. Alors :*

- (i) $F_2(\lceil x^* \rceil) \geq F_1(\lceil x^* \rceil)$,
- (ii) $F_1(\lceil x^* \rceil - 1) \geq F_2(\lceil x^* \rceil - 1)$.

Démonstration. Comme $x \in [3, n-3]$, chaque propriété peut être prouvée sur \widetilde{F}_1 et \widetilde{F}_2 au lieu de F_1 et F_2 .

(i) Comme \widetilde{F}_2 est croissante, \widetilde{F}_1 est strictement décroissante, $\widetilde{F}_2(x^*) = \widetilde{F}_1(x^*)$ et $x^* \leq \lceil x^* \rceil$, on déduit $\widetilde{F}_2(\lceil x^* \rceil) \geq \widetilde{F}_1(\lceil x^* \rceil)$.

(ii) Comme \widetilde{F}_2 est croissante, $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2(x^*) = \widetilde{F}_1(x^*)$ et $\lceil x^* \rceil - 1 \leq x^*$, on déduit $\widetilde{F}_2(\lceil x^* \rceil - 1) \leq \widetilde{F}_2(x^*) = \widetilde{F}_1(x^*) < \widetilde{F}_1(\lceil x^* \rceil - 1)$. \square

Ces lemmes nous permettent d'obtenir le résultat suivant sur le nombre géodésique fort des graphes bipartis complets :

Théorème 4.16 (G. et Iršič, 2018 [63]). *Si $3 \leq n \leq m$, alors*

$$\text{sg}(K_{n,m}) = \begin{cases} m & \text{si } n-3 \geq \binom{m-3}{2}, \\ m+n - \binom{n}{2} & \text{si } m \geq \binom{n}{2}, \\ n & \text{si } \binom{n}{2} > m \geq 3 + \binom{n-3}{2}, \\ \min\{F_1(\lceil x^* \rceil - 1), F_2(\lceil x^* \rceil)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

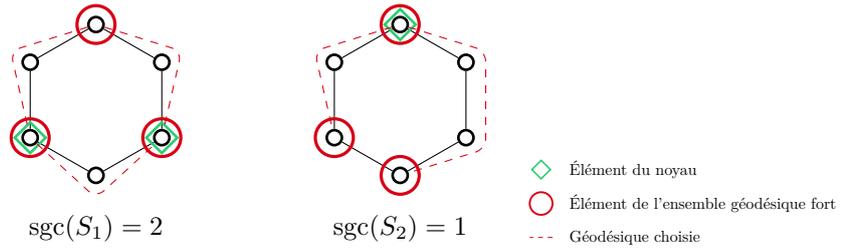
où $3 \leq x^* \leq n-3$ est la solution de l'équation $m - \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1+\sqrt{1+8(n-x)}}{2}$.

Observons que le premier cas se simplifie en $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6)\}$ et que le cas "sinon" apparaît si et seulement si $m \geq n \geq 7$ et $m \leq 3 + \binom{n-3}{2}$.

Démonstration. On rappelle que par le lemme 4.11, $\text{sg}(K_{n,m}) = \min\{s(k) : 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}\} = \min\{\max\{F_1(k), F_2(k)\} : 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Cas 1 : Soit $n-3 \geq \binom{m-3}{2}$. Les seules possibilités sont $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6)\}$. Dans tous ces cas, il est facilement vérifiable que la valeur optimale est m .

Cas 2 : Soit $m \geq \binom{n}{2}$. Donc, $F_1(n) \geq F_2(n)$. Comme $n \geq 3$ et F_1 est strictement décroissante, on déduit $F_1(n-1) \geq F_2(n-1)$. Si $n=3$, alors $F_2(0) = F_2(3) = 3$ et $F_2(1) = F_2(2) = 4$. Donc le minimum est atteint quand $k=0$ ou $k=n$, toutefois la valeur atteinte dans ces deux cas est


 FIGURE 4.6 – Le noyau de deux ensembles géodésiques forts S_1 et S_2 de C_6 .

identique et égale à $m + n - \binom{n}{2} = m$. Si $n \geq 4$, alors $F_1(k) \geq F_2(k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ (par les propriétés de F_1 et F_2) et le minimum est atteint pour $k = n$, ainsi le nombre géodésique fort est $m + n - \binom{n}{2}$.

Cas 3 : Soit $\binom{n}{2} > m \geq 3 + \binom{n-3}{2}$. Donc $F_1(n) < F_2(n)$ et $F_1(n-3) \geq F_2(n-3)$. Ainsi par les propriétés de F_1 et F_2 , le minimum est atteint pour $k = n$ et le nombre géodésique fort est $F_2(n) = n$.

Cas 4 : Dans ce dernier cas, $m \geq n \geq 7$ et $m \leq 3 + \binom{n-3}{2}$. Par le lemme 4.14, il existe un $x^* \in [3, n-3]$ tel que $\widetilde{F}_2(x^*) = \widetilde{F}_1(x^*)$. Comme \widetilde{F}_1 est décroissante et \widetilde{F}_2 croissante, $\min\{\max\{\widetilde{F}_1(x), \widetilde{F}_2(x)\}\}$ est atteint en x^* . Cependant, comme x^* n'est pas nécessairement un entier, l'étude des propriétés de F_1 et F_2 doit être prolongée sur des valeurs entières proches de x^* . Par le lemme 4.15(i) $F_2(\lceil x^* \rceil) \geq F_1(\lceil x^* \rceil)$, donc on a également $F_2(k) \geq F_1(k)$ pour tout $k \geq \lceil x^* \rceil$. Par le lemme 4.15(ii) $F_1(\lceil x^* \rceil - 1) \geq F_2(\lceil x^* \rceil - 1)$, donc on a $F_1(k) \geq F_2(k)$ pour tout $k \leq \lceil x^* \rceil - 1$.

Donc $\min\{\max\{F_1(k), F_2(k)\} : 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}\} = \min\{F_1(\lceil x^* \rceil - 1), F_2(\lceil x^* \rceil)\}$. \square

4 Noyau géodésique fort

Comme vu précédemment, dans certains ensembles géodésiques forts de taille minimum, un ou plusieurs sommets de l'ensemble géodésique n'ont pour effet que de se couvrir eux-mêmes. C'est le cas des cliques et des graphes bipartis complets où l'une des deux parties est beaucoup plus grande que l'autre. C'est en cherchant à mesurer "l'efficacité" d'un ensemble géodésique fort, ou le nombre de sommets "utiles", que nous avons introduit avec Iršič et Klavžar le concept de noyau géodésique fort.

Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et C un sous-ensemble de S . On dit que C est un *noyau géodésique fort* de S s'il existe une façon de fixer des géodésiques entre les sommets de C et les sommets de S de telle sorte que ces géodésiques couvrent tous les sommets de G . Plus formellement, le noyau géodésique fort se définit comme suit :

Définition 4.17. Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un ensemble géodésique fort de G . Un sous-ensemble C de S est un noyau géodésique fort de S s'il existe une fonction $\widetilde{I} : C \times S \rightarrow \mathcal{P}(V)$ qui, à chaque paire de sommets dont au moins l'un des deux est dans C et l'autre dans S , associe les sommets d'une géodésique entre ces deux sommets et telle que $\bigcup_{u,v \in C \times S} \widetilde{I}(u, v) = V$.

Une autre façon de voir le noyau géodésique fort consiste à dire que les géodésiques entre les paires de sommets de $S \setminus C$ ne sont pas nécessaires pour couvrir le graphe. Pour un ensemble géodésique fort de S donné, on appelle la taille de son plus petit noyau géodésique fort son *nombre de noyau géodésique fort* que l'on note $\text{sgc}(S)$. La Figure 4.6 donne deux exemples de noyaux géodésiques forts pour le graphe C_6 .

Il semble intuitif de définir le nombre de noyau géodésique fort d'un graphe G comme la taille du plus petit noyau géodésique fort sur les ensembles géodésiques forts de G . Cependant comme $V(G)$ est un ensemble géodésique fort de G et qu'on peut aisément vérifier que n'importe quel sommet forme un noyau géodésique fort de $V(G)$, cette valeur vaudrait toujours 1. Pour un graphe G donné, nous avons donc défini le *nombre de noyau géodésique fort* de G , noté $\text{sgc}(G)$,

comme la taille d'un plus petit noyau géodésique fort d'un ensemble géodésique fort minimum de ce graphe. Cependant la notion de noyau demeure utile en dehors de ce paramètre et, par la suite, nous serons amenés à utiliser des noyaux d'ensembles géodésiques dont la taille n'est pas forcément minimum.

À des fins de facilité de lecture, on remplacera parfois le terme "noyau géodésique fort" par "noyau".

Intéressons-nous à présent à certaines caractéristiques du noyau.

Proposition 4.18. *Soit G un graphe connexe, d'ordre n et de taille m . On a :*

$$\text{sg}(\widehat{S(G)}) = n \quad \text{et} \quad \text{sgc}(\widehat{S(G)}) \geq \min \left\{ k : \sum_{i=1}^k (n-i) \geq m \right\}.$$

Démonstration. Les sommets de G sont simpliciaux dans $\widehat{S(G)}$ donc $\text{sg}(\widehat{S(G)}) \geq n$. D'un autre côté, ces sommets forment un ensemble géodésique fort, ce qui prouve la première affirmation. Cela prouve aussi que $V(G)$ est l'unique sg-ensemble de $\widehat{S(G)}$.

Notons que les géodésiques entre les sommets de $V(G)$ sont de taille 2 ou 3. Ainsi une telle géodésique d'un sommet $v \in V(G)$ à un autre sommet de $V(G)$ couvre un ou deux sommets de $V(\widehat{S(G)}) \setminus V(G)$. De plus, si elle en couvre deux, alors l'un d'eux est un sommet obtenu en subdivisant une arête vx et ce sommet est déjà couvert par la géodésique (v, x) . Il s'ensuit que les géodésiques issues de $v \in V(G)$ vers les sommets de $V(G) \setminus \{v\}$ couvrent au plus $n-1$ sommets de $V(\widehat{S(G)}) \setminus V(G)$. Après l'ajout de v au noyau, en appliquant le même raisonnement on déduit que les géodésiques issues de $u \in V(G) - \{v\}$ couvrent au plus $n-2$ autres sommets. En répétant ce raisonnement jusqu'à ce que tous les sommets de $V(\widehat{S(G)}) - V(G)$ soient couverts, on obtient $\text{sgc}(\widehat{S(G)}) \geq \min\{k : \sum_{i=1}^k (n-i) \geq m\}$. \square

Pour tout graphe G tel que G est une clique, un cycle ou un arbre, on a $\text{sgc}(G) = 1$. Prouvons le cas des arbres qui nous sera utile ultérieurement.

Lemme 4.19. *Soit T un arbre, $\text{sgc}(T) = 1$.*

Démonstration. L'ensemble L des feuilles de T forme l'unique sg-ensemble de T . Considérons un sommet u de L et enracinons T en u . Tout sommet de T est soit une feuille, soit l'ancêtre d'une feuille, et chaque sommet appartient donc à l'unique géodésique entre u et une feuille. Les géodésiques entre u et les autres sommets de L couvrent $V(T)$. Ainsi, $\{u\}$ est un noyau de L et $\text{sgc}(T) = 1$. \square

Comme nous l'avons vu précédemment $\text{sgc}(K_n) = 1$. Pour tous les autres graphes, les bornes suivantes s'appliquent.

Théorème 4.20 (G., Iršič et Klavžar, 2018 [64]). *Soit G un graphe non complet avec $n = |V(G)|$, $s = \text{sg}(G)$ et $d = \text{diam}(G) \geq 2$,*

$$1 \leq \left\lceil s - \frac{1 + \sqrt{(2s-1)^2 - \frac{8(n-s)}{d-1}}}{2} \right\rceil \leq \text{sgc}(G) \leq \min\{s-1, n-s\}.$$

Démonstration. Si S est un ensemble géodésique fort et si u est un sommet de S alors, en posant $X = S \setminus \{u\}$, on a $\cup_{(v_1, v_2) \in X \times S} \tilde{I}(v_1, v_2) = V(G)$. On a donc bien $\text{sgc}(G) \leq s-1$. De plus, comme G n'est pas une clique, tous les sommets de G ne sont pas dans l'ensemble géodésique fort. Pour constituer un noyau géodésique fort il suffit, pour chaque sommet u de G qui n'appartient pas à l'ensemble géodésique fort, d'ajouter au noyau un sommet de l'ensemble géodésique fort dont l'une des géodésiques couvre u , ainsi chaque sommet qui n'appartient pas à l'ensemble géodésique fort est couvert par une géodésique issue du noyau. Ce faisant on crée bien un noyau de taille au plus $n-s$, ce qui prouve la borne supérieure.

Pour la borne inférieure, on prouve l'inégalité suivante :

$$\left(\text{sgc}(G)(s - \text{sgc}(G)) + \binom{\text{sgc}(G)}{2} \right) (d-1) \geq n-s. \quad (4.1)$$

Soit S un sg -ensemble et C un noyau de S tels que $|C| = \text{sgc}(G)$. Le produit $\text{sgc}(G)(s - \text{sgc}(G))$ correspond au nombre de chemins entre les sommets de C et ceux de $S \setminus C$. Le nombre de chemins entre des sommets de C vaut $\binom{\text{sgc}(G)}{2}$. Chacun de ces chemins couvre au plus $d - 1$ sommets de $V(G) \setminus S$. Comme seuls les chemins entre C et S sont nécessaires pour couvrir $V(G)$, ces chemins doivent couvrir tous les sommets de $V(G) \setminus S$. Cela prouve l'inégalité. En la résolvant pour $\text{sgc}(G)$ on prouve la seconde borne inférieure.

Comme $\text{sg}(G) < |V(G)|$, on a $8(|V(G)| - \text{sg}(G))/(\text{diam}(G) - 1) > 0$, ce qui prouve la première borne inférieure. \square

On montre à présent que toutes les bornes du théorème 4.20 sont atteintes. La borne $\text{sgc}(G) \geq 1$ est notamment atteinte pour les arbres, d'après le lemme 4.19. Pour les autres bornes, on a :

Théorème 4.21 (G. , Iršič et Klavžar, 2018 [64]).

- (i) Pour tout $k \geq 2$, il existe un graphe G avec $\text{sgc}(G) = k$ et $\text{sg}(G) = k + 1$.
- (ii) Pour tout $n \geq 3$, il existe un graphe G d'ordre n avec $\text{sgc}(G) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ et $\text{sg}(G) = n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.
- (iii) Pour tout $k \geq 1$, $d \geq 2$, $s \geq 1$, il existe un graphe G tel que

$$\text{sgc}(G) = k = \left\lfloor \text{sg}(G) - \frac{1 + \sqrt{(2 \text{sg}(G) - 1)^2 - \frac{8 \lfloor \frac{n - \text{sg}(G)}{d-1} \rfloor}}}{2} \right\rfloor,$$

avec $|V(G)| = n$, $\text{sg}(G) = k + s$ et $\text{diam}(G) = d$.

Démonstration. (i) Soit $G_k = \widehat{S(K_k)}$, $k \geq 3$ (G_4 est représenté par la figure 4.5). D'après la proposition 4.18 on déduit $\text{sgc}(G_{k+1}) \geq k$ et $\text{sg}(G_{k+1}) = k + 1$ pour tout $k \geq 2$. Comme pour tout graphe G on a $\text{sgc}(G) \leq \text{sg}(G) - 1$, on a aussi $\text{sgc}(G_{k+1}) \leq k$, ce qui conclut ce cas.

(ii) Si n est un entier pair, alors soit G le graphe $K_{2, \dots, 2}$ d'ordre n . Si n est impair alors G est le graphe $K_{2, \dots, 2, 1}$ d'ordre n . On montre que $\text{sg}(G) = n - \lfloor n/3 \rfloor$ et $\text{sgc}(G) = \lfloor n/3 \rfloor$. Soit S un ensemble géodésique fort de G de taille minimum. Une géodésique entre deux sommets u et v de S couvre un autre sommet si et seulement si u et v ne sont pas adjacents, c'est-à-dire s'ils sont dans la même partie de G . Pour minimiser $|S|$, l'ensemble S doit contenir autant de paires non-adjacentes que possible, c'est-à-dire $\lfloor n/3 \rfloor$ telles paires. Ces paires couvrent $3 \lfloor n/3 \rfloor$ sommets, et les $(0, 1, \text{ ou } 2)$ sommets restant doivent être dans S pour être couverts. Donc

$$\text{sg}(G) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + (n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor) = n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

Pour montrer que $\text{sgc}(G) = \lfloor n/3 \rfloor$, considérons un ensemble géodésique minimum de G . D'après les arguments ci-dessus, chaque sommet $x \in V(G) \setminus S$ est couvert par une unique géodésique entre deux sommets non-adjacents u, v de S . Le noyau géodésique fort de S doit donc contenir soit u soit v . Sélectionner un sommet par paire de sommets non adjacents donne un noyau géodésique fort donc $\text{sgc}(G) = \lfloor n/3 \rfloor$.

(iii) Pour prouver ce résultat, nous construisons le graphe $H_{k,s,d}$ qui atteint l'égalité. Considérons d'abord le graphe obtenu par le joint entre les graphes K_k et K_s en subdivisant chaque arête $d - 1$ fois, à l'exception des arêtes internes à K_s . Soit $V_{k,s} = V(K_k) \cup V(K_s)$ et les sommets de ce graphe sont notés par

$$V_{k,s} \cup \{x_{u,v}^i : u, v \in V(K_k), u \neq v, i \in [d - 1]\} \cup \{y_{u,v}^i : u \in V(K_k), v \in V(K_s), i \in [d - 1]\}.$$

Considérons à présent l'ensemble des sommets qui sont au milieu des arêtes subdivisées :

$$X = \{x_{u,v}^i : u, v \in V(K_k), u \neq v, i \in \{\lfloor d/2 \rfloor, \lceil d/2 \rceil\}\} \cup \{y_{u,v}^i : u \in V(K_k), v \in V(K_s), i \in \{\lfloor d/2 \rfloor, \lceil d/2 \rceil\}\},$$

Pour obtenir le graphe $H_{k,s,d}$, nous rajoutons toutes les arêtes entre les sommets de X , l'ensemble X induisant donc une clique dans $H_{k,s,d}$. La Figure 4.7 donne une représentation du graphe $H_{3,2,4}$.

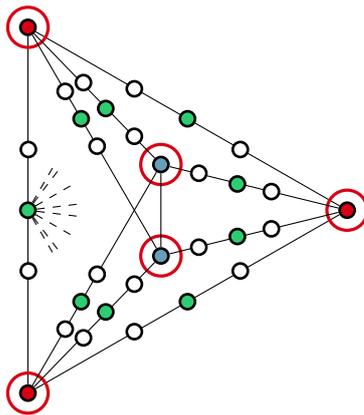


FIGURE 4.7 – Une représentation du graphe $H_{3,2,4}$, les sommets de $V(K_3)$ sont en rouge, ceux de $V(K_2)$ en bleu et ceux de X en vert. Les sommets de X forment une clique qui n'est pas représentée dans cette figure pour en conserver la clarté. Les sommets de l'ensemble géodésique fort sont entourés en rouge.

On a $|V(H_{k,s,d})| = k + s + (ks + \binom{k}{2})(d-1)$ et $\text{diam}(H_{k,s,d}) = d$. Nous allons à présent montrer que $\text{sg}(H_{k,s,d}) = k + s$ et que $\text{sgc}(H_{k,s,d}) = k$. Notons que cela implique que le graphe $H_{k,s,d}$ atteint l'égalité dans (4.1) et aussi dans l'équation

$$k = \left\lceil \text{sg}(G) - \frac{1 + \sqrt{(2 \text{sg}(G) - 1)^2 - \frac{8[|V(G)| - \text{sg}(G)]}{\text{diam}(G) - 1}}}{2} \right\rceil.$$

Pour montrer cela, considérons les ensembles de sommets qui sont plus proches d'un sommet v de $V_{k,s}$ que de tout autre sommet de $V_{k,s}$:

$$M_v = \{v\} \cup \{x : x \in V(H_{k,s,d}) \setminus X, d(v, x) < d(v', x) \text{ pour tout } v' \in V_{k,s} \setminus \{v\}\}.$$

Comme X forme une clique, si aucun des sommets de M_v n'est dans l'ensemble géodésique fort alors aucune géodésique ne couvre v . De plus, si v n'est pas dans un ensemble géodésique fort alors pour toute arête subdivisée partant de v , au moins un sommet de M_v doit appartenir à l'ensemble géodésique fort. Notons que s'il n'y a qu'une arête de ce type alors v est simplicial. Ainsi chaque ensemble géodésique minimum doit contenir les sommets $V_{k,s}$. Comme cet ensemble est bien un ensemble géodésique fort, on a $\text{sg}(H_{k,s,d}) = k + s$ et $V_{k,s}$ est l'unique sg-ensemble.

Supposons que deux sommets u et v de K_k ne soient pas dans le noyau de $H_{k,s,d}$. Alors, les sommets de l'arête subdivisée entre u et v ne sont couverts par aucune géodésique issue d'un sommet du noyau. Ainsi, au moins, $k-1$ sommets de K_k sont dans le noyau de $H_{k,s,d}$. De plus, s'il y a exactement $k-1$ sommets dans le noyau, alors un sommet u de K_k et un sommet v de K_s ne sont pas dans le noyau et aucune géodésique issue d'un sommet du noyau ne peut couvrir les sommets de leur arête subdivisée. On a donc bien $\text{sgc}(H_{k,s,d}) = k$. \square

Si un graphe G atteint l'égalité $\text{sgc}(G) = \text{sg}(G) - 1$, alors toutes les $\binom{\text{sg}(G)}{2}$ géodésiques doivent couvrir au moins un sommet qui leur est exclusif. Un tel graphe a donc au moins $\text{sg}(G) + \binom{\text{sg}(G)}{2}$ sommets. Comme pour les graphes G_{k+1} de la preuve du théorème 4.21(i) on a $|V(G_{k+1})| = k + 1 + \binom{k+1}{2}$, ces graphes sont les plus petits exemples de cette situation.

Remarquons que si S et S' sont des ensembles géodésiques forts avec $S' \subseteq S$, alors $\text{sgc}(S') \geq \text{sgc}(S)$. En effet toutes les paires de sommets inutiles dans S' le sont aussi dans S . On pourrait intuitivement penser que si l'on a deux ensembles géodésiques forts d'un même graphe S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$ alors $\text{sgc}(S_1) \geq \text{sgc}(S_2)$. Ce n'est toutefois pas le cas comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.22. Considérons le graphe complet biparti $K_{7,11}$ dont les sommets sont $\{x_1, \dots, x_{11}\} \cup \{y_1, \dots, y_7\}$. Les ensembles $S = \{x_1, \dots, x_7\}$ et $T = \{x_1, \dots, x_5\} \cup \{y_1, \dots, y_3\}$ sont des ensembles géodésiques forts de $K_{7,11}$. L'ensemble S est l'unique ensemble géodésique de taille minimum de ce graphe. De plus $\text{sgc}(S) = 2$ (avec par exemple $\{x_1, x_2\}$ comme noyau) et $\text{sgc}(T) = 4$ (avec par exemple $\{x_1, x_2, x_3, y_1\}$ comme noyau).

Comme nous allons le voir dans la partie suivante, le noyau géodésique fort est très utile dans l'étude du nombre géodésique fort du produit cartésien de graphes.

5 Nombre géodésique fort et produit cartésien

De nombreuses classes de graphes, telles que les grilles et les hypercubes, peuvent s'exprimer comme le produit cartésien d'autres graphes. De plus, il est aisé de connaître les plus courts chemins entre deux sommets d'un produit cartésien à l'aide des plus courts chemins entre les sommets des graphes de départ. En effet, une des caractéristiques qui rend l'étude du produit cartésien particulièrement intéressante est que les intervalles se comportent particulièrement bien relativement au produit cartésien, comme l'exprime le résultat suivant.

Proposition 4.23 (Folklore). *Soit G et H deux graphes, u, v deux sommets de G , et u', v' deux sommets de H . On a*

$$I_{G \square H}[(u, u'), (v, v')] = I_G[u, v] \times I_H[u', v'].$$

Le nombre géodésique du produit cartésien a été étudié par Jiang, Pelayo et Pritikin dans un article qui n'a jamais été publié [87] et par Brešar *et al.* en 2008 [26].

Les bornes suivantes ont été montrées par Jiang *et al.* :

Théorème 4.24 (Jiang, Pelayo et Pritikin, 2004 [87]). *Soit G et H deux graphes avec $g(G) \geq g(H)$,*

on a :

$$g(G) \leq g(G \square H) \leq (g(G) - 1)g(H).$$

Démonstration. Pour la première inégalité, remarquons que si S est un ensemble géodésique de $G \square H$ alors la projection de S sur G , notée S_G , est aussi un ensemble géodésique. En effet, si un sommet (u, v) de $G \square H$ est couvert par une géodésique entre les sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de S alors u est couvert par une géodésique entre les sommets x_1 et x_2 de S_G . Donc on a bien $g(G) \leq g(G \square H)$.

Pour la seconde inégalité, considérons $S_G = \{x_1, x_2, \dots, x_{s_1}\}$ et $S_H = \{y_1, y_2, \dots, y_{s_2}\}$ des g -ensembles de G et de H , avec $s_1 = g(G)$ et $s_2 = g(H)$. Soit $S_i = \{(x, y_i) | x \in S_G \setminus \{x_i\}\}$ pour $1 \leq i \leq s_2$ des sous-ensembles de sommets de $G \square H$ et soit $S = \bigcup_{i \leq s_2} S_i$. On a $|S| = (g(G) - 1)g(H)$. Montrons à présent que c'est un ensemble géodésique de $G \square H$.

Soit (u, v) un sommet de $G \square H$. Il existe x_i, x_j des sommets de S_G tels que u est sur une géodésique entre x_i et x_j dans G . De la même façon, il existe $y_{i'}, y_{j'}$ des sommets de S_H tels que v est sur une géodésique entre $y_{i'}$ et $y_{j'}$ dans H . Si $i \neq i'$ et $j \neq j'$ alors $(x_i, y_{i'})$ et $(x_j, y_{j'})$ sont des sommets de S et (u, v) est sur une géodésique entre ces deux sommets d'après la proposition 4.23, sinon $(x_i, y_{j'})$ et $(x_j, y_{i'})$ sont des sommets de S et (u, v) est aussi sur une géodésique entre ces deux sommets. Donc les géodésiques entre les sommets de S couvrent bien tous les sommets de $G \square H$ et S est un ensemble géodésique de $G \square H$. \square

L'étude du nombre géodésique fort du produit cartésien est bien plus délicate. Comme nous l'avons vu, le nombre géodésique de toute grille est 2. Cependant, le nombre géodésique fort des grilles n'a pas été déterminé dans le cas général. Klavžar et Manuel ont déterminé le nombre géodésique fort de grilles dont l'un des côtés est bien plus grand que l'autre [92]. Quant à l'étude du nombre géodésique fort du produit cartésien dans le cas général, c'est l'objet d'un article de 2018 d'Iršič et Klavžar [85]. Les auteurs ont notamment déterminé une borne supérieure et émis une conjecture concernant la borne inférieure. Ces bornes sont l'objet d'étude principal de cette partie.

5.1 Borne inférieure

L'un des objectifs d'Iršič et Klavžar [85] était de donner une borne sur le nombre géodésique fort du produit cartésien de deux graphes en fonction du nombre géodésique fort des graphes de départ. Si cet objectif a été rempli pour la borne supérieure, comme nous le verrons ultérieurement, une borne inférieure satisfaisante n'a pas pu être trouvée. Il s'agit d'un constat étonnant car la preuve de la borne inférieure pour le nombre géodésique est très naturelle et on pourrait s'attendre à ce que le même type de preuve par projection s'applique pour le nombre géodésique fort. Ce n'est cependant pas le cas. En effet, si S est un ensemble géodésique fort d'un produit

cartésien $G \square H$, avec (u, v_1) et (u, v_2) comme éléments de S , alors, si on projette S sur G , ces deux sommets de S sont tous deux projetés sur u . Toutefois il n'est pas possible de projeter toutes les géodésiques issues de (u, v_1) et (u, v_2) . En effet, on ne peut fixer qu'une géodésique pour chaque paire de sommets et ici deux géodésiques seraient créées entre u et chaque autre sommet de l'ensemble géodésique fort projeté.

De par l'augmentation en complexité et en nombre de sommets due au produit cartésien, il reste assez naturel de supposer que le nombre géodésique fort du produit cartésien de deux graphes est au moins le maximum du nombre géodésique fort des graphes de départ. Ainsi, pour deux graphes G et H , si $\text{sg}(G \square H) \geq \max\{\text{sg}(G), \text{sg}(H)\}$, alors on dit que G et H satisfont la *propriété CPC* (croissance par produit cartésien).

Iršič et Klavžar ont conjecturé que toute paire de graphes (G, K_2) satisfaisait la propriété CPC :

Conjecture 4.25 (Iršič et Klavžar, 2018 [85]). *Soit G un graphe avec $|V(G)| \geq 2$, on a $\text{sg}(G \square K_2) \geq \text{sg}(G)$.*

Ils ont montré que cette conjecture est vérifiée pour les graphes G tels que $|V(G)| \leq 7$ et, pour ces graphes, ont exposé les graphes pour lesquels la borne est atteinte.

Au cours de nos travaux nous avons étudié certaines classes de graphes satisfaisant la propriété de croissance et avons montré que, contrairement au nombre géodésique, toute paire de graphes ne satisfaisait pas cette propriété, ce qui implique que la conjecture 4.25 est fausse.

Des graphes satisfaisant la propriété CPC

Dans cette sous-partie, nous étudions des graphes qui satisfont la propriété CPC. Commençons, pour ce faire, par nous pencher sur les projections d'ensembles géodésiques forts.

Lemme 4.26. *Si G et H sont des graphes et S est un ensemble géodésique fort de $G \square H$, alors $p_G(\tilde{I}(S))$ couvre tous les sommets de G et $p_G(S)$ est un ensemble géodésique de G .*

Démonstration. Soit $S_G = p_G(S)$ et $\tilde{I}(S_G) = p_G(\tilde{I}(S))$. Pour tout $(u, v) \in V(G \square H)$, il existe une géodésique Q de $\tilde{I}(S)$ qui couvre (u, v) . Donc la projection $p_G(Q)$ de Q sur G couvre u et elle est de plus dans $\tilde{I}(S_G)$. Ainsi, pour tout sommet u de G il existe une géodésique de $\tilde{I}(S_G)$ qui le couvre. Comme $\tilde{I}(S_G)$ connecte des sommets de S_G , on conclut que S_G est un ensemble géodésique de G . \square

Un graphe est appelé *géodésique* s'il existe un unique plus court chemin entre toute paire de sommets du graphe. Comme observé par Manuel *et al.* [95], on a $\text{sg}(G) = g(G)$ pour tout graphe G géodésique. Nous appelons *graphes géodésiques généralisés* les graphes qui vérifient la propriété $\text{sg}(G) = g(G)$. Considérons le joint G entre une clique K d'ordre $m \geq 2$ et un ensemble indépendant I de taille $n \geq 2$. Si $m \leq \binom{n}{2}$, alors $g(G) = \text{sg}(G) = n$. Il existe donc des graphes géodésiques généralisés qui ne sont pas géodésiques.

Proposition 4.27. *Si G est un graphe géodésique généralisé, alors $\text{sg}(G \square H) \geq \text{sg}(G)$ est vrai pour tout graphe H .*

Démonstration. Soit S un sg -ensemble de $G \square H$ et $S_G = p_G(S)$. Par le lemme 4.26, S_G est un ensemble géodésique de G , donc $|S_G| \geq g(G)$. Comme G est un graphe géodésique généralisé, $g(G) = \text{sg}(G)$. De plus, comme S_G est la projection de S sur G , on a aussi que $|S_G| \leq |S|$. En combinant ces inégalités on obtient le résultat. \square

Corollaire 4.28. *Soit G et H deux graphes géodésiques généralisés, G et H satisfont la propriété CPC.*

Notons que le corollaire 4.28 confirme en particulier la conjecture 4.25 pour le prisme de graphes géodésiques généralisés.

Dans le cas d'égalité de la proposition 4.27 nous pouvons donner plus de détails sur la structure du sg -ensemble correspondant.

Proposition 4.29. *Soit G un graphe géodésique généralisé et H un graphe tel que $\text{sg}(G \square H) = \text{sg}(G)$. Si S est un sg -ensemble de $G \square H$, alors $|p_G(S)| = |S|$ et $p_G(S)$ est un sg -ensemble de G .*

Démonstration. D'après le lemme 4.26, $p_G(S)$ est un ensemble géodésique de G donc $|p_G(S)| \geq \text{sg}(G) = \text{sg}(G) = |S|$ ($\text{sg}(G \square H) \geq \text{sg}(G)$ par la proposition 4.27). Comme $p_G(S)$ est la projection de S sur G on a l'égalité $|p_G(S)| = |S|$. Soit $\tilde{I}(S)$ l'ensemble des chemins correspondant au sg-ensemble S et soit \tilde{I}_G la projection de cet ensemble sur G : $\tilde{I}_G = p_G(\tilde{I}(S))$. Comme $|p_G(S)| = |S|$, la projection est une bijection et entre deux sommets de $p_G(S)$ il existe un unique chemin dans \tilde{I}_G . En utilisant le lemme 4.26 à nouveau on déduit que \tilde{I}_G couvre tous les sommets de G donc $p_G(S)$ est un ensemble géodésique fort de G et comme $|p_G(S)| = \text{sg}(G)$ c'est un sg-ensemble de G . \square

La proposition 4.29 peut à son tour être utilisée pour trouver des cas dans lesquels la borne ne peut pas être atteinte. Pour avoir un résultat de cette sorte, on introduit les concepts suivants. Un sous-graphe H d'un graphe G est *convexe* si toute paire (u, v) de sommets de H a tous ses plus courts chemins $u - v$ de G entièrement inscrits dans H . Si un graphe G admet une partition de ses sommets en p parties non vides V_1, \dots, V_p , telle que chaque partie induit un sous-graphe convexe, on dit que G admet une p -partition convexe (voir [8]). Le problème consistant à savoir si un graphe admet une telle partition est NP-complet dans le cas général mais polynomial pour les graphes bipartis [69].

Théorème 4.30 (G. , Iršič et Klavžar, 2018 [64]). *Si G est un graphe géodésique généralisé avec $\text{sgc}(G) > \frac{\text{sg}(G)}{2}$ et H admet une 2-partition convexe, alors $\text{sg}(G \square H) > \text{sg}(G)$.*

Démonstration. On effectue une preuve par l'absurde et on suppose que $\text{sg}(G \square H) = \text{sg}(G)$. Soit S un sg-ensemble de $G \square H$ et $S_G = p_G(S)$. Par la proposition 4.29, S_G est un sg-ensemble de G . Soit $\tilde{I}(S)$ un ensemble de géodésiques entre les sommets de S couvrant $G \square H$ et soit $\tilde{I}(S_G) = p_G(\tilde{I}(S))$.

Soit (H_1, H_2) une 2-partition convexe de H . On partitionne S en deux ensembles S_1 et S_2 tels que $S_1 = \{(u, v) \in S : v \in H_1\}$ et $S_2 = \{(u, v) \in S : v \in H_2\}$. On peut supposer sans perdre en généralité que $|S_1| \geq |S_2|$. Donc $|S_2| \leq \text{sg}(G)/2$.

Dans $\tilde{I}(S_G)$, les chemins entre un sommet de $p_G(S_2)$ et un autre sommet de S_G ne sont pas suffisants pour couvrir G . En effet, si c'était le cas, $p_G(S_2)$ serait un noyau géodésique fort de S_G , or $|p_G(S_2)| \leq \text{sg}(G)/2$ et $\text{sgc}(G) > \text{sg}(G)/2$, ce n'est donc pas possible. Il existe donc des sommets $u, v \in p_G(S_1)$ tels que le chemin $u - v$ de $\tilde{I}(S_G)$ couvre un sommet w qui n'est pas couvert par les chemins dont l'une des extrémités est dans $p_G(S_2)$.

Soit t un sommet de H_2 . Le sommet (w, t) n'est couvert par aucun chemin de $\tilde{I}(S)$ qui a au moins une extrémité dans S_2 car autrement w serait couvert dans G par un chemin avec une extrémité dans $p_G(S_2)$. Comme H_1 est un sous-graphe convexe de H , il n'y a aucun plus court chemin entre des sommets de H_1 qui contienne t . Donc il n'y a aucun plus court chemin entre des sommets de S_1 qui contienne (w, t) et donc ce sommet n'est couvert par aucun chemin de $\tilde{I}(S)$. C'est une contradiction avec le fait que S soit un ensemble géodésique fort de $G \square H$ et que $\tilde{I}(S)$ soit un ensemble de plus courts chemins entre les sommets de S couvrant tout le graphe. \square

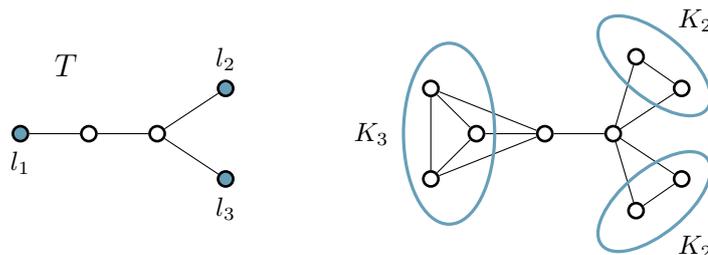
Notons que si H admet un sommet simplicial u , alors il admet aussi une 2-partition convexe où $\{u\}$ est l'une des parties. Le théorème 4.30 est donc vrai pour tous les graphes de ce type.

Dans le reste de cette partie on détermine une famille infinie de graphes pour lesquels l'égalité est atteinte dans la proposition 4.27.

Soit T un arbre d'ordre au moins 3 dont les feuilles sont $l_1, \dots, l_{\ell(T)}$ et soit $n_i, i \in [\ell(T)]$, des entiers positifs. L'arbre de cliques $K_{n_1, \dots, n_{\ell(T)}}^T$ de T , est le graphe obtenu à partir de T en remplaçant chaque feuille l_i de T par la clique K_{n_i} où chaque sommet de la clique est adjacent au sommet voisin de l_i dans T . Dans le cas où $T = K_2$, on pose $K_{n_1, n_2}^{K_2} = K_{n_1+n_2}$. Notons que $K_{1, \dots, 1}^T = T$. La figure 4.8 donne un exemple d'un arbre T et de son arbre de cliques $K_{3, 2, 2}^T$. Notons de plus que les arbres de cliques sont des graphes géodésiques.

Théorème 4.31 (G. , Iršič et Klavžar, 2018 [64]). *Soit T un arbre, $n_1, \dots, n_{\ell(T)}$ des entiers positifs et $s = \text{sg}(K_{n_1, \dots, n_{\ell(T)}}^T)$. Si G est un graphe connexe avec $|V(G)| \leq s/2$, alors*

$$\text{sg}(K_{n_1, \dots, n_{\ell(T)}}^T \square G) = s.$$


 FIGURE 4.8 – Un arbre T et l'arbre de cliques $K_{3,2,2}^T$.

Démonstration. Soit $K = K_{n_1, \dots, n_{\ell(T)}}^T$, $n = |V(G)|$ et $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Ainsi les couches- K du produit $K \square G$ seront dénotées par K^1, \dots, K^n .

Notons d'abord que l'ensemble des sommets simpliciaux de K est $S = \bigcup_{i \in [\ell(T)]} V(K_{n_i})$ et que S est aussi un ensemble géodésique fort. Donc $\text{sg}(K) = \sum_{i=1}^{\ell(T)} n_i$. On peut observer que $\text{sgc}(K) = 1$ et que, de par la structure d'arbre de K , chaque sommet simplicial est un noyau géodésique fort.

Fixons $2n$ sommets distincts de S : $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$, c'est possible car $n \leq s/2$. Soit $S' = S - \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ et soit

$$S_{K \square G} = \{(a_i, i), (b_i, i) : i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{(u, 1) : u \in S'\}.$$

Dans la suite on prouve que $S_{K \square G}$ est un ensemble géodésique fort de $K \square G$. Comme $|S_{K \square G}| = 2n + (s - 2n) = s$ et $\text{sg}(K \square G) \geq s$ (par la proposition 4.27), cela conclut la preuve.

On dénote le plus court chemin entre x, y dans une couche- H par $x \rightsquigarrow_H y$ pour $H \in \{K, G\}$. Fixons à présent les géodésiques suivantes, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} (a_i, i) &\rightsquigarrow_K (u, i) \rightsquigarrow_G (u, 1), \quad u \in S', \\ (a_i, i) &\rightsquigarrow_K (b_i, i), \\ (a_i, i) &\rightsquigarrow_K (a_j, i) \rightsquigarrow_G (a_j, j), \quad j < i, \\ (a_i, i) &\rightsquigarrow_K (b_j, i) \rightsquigarrow_G (b_j, j), \quad j > i, \\ (b_i, i) &\rightsquigarrow_K (a_j, i) \rightsquigarrow_G (a_j, j), \quad j > i, \\ (b_i, i) &\rightsquigarrow_K (b_j, i) \rightsquigarrow_G (b_j, j), \quad j < i. \end{aligned}$$

Remarquons dans un premier temps que pour chaque paire de sommets de $S_{K \square G}$ au plus une géodésique est sélectionnée. De plus, comme $\{a_i\}$ est un noyau géodésique fort de K , les géodésiques ayant a_i comme extrémité couvrent K . Ainsi les seuls sommets possiblement non couverts dans chaque couche- K^i sont sur les (a_i, a_j) -géodésiques pour tout $j > i$ et sur les (a_i, b_j) -géodésiques pour tout $j < i$ (on abandonne ici la notation (x, i) pour les sommets car on ne considère que la couche- K^i). On montre ensuite que les sommets de ces géodésiques sont bien couverts.

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i < j$. Considérons le sous-graphe K' de K induit par les sommets a_i, a_j, b_i et les géodésiques entre ces sommets. L'ensemble $\{b_i\}$ est un noyau géodésique fort de K' car c'est un noyau géodésique fort de K . La géodésique entre a_i et a_j est donc couverte par les géodésiques entre b_i et a_i et entre b_i et a_j . Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i > j$. Par un raisonnement similaire, les géodésiques d'extrémité a_i couvrent tous les sommets sauf éventuellement les sommets compris sur les géodésiques a_i, b_j . Ces géodésiques sont couvertes par les géodésiques d'extrémité b_i . Donc, chaque couche- K^i est complètement couverte par les géodésiques que l'on a fixées. \square

Cette propriété nous donne donc un ensemble infini de paires de graphes atteignant le cas d'égalité de la propriété CPC. Notons que la condition $|V(G)| \leq s/2$ est nécessaire. En effet le graphe $P_n \square K_2$ a un nombre géodésique fort de 3 et $|V(K_2)| > 2/2$.

Ce résultat général sur les arbres de cliques peut s'appliquer aux cas particuliers des arbres et des cliques :

Corollaire 4.32. (i) Si T est un arbre et G est un graphe connecté avec $2|V(G)| \leq \ell(T)$, alors $\text{sg}(T \square G) = \text{sg}(T) = \ell(T)$.

(ii) Si $k \geq 2$ et G est un graphe connexe avec $2|V(G)| \leq k$, alors $\text{sg}(K_k \square G) = \text{sg}(K_k) = k$.

Contre-exemple pour la conjecture 4.25

Démontrons à présent que, de façon plutôt inattendue, la conjecture 4.25 est en réalité fausse, et qu'il existe des paires de graphes ne satisfaisant pas la propriété CPC.

Considérons le graphe $G_{k,n}$, avec $k \geq 4$ et $n \geq 2$, construit de la façon suivante : on part du graphe K_k , on remplace toutes ses arêtes par n chemins disjoints de longueur 2 entre ses extrémités et on rajoute un sommet universel. La figure 4.9 est une représentation du graphe $G_{4,2}$.

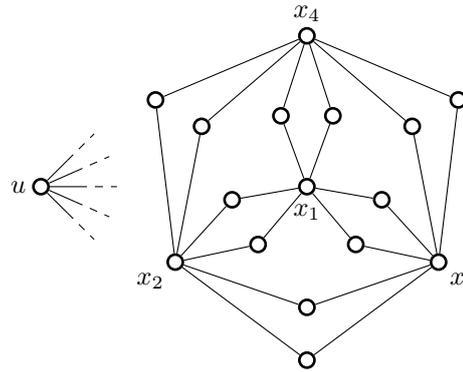


FIGURE 4.9 – Une représentation de $G_{4,2}$

Théorème 4.33 (G. , Iršič et Klavžar, 2018 [64]). Si $k \geq 4$ et $n \geq 2$, alors

$$\text{sg}(G_{k,n}) = \binom{k}{2}(n-1) + k \quad \text{et} \quad \text{sg}(G_{k,n} \square K_n) \leq kn + 1.$$

Démonstration. On dénote les sommets de $G_{k,n}$ de la façon suivante : x_1, \dots, x_k sont les sommets correspondant à la clique K_k initiale, $x_{ij}^{(1)}, \dots, x_{ij}^{(n)}$ sont les voisins de degré 2 de x_i et x_j et u est le sommet universel.

Soit S un ensemble géodésique fort de $G_{k,n}$. Un sommet $x_{ij}^{(l)}$ peut soit être couvert en étant dans S , soit en faisant partie de l'unique géodésique que l'on a fixée entre x_i et x_j . Ainsi pour tous entiers i, j , avec $1 \leq i < j \leq k$, au moins $n-1$ sommets parmi les $x_{ij}^{(1)}, \dots, x_{ij}^{(n)}$ doivent être dans S .

Notons que $S = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{x_{ij}^{(l)} : i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j, l \in \{1, \dots, n-1\}\}$ est un ensemble géodésique fort et que $|S| = k + \binom{k}{2}(n-1)$. Supposons qu'il existe un ensemble géodésique fort T de taille strictement plus petite alors, d'après ce qui précède, au moins un sommet x_i n'appartient pas à T . On peut supposer sans perdre en généralité que $x_1 \notin T$. Comme les sommets $x_{1,j}^{(l)}$ doivent être couverts et que toutes les géodésiques dont ils ne sont pas une extrémité passe par x_1 , ces sommets sont tous dans T . De plus, pour toute paire de sommets x_i, x_j avec $2 \leq i, j \leq k$, $n-1$ sommets $x_{ij}^{(l)}$ sont aussi dans T , on a donc $|T| \geq \binom{k}{2}(n-1) + (k-1)$. Cependant, sélectionner $n-1$ sommets dans chaque ensemble $\{x_{ij}^{(1)}, \dots, x_{ij}^{(n)}\}$ ainsi tous les sommets $x_{1,j}^{(l)}$ ne permet pas de former pas un ensemble géodésique fort, en particulier les sommets $x_{ij}^{(l)}$ qui ne sont pas dans T ne sont pas couverts. Ainsi, $|T| > \binom{k}{2}(n-1) + (k-1)$ et $|T| \geq |S|$. On a donc bien $\text{sg}(G_{k,n}) = |S|$.

Considérons à présent le produit cartésien $G_{k,n} \square K_n$. On note $V(K_n) = \{y_1, \dots, y_n\}$ et

$$S = \{(u, y_1)\} \cup \{(x_i, y_j) : i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

On fixe les géodésiques de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (x_i, y_j) &\sim (x_{ii'}^{(j')}, y_j) \sim (x_{i'}, y_j) \sim (x_{i'}, y_{j'}); & i, i' \in \{1, \dots, k\}, i < i', j, j' \in \{1, \dots, n\}, j \neq j', \\ (x_i, y_j) &\sim (x_{ii'}^{(j)}, y_j) \sim (x_{i'}, y_j); & i, i' \in \{1, \dots, k\}, i < i', j \in \{1, \dots, n\}, \\ (u, y_1) &\sim (u, y_j) \sim (x_1, y_j); & j \in \{2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

pour voir que S est un ensemble géodésique fort de $G_{k,n} \square K_n$. On conclut donc que $\text{sg}(G_{k,n} \square K_n) \leq |S| = 1 + kn$. \square

On déduit du théorème 4.33 que pour tout $k \geq 4$ et tout $n \geq 2$,

$$\text{sg}(G_{k,n}) - \text{sg}(G_{k,n} \square K_n) \geq \frac{k(n-1)(k-3) - 2}{2}.$$

Donc en augmentant k ou n , la différence entre $\text{sg}(G_{k,n})$ et $\text{sg}(G_{k,n} \square K_n)$ devient arbitrairement grande. Cela réfute donc la conjecture 4.25.

Tous les graphes $G_{k,n}$ du théorème 4.33 sont de diamètre 2. Pour obtenir des contre-exemples à la conjecture 4.25 de diamètre arbitrairement grand, on peut considérer la construction suivante. Soit H le graphe obtenu à partir du graphe complet K_k où chaque arête est remplacée par n chemins de taille $2p$ où $p \geq 1$. On appelle les sommets au milieu de ces chemins dans H des *sommets centraux* et les sommets de H correspondant aux sommets de la clique K_k les *sommets originaux*. Soit H' le graphe obtenu à partir d'une étoile $K_{1,k}$ en remplaçant toutes les arêtes par des chemins de longueur $p-1$. Enfin, connectons chaque feuille de H' à un sommet originel de H et connectons le sommet de degré k de H' à chaque sommet central de H . Le graphe construit a un diamètre de $2p$ et par des arguments similaires à la preuve du théorème 4.33, bien que plus techniques, il est possible de montrer que le produit cartésien de ce graphe avec K_n est aussi un contre-exemple.

5.2 Borne supérieure

Intéressons-nous à présent à la borne supérieure sur le nombre géodésique du produit cartésien de graphes. Iršič et Klavžar ont donné la borne supérieure suivante :

Théorème 4.34 (Iršič et Klavžar, 2018 [85]). *Soit G et H deux graphes, on a*

$$\text{sg}(G \square H) \leq \min\{\text{sg}(H)|V(G)| - \text{sg}(G) + 1, \text{sg}(G)|V(H)| - \text{sg}(H) + 1\}.$$

Nous avons par la suite amélioré cette borne en utilisant le noyau géodésique fort :

Théorème 4.35 (G., Iršič et Klavžar, 2018 [64]). *Soit G et H deux graphes, on a*

$$\text{sg}(G \square H) \leq \min\{\text{sgc}(H)(|V(G)| - 1) + \text{sg}(H), \text{sgc}(G)(|V(H)| - 1) + \text{sg}(G)\}.$$

Démonstration. Par commutativité du produit cartésien, il suffit de prouver que $\text{sg}(G \square H) \leq \text{sgc}(H)(|V(G)| - 1) + \text{sg}(H)$.

Soit S_H un ensemble géodésique fort de H tel que $\text{sgc}(S_H) = \text{sgc}(H)$, soit C_H un noyau géodésique fort de S_H et soit $\tilde{I}(S_H)$ des géodésiques fixées couvrant H . On pose $\ell = |S_H| = \text{sg}(H)$, $m = |C_H| = \text{sgc}(H)$ et $S_H = \{h_0, h_1, \dots, h_{\ell-1}\}$, avec $C_H = \{h_0, h_1, \dots, h_{m-1}\}$. On appelle $Q_{i,j}$ la (h_i, h_j) -géodésique de $\tilde{I}(S_H)$ pour tout i, j dans $\{0, \dots, \ell-1\}$. On fixe le sommet $g_0 \in V(G)$ et des plus courts chemins P_g dans G entre g et g_0 pour tout $g \in V(G) - \{g_0\}$.

On définit $T = ((V(G) \setminus \{g_0\}) \times C_H) \cup (\{g_0\} \times S_H)$. On a $|T| = \text{sgc}(H)(|V(G)| - 1) + \text{sg}(H)$. On peut constater que T est un ensemble géodésique fort pour $G \square H$. Pour prouver cela, on fixe dans un premier temps des géodésiques entre les sommets de T dans les couches- H de la même façon qu'elles sont fixées dans $\tilde{I}(S_H)$. Les seuls sommets potentiellement non couverts sont ceux dans les couches gH , pour $g \in V(G) - \{g_0\}$, qui sont sur les chemins ${}^gQ_{i,j}$ avec $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ et $j \in \{m, \dots, \ell-1\}$. Comme les sommets $\{h_m, \dots, h_{\ell-1}\}$ ne sont pas dans C_H , les chemins $Q_{i,j}$ avec $i, j \in \{m, \dots, \ell-1\}$ ne sont pas nécessaires pour couvrir H et les chemins correspondants ${}^gQ_{i,j}$ ne sont pas nécessaires pour couvrir la couche gH . Seuls les sommets sur les chemins ${}^gQ_{i,j}$ pour $i \in \{0, \dots, m-1\}$ et $j \in \{m, \dots, \ell-1\}$ doivent encore être couverts.

Pour les couvrir on fixe les chemins ${}^gQ_{i,j}$ unis avec $P_g^{h_j}$ comme géodésiques pour les paires $(g, h_i), (g_0, h_j)$ pour tout $g \in V(G) \setminus \{g_0\}, i \in \{0, \dots, m-1\}$ et $j \in \{m, \dots, \ell-1\}$. De cette façon, tous les sommets de $G \square H$ sont couverts, donc $\text{sg}(G \square H) \leq |T|$. \square

Assez souvent, $\text{sgc}(G)$ est bien plus petit que $\text{sg}(G)$, comme on l'a déjà noté c'est le cas pour les arbres et les cliques. Dans de tels cas le théorème 4.35 donne une bien meilleure borne que le théorème 4.34. Considérons par exemple $K_n \square K_n$, $n \geq 1$. Dans ce cas le théorème 4.34 donne une borne de $\text{sg}(K_n \square K_n) \leq n^2 - n + 1$, tandis que le théorème 4.35 donne $\text{sg}(K_n \square K_n) \leq 2n - 1$, ce qui est la valeur exacte comme l'ont déjà montré Iršič et Klavžar [85]. Mais même si $\text{sgc}(G)$ est grand, le théorème 4.35 est une meilleure borne. En effet, comme $\text{sgc}(G) \leq \text{sg}(G) - 1$, le théorème 4.35 implique le résultat suivant qui est plus fort que la borne précédente :

Corollaire 4.36. *Pour tous graphes G et H , on a :*

$$\text{sg}(G \square H) \leq \min\{\text{sg}(H)|V(G)| - |V(G)| + 1, \text{sg}(G)|V(H)| - |V(H)| + 1\}.$$

La borne du théorème 4.35 est aussi atteinte pour toutes les grilles dont l'un des côtés est de taille 3.

Proposition 4.37. *Si $n \geq 3$, alors $\text{sg}(P_n \square P_3) = 4$.*

Démonstration. Le théorème 4.35 donne $\text{sg}(P_n \square P_3) \leq 4$. Pour prouver l'autre inégalité, supposons au contraire que $\text{sg}(P_n \square P_3) = 3$ (il est aisé de vérifier que $\text{sg}(P_n \square P_3) > 2$, la seule configuration envisageable avec deux sommets étant celle où les sommets sélectionnés sont à des coins opposés de la grille). Soit $S = \{x, y, z\}$ un sg -ensemble de $P_n \square P_3$. Notons que S doit contenir un sommet dans chaque couche- P_3 des feuilles de P_n . Soit x, y ces deux sommets, on a $d(x, y) \in \{n - 1, n, n + 1\}$. si $d(x, y) = n + 1$, alors $d(x, z) + d(z, y) = n + 1$, si $d(x, y) = n$, alors $d(x, z) + d(z, y) \leq n + 2$ et, si $d(x, y) = n - 1$, alors $d(x, z) + d(z, y) \leq n + 3$. Dans tous ces cas, l'union d'une géodésique entre x et y , d'une géodésique entre x et z et d'une géodésique entre y et z couvre au plus $2n + 5$ sommets, où x, y et z sont chacun comptés deux fois, on couvre donc $2n + 2 < 3n$ sommets. \square

Quelques réserves à l'égard de cette borne peuvent toutefois être émises. La méthode que l'on a appliquée dans la preuve du théorème 4.35 peut s'appliquer à n'importe quel noyau géodésique fort et à n'importe quel ensemble géodésique fort, pas seulement à ceux de taille minimum. En particulier, l'ensemble des sommets d'un graphe forme aussi un ensemble géodésique fort dont le noyau minimum est de taille 1, cela entraîne avec la méthode de la preuve que $\text{sg}(G \square H) \leq (1 \times |V(H)| - 1) + |V(G)|$. Ce qui revient à prendre comme ensemble géodésique de $G \square H$ $\{(u, y) | y \in V(H)\} \cup \{(x, v) | x \in V(G)\}$ avec u et v respectivement des sommets de G et H . Cette borne est parfois meilleure que celle du théorème 4.35 notamment quand G et H ont des ordres comparables. Cette borne peut encore être améliorée en prenant le plus petit ensemble géodésique fort de G dont le noyau est de taille 1. On pourrait aussi s'intéresser à une généralisation de cette idée et chercher les plus petits ensembles géodésiques forts de G dont le noyau est k , pour $k \in \{1, \dots, \text{sgc}(G)\}$. La méthode décrite dans la preuve du théorème 4.35 serait minimum pour l'un de ces ensembles.

Application du concept de noyau au nombre géodésique

De la même façon qu'on a introduit le noyau géodésique fort, on peut aussi introduire le *noyau géodésique*, définis de la façon suivante.

Définition 4.38. Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un ensemble géodésique de G . Soit $I(u, v)$ l'ensemble des sommets couvert par une géodésique entre u et v . Un sous-ensemble C de S est un noyau géodésique de S si $\bigcup_{u, v \in C \times S} I(u, v) = V$.

Comme précédemment on note $\text{gc}(S)$ la taille du plus petit noyau géodésique d'un ensemble géodésique S et $\text{gc}(G)$ le minimum de $\text{gc}(S)$ sur les ensembles géodésiques de taille minimum.

Avec ces définitions on peut donner la borne suivante sur le nombre géodésique du produit cartésien de graphes :

Théorème 4.39 (Gledel). *Soit G et H deux graphes, on a*

$$\text{g}(G \square H) \leq \text{g}(G) \text{g}(H) - (\text{g}(G) - \text{gc}(G))(\text{g}(H) - \text{gc}(H)).$$

Démonstration. Soit S_G et S_H des ensembles géodésiques minimaux de G et H dont le noyau est de taille respectivement $\text{gc}(G)$ et $\text{gc}(H)$ et soit C_G et C_H des noyaux minimaux de S_G et S_H .

Soit $S = S_G \times S_H \setminus ((S_G \setminus C_G) \times (S_H \setminus C_H))$, on observe que $|S| = g(G)g(H) - (g(G) - \text{gc}(G))(g(H) - \text{gc}(H))$.

Prouvons à présent que S est un ensemble géodésique de $G \square H$. Soit (u, v) un sommet de $G \square H$. Comme S_G est un ensemble géodésique de G et que C_G est un noyau géodésique de S_G , il existe $c \in C_G$ et $s \in S_G$ tels que u est sur une géodésique entre c et s . De la même façon, il existe $c' \in C_H$ et $s' \in S_H$ tels que v est situé sur une géodésique entre c' et s' . On remarque que (c, c') est un élément de $C_G \times C_H$, donc c'est un sommet de S . Similairement, (s, s') est un élément de $S_G \times S_H$ et donc un élément de S . Comme $I[(c, c'), (s, s')] = I[c, s] \times I[c', s']$, le sommet (u, v) est couvert par une géodésique entre (c, c') et (s, s') . Tout sommet de $G \square H$ est donc bien couvert par une géodésique entre des éléments de S et S est un ensemble géodésique de $G \square H$. Donc $g(G \square H) \leq |S| = g(G)g(H) - (g(G) - \text{gc}(G))(g(H) - \text{gc}(H))$. \square

La meilleure borne existante sur le nombre géodésique du produit cartésien de graphes est $g(G \square H) \leq (g(G) - 1)g(H)$, avec $g(G) \geq g(H)$ [87], borne qui est notamment atteinte par une famille infinie de graphes. Notre borne n'est meilleure que lorsque $(g(G) - \text{gc}(G))(g(H) - \text{gc}(H)) \geq g(H)$, ce qui n'est pas toujours le cas. Cependant pour que notre borne soit meilleure pour le produit de G par lui-même il suffit que $\text{gc}(G) \leq g(G) - \sqrt{g(G)}$. Cette condition ne semble pas être une contrainte forte.

6 Hypercubes

Dans cette dernière partie, nous étudions le problème géodésique fort sur une classe de graphes qui sont à la fois bipartis et issus de produits cartésiens, les hypercubes. L'hypercube de dimension n , Q_n , peut être défini de deux façons équivalentes : on peut dans un premier temps définir les hypercubes comme des produits cartésiens itérés de K_2 , ce que nous avons fait dans le chapitre 1. L'hypergraphe Q_n peut aussi être défini comme le graphe d'ordre 2^n pour lequel on attribue à chaque sommet une étiquette de taille n distincte sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et où deux sommets sont voisins s'ils ne diffèrent que d'une lettre. On note 0^k la succession de k 0 et 1^k la succession de k 1, ce qui nous permettra de noter les sommets de Q_n .

On remarque que l'hypercube Q_n est de diamètre n et tous les sommets du graphe sont compris dans des géodésiques entre deux sommets à distance n (par exemple les sommets étiquetés par 0^n et 1^n) donc on a $g(Q_n) = 2$. Nous allons montrer que le nombre géodésique fort des hypercubes est bien plus grand que leur nombre géodésique.

Étudions dans un premier temps les cas où n est petit. On a $\text{sg}(Q_0) = 1$, $\text{sg}(Q_1) = 2$ et $\text{sg}(Q_2) = 3$. On peut prouver que $\text{sg}(Q_3) = 4$ et, en utilisant une étude exhaustive par ordinateur, on peut aussi montrer que $\text{sg}(Q_4) = 5$. Pour un exemple d'ensembles géodésiques de taille minimum pour Q_3 et Q_4 , voir la figure 4.10.

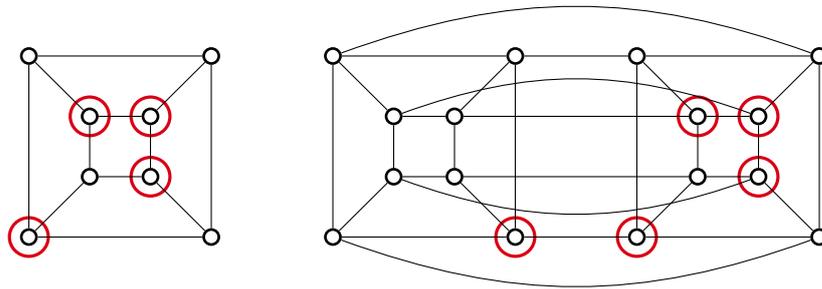


FIGURE 4.10 – Les hypercubes Q_3 et Q_4 ainsi que leurs ensembles géodésiques forts

Une borne inférieure sur le nombre géodésique fort des hypercubes peut être obtenue grâce au théorème 4.7 que l'on a vu précédemment.

Proposition 4.40. *Si $n \geq 2$, alors*

$$\text{sg}(Q_n) \geq \left\lceil \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n-1}} \right\rceil.$$

Démonstration. Comme le diamètre de Q_n est n , d'après le théorème 4.7 on a

$$\text{sg}(Q_n) \geq \left\lceil \frac{n-3 + \sqrt{(n-3)^2 + 2^{n+3}(n-1)}}{2(n-1)} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n-1}} \right\rceil,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Comme les hypercubes Q_n ont 2^n sommets, la borne inférieure que l'on obtient est de l'ordre de $\sqrt{|V(Q_n)|}$.

D'un autre côté, nous prouvons une borne supérieure non triviale qui affirme que cet ordre est suffisant pour former un ensemble géodésique fort.

Théorème 4.41 (G. et Iršič, 2018 [63]). *Si $n \geq 1$, alors*

$$\text{sg}(Q_n) \leq \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ est pair,} \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. On prouve d'abord le résultat intermédiaire : pour tout $n_0, n \geq n_0 \geq 1$, $\text{sg}(Q_n) \leq 2^{n-n_0} + 2^{n_0-1}$.

Soit n_0 un entier, $n \geq n_0 \geq 1$. L'hypercube Q_n consiste en $2 \cdot 2^{n-n_0}$ copies de l'hypercube Q_{n_0-1} . Ces copies sont étiquetées $Q_{n_0-1}^b$, où $b \in \{0, 1\}^{n-n_0+1}$, et les sommets du graphe Q_n sont de la forme bc , $b \in \{0, 1\}^{n-n_0+1}$, $c \in \{0, 1\}^{n_0-1}$.

Soit $P = \{\bar{b}00^{n_0-1} : \bar{b} \in \{0, 1\}^{n-n_0}\}$, $Q = \{1^{n-n_0}1c : c \in \{0, 1\}^{n_0-1}\} = V(Q_{n_0-1}^{1^{n-n_0+1}})$ et $S = P \cup Q$. Notons que $|S| = 2^{n-n_0} + 2^{n_0-1}$. On prouve ensuite que S est un ensemble géodésique fort de Q_n .

Pour toute paire de sommets $\bar{b}00^{n_0-1} \in P$ et $1^{n-n_0}1c \in Q$ on fixe la géodésique suivante (où \rightsquigarrow désigne un plus court chemin entre des sommets) :

$$\bar{b}00^{n_0-1} \rightsquigarrow \bar{b}0c \sim \bar{b}1c \rightsquigarrow 1^{n-n_0}1c.$$

Comme \bar{b} et c peuvent être n'importe quelle chaîne de 0 et de 1 de la bonne longueur, tous les sommets de l'hypercube Q_n sont couverts. Donc pour tout $n_0, n \geq n_0 \geq 1$,

$$\text{sg}(Q_n) \leq 2^{n-n_0} + 2^{n_0-1}.$$

Ainsi, $\text{sg}(Q_n) \leq \min\{2^{n-n_0} + 2^{n_0-1} : n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \geq 1\}$. Le minimum de cette fonction pour $n_0 \in \mathbb{R}$ est atteint en $n_0 = \frac{n+1}{2}$. Donc le minimum de la fonction à valeurs entières est en $\frac{n+1}{2}$ si n est impair et soit en $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ soit en $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ si n est pair. Si n est impair la valeur minimum est $2^{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}}$. Si n est pair, la valeur est la même pour $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, et vaut $\frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}}$. \square

Une autre façon de montrer ce résultat, et notamment le résultat intermédiaire, revient à utiliser le noyau. En effet, si on s'intéresse au graphe Q_{n_0+1} pour un certain n_0 , ce graphe peut aussi être vu comme $K_2 \square Q_{n_0}$. En prenant tous les sommets d'une des copies de Q_{n_0} et un seul sommet u_1 dans l'autre, on obtient un ensemble géodésique fort. De plus, $\{u_1\}$ est aussi un noyau géodésique fort pour cet ensemble géodésique fort. En suivant l'idée de la preuve du théorème 4.35 on obtient un ensemble géodésique fort pour $Q_{n_0+2} = K_2 \square Q_{n_0+1}$ en ne rajoutant que la copie de u_1, u_2 , à l'ensemble géodésique fort et $\{u_1, u_2\}$ est un noyau pour cet ensemble géodésique fort. Ainsi de suite, en ne copiant que les sommets des noyaux, on obtient un ensemble géodésique fort de taille $2^{n_0} + 2^{k-1}$ pour l'hypercube Q_{n_0+k} . La Figure 4.11 donne un exemple de cette procédure pour Q_{n_0+3} .

Avec cette vision de la preuve, on peut améliorer la borne en enlevant des sommets dans la première couche Q_{n_0} de telle sorte que u_1 reste un noyau.

Théorème 4.42 (G. et Iršič, 2018 [63]). *Si $n \geq 2$, alors*

$$\text{sg}(Q_n) \leq \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} - (\lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 2) (\lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 3), & n \text{ est pair,} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} - \frac{(n-3)(n-5)}{4}, & n \text{ est impair.} \end{cases}$$

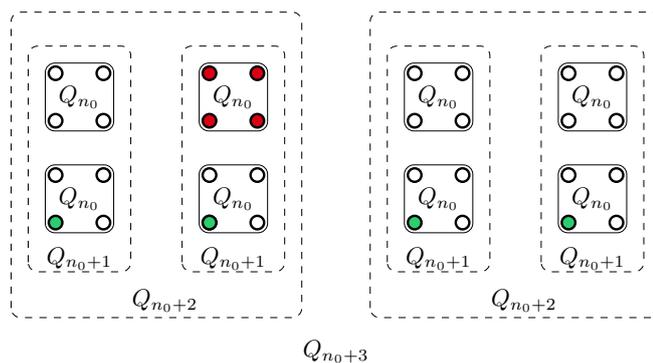


FIGURE 4.11 – Ensemble géodésique fort (en rouge) et noyau (en vert) de Q_{n_0+3} pour la preuve du théorème 4.41

Démonstration. En utilisant les notations de la preuve du théorème 4.41, l'étape principale est de prouver que pour tout $n_0, n \geq n_0 \geq 4$,

$$\text{sg}(Q_n) \leq 2^{n-n_0} + 2^{n_0-1} - (n_0 - 2)(n_0 - 3).$$

À partir de là, le résultat est obtenu en posant $n_0 = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ et la borne du théorème 4.41 est améliorée si $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \geq 4$, c'est-à-dire si $n \geq 6$.

Soit $v, u \in V(Q_{n_0-1}^{1^{n-n_0+1}})$ des sommets à distance $n_0 - 1$. Sans perte de généralité, on pose $v = 1^{n-n_0+1}0^{n_0-1}$ et $u = 1^n$. Il y a $n_0 - 1$ chemins intérieurement disjoints entre v et u , soit \mathcal{P} l'ensemble des sommets couverts par ces $n_0 - 1$ chemins. Soit x_1, \dots, x_{n_0-1} le voisinage de u sur ces chemins et y_1, \dots, y_{n_0-1} les autres voisins des x_i sur ces chemins. Soit $F = \mathcal{P} - \{u, v, x_1, \dots, x_{n_0-1}, y_1, \dots, y_{n_0-1}\}$.

Posons à présent $P = \{\bar{b}00^{n_0-1} : \bar{b} \in \{0, 1\}^{n-n_0}\}$, $Q = \{1^{n-n_0}1c : c \in \{0, 1\}^{n_0-1} - F\} = V(Q_{n_0-1}^{1^{n-n_0+1}}) - F$, et $S = P \cup Q$. On a $|S| = 2^{n-n_0} + 2^{n_0-1} - (n_0 - 2) - (n_0 - 4)(n_0 - 2) = 2^{n-n_0} + 2^{n_0-1} - (n_0 - 2)(n_0 - 3)$. On prouve ensuite que S est un ensemble géodésique fort de Q_n .

Pour toute paire de sommets $\bar{b}00^{n_0-1} \in P$ et $1^{n-n_0}1c \in Q$ on fixe les géodésiques suivantes (où \rightsquigarrow désigne un plus court chemin entre des sommets et ce plus court chemin suit \mathcal{P} si ses extrémités le permettent)

$$\bar{b}00^{n_0-1} \rightsquigarrow \bar{b}0c \sim \bar{b}1c \rightsquigarrow 1^{n-n_0}1c, \quad c \in Q - \{x_1, y_2, \dots, y_{n_0-1}\},$$

$$\bar{b}00^{n_0-1} \rightsquigarrow 1^{n-n_0}10^{n_0-1} \rightsquigarrow 1^{n-n_0}1c, \quad c \in \{x_1, y_2, \dots, y_{n_0-1}\}.$$

Comme les plus courts chemins dans \mathcal{P} sont couverts par les géodésiques ci dessus et que tous les autres sommets sont couverts, S est un ensemble géodésique fort. \square

Certaines des valeurs de ces théorèmes sont présentées dans le tableau 4.1. Notons qu'asymptotiquement le ratio entre la borne inférieure et la borne supérieure est de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (alors que le nombre de sommets est 2^n).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\text{sg}(Q_n) \geq$		3	3	4	4	6	7	9	12	16	21	28	37	51	69
$\text{sg}(Q_n) \leq$						10	14	18	26	36	52	76	108	162	226
$\text{sg}(Q_n) \leq$	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	64	96	128	192	256

TABLE 4.1 – Les bornes inférieures et supérieures de $\text{sg}(Q_n)$ données par la proposition 4.40, le théorème 4.42 et le théorème 4.41.

Trouver une formule explicite pour la valeur de $\text{sg}(Q_n)$ constituerait un résultat intéressant.

7 Conclusion et perspectives

Introduit récemment, le nombre géodésique fort est un paramètre à fort potentiel d'étude. Bien que très proche du nombre géodésique, son étude est bien plus compliquée de par le choix de géodésiques que l'on doit faire. Dans ce chapitre, nous nous sommes notamment intéressés aux graphes bipartis complets dont la solution est très simple pour le nombre géodésique mais dont l'étude est plus ardue pour le nombre géodésique fort. Nous avons caractérisé entièrement toutes les valeurs possibles du nombre géodésique fort pour ces graphes avec le théorème 4.16.

Nous avons aussi introduit le concept de noyau géodésique fort qui nous a permis d'améliorer la borne supérieure existante sur le nombre géodésique fort du produit cartésien de graphes. Toutefois il n'existe toujours pas de borne inférieure en fonction du nombre géodésique fort des graphes de départ. Nous avons en effet donné un contre-exemple à une conjecture concernant cette borne inférieure. Trouver une borne inférieure sur le produit cartésien de graphes pourrait être une piste de recherche intéressante. Les contre-exemples donnés dans cette partie s'appuient fortement sur le fait que l'on sélectionne le même ensemble de sommets dans chacune des copies, ce qui fait que le nombre géodésique obtenu est bien plus grand que celui de K_n . Ainsi, il semble que pour que le nombre géodésique fort du produit cartésien de deux graphes G et H soit inférieur au nombre géodésique fort de G , il doit être plus grand que le nombre géodésique fort de H . On peut se demander si c'est toujours le cas :

Question 4.43. *Soit G et H deux graphes, a-t-on $sg(G \square H) \geq \min\{sg(G), sg(H)\}$?*

Nous avons donné des bornes sur le nombre géodésique fort des hypercubes. Ces bornes sont toutes deux de l'ordre de la racine du nombre de sommets mais on pourrait chercher à obtenir un résultat exact étant donné que les hypercubes sont des graphes avec une structure très forte. De plus, la méthode que nous avons utilisée pour donner une borne inférieure sur le nombre géodésique fort des hypercubes pourrait aussi être appliquée à d'autres itérations de produits cartésiens, tels que les graphes de Hamming, produit cartésien de graphes complets.

Nous exposons aussi une application du noyau géodésique. Les concepts nouveaux de noyau géodésique et noyau géodésique fort restent à étudier, en tant que tels (avec des problèmes de complexité par exemple), ou dans ce qu'ils pourraient apporter aux paramètres dont ils sont tirés.

Un autre sujet d'étude important concerne la complexité du problème. Lorsqu'ils ont prouvé que ENSEMBLE GÉODÉSIQUE FORT MINIMUM était NP-complet, Manuel *et al.* ne se sont pas attardés sur le fait de savoir si ce problème est dans NP, et en effet un ensemble géodésique fort et les géodésiques choisies forment bien un certificat polynomial. Cependant on peut aussi se demander si l'ensemble géodésique fort de la taille requise seul suffirait comme certificat. Plus formellement, cela reviendrait à s'intéresser au problème de décision suivant :

ENSEMBLE GÉODÉSIQUE FORT

Instance : Un graphe G et un ensemble S de sommets de G

Question : Est-ce que S est un ensemble géodésique fort de G ?

Chapitre 5

Couverture identifiante

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à un problème de couverture où l'on souhaite, en plus de couvrir les éléments, pouvoir les identifier. Cela a du sens lorsque l'on considère des problèmes de surveillance où l'on ne veut pas seulement savoir s'il y a une erreur ou non (ce que fait la couverture) mais aussi savoir précisément où est l'erreur.

Pour répondre à cette problématique dans les graphes, une façon de faire est de considérer des codes identifiants. Un code identifiant est un ensemble C de sommets du graphe tel que tout sommet du graphe a un voisinage distinct dans C . Cette définition se généralise très bien à tout problème de couverture dans un hypergraphe.

Avec Aline Parreau, nous avons voulu apporter une composante géométrique à ce problème. Il semble naturel d'imaginer que des capteurs puissent détecter une erreur jusqu'à une certaine distance autour d'eux, comme pour le cas de détecteurs fumée par exemple. On peut modéliser ce problème par des points du plan représentant les zones susceptibles de provoquer une erreur et par des disques dont le centre représente l'emplacement des capteurs. Ainsi, nous avons introduit le problème d'identification de points dans le plan par des disques. Ce travail a fait l'objet d'une publication [66].

Dans la partie 1, nous donnons des définitions formelles et approfondissons le contexte de la suite de ce chapitre. Dans la partie 2, nous étudions le cas de configurations particulières de points, les points alignés et les grilles. Pour des points alignés, nous donnons le nombre exact de disques nécessaires si le rayon n'est pas fixé. Si les points sont sur une grille, nous donnons la valeur exacte pour les grilles de hauteur 2 et bornons la valeur pour les grilles de hauteur plus grande. Dans la partie 3, nous donnons des bornes inférieures et supérieures atteintes : nous prouvons qu'au moins $\Theta(\sqrt{n})$ disques et au plus $\lceil (n+1)/2 \rceil$ sont nécessaires (n étant le nombre de points). Si, de plus, il n'y a pas trois points alignés ni quatre points cocycliques, nous prouvons, à l'aide de la triangulation de Delaunay, que $2\lceil n/6 \rceil + 1$ disques sont suffisants. Enfin, dans la partie 4, nous discutons de la complexité du problème dans le cas où le rayon est fixé. Nous prouvons que le problème est NP-complet dans le cas général mais qu'il existe un algorithme linéaire pour le résoudre dans le cas où les points sont alignés.

1 Définition et contexte

1.1 Définition formelle

Définition 5.1. Soit \mathcal{P} un ensemble de points de \mathbb{R}^2 . Le disque de rayon $r \in \mathbb{R}$ et de centre $c \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 à distance euclidienne au plus r de c . Un point $P \in \mathcal{P}$ est *couvert* par un disque s'il appartient à ce disque. Deux points P et Q sont *séparés* par un disque D si exactement un de ces deux points est couvert par D . Un ensemble de disques \mathcal{D} *identifie* \mathcal{P} si tous les points de \mathcal{P} sont couverts et que toute paire de points de \mathcal{P} est séparée par un disque de \mathcal{D} .

On note $\gamma_D^{\text{id}}(\mathcal{P})$ le nombre minimum de disques nécessaire pour identifier \mathcal{P} . Soit $r \in \mathbb{R}$, on note $\gamma_{D,r}^{\text{id}}(\mathcal{P})$ le nombre minimum de disques de rayons r nécessaire pour identifier \mathcal{P} . Quand r est suffisamment grand comparé à la distance entre les points de \mathcal{P} , tout disque de rayon r sépare les mêmes points qu'un certain demi-plan. Ainsi, l'identification par des demi-plans est

un cas particulier de l'identification avec des disques de rayon fixé. On notera $\gamma_{D,\infty}^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ cette valeur. La Figure 5.1 donne un exemple d'ensemble de disques identifiant.

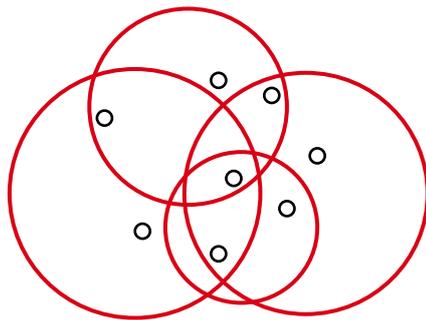


FIGURE 5.1 – Un ensemble de quatre disques identifiant huit points.

Remarque 5.2. Dans notre définition, on demande à ce que chaque point de \mathcal{P} soit couvert par au moins un disque. Ce choix pourrait être discuté. En effet, ce n'est pas le cas pour des notions voisines telles que les *familles séparatrices* ou les *tests couvrants*. Cette définition a été choisie pour rester cohérente avec notre motivation première. Dans un contexte de localisation, notre système de détection doit être capable de détecter s'il y a eu intrusion ou non, ce qui n'est possible que si tous les points sont couverts. C'est pour cette raison que dans les *codes identifiants* la condition de domination est présente. Cependant, si un ensemble de disques sépare toutes les paires de points de \mathcal{P} , il y a au plus un de ces points qui n'est pas couvert (sinon tous les points non couverts ne seraient pas séparés). Un seul disque suffit donc pour obtenir un ensemble identifiant. La différence entre les deux valeurs est donc au plus 1 et nos résultats peuvent aisément être adaptés aux ensembles uniquement séparateurs.

Pour tout rayon r et tous points P et Q de \mathbb{R}^2 , il y a toujours un disque de rayon r qui les sépare. Ainsi, $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ et $\gamma_{D,r}^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ sont toujours définis et sont toujours inférieurs à $\binom{|\mathcal{P}|}{2}$. En fait, il est connu en théorie des tests groupés que cette valeur peut être améliorée en $|\mathcal{P}|$. Pour ce qui est de la borne inférieure, considérons un ensemble \mathcal{D} de k disques identifiant \mathcal{P} . Puisque chaque point est contenu dans un unique sous-ensemble non vide de \mathcal{D} , il y a au plus $2^k - 1$ points dans \mathcal{P} , ce qui donne la borne inférieure suivante sur $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P})$:

Lemme 5.3. *Soit \mathcal{P} un ensemble de n points de \mathbb{R}^2 , on a $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) \geq \lceil \log(n + 1) \rceil$.*

Ces bornes supérieures et inférieures triviales ne sont atteintes que pour des ensembles de points de taille réduite, comme nous le verrons dans la partie 3.

Enfin, comme tout ensemble de disques identifiant \mathcal{P} identifie aussi tout sous-ensemble de \mathcal{P} , on a le lemme suivant :

Lemme 5.4. *Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux ensembles de points de \mathbb{R}^2 avec $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, on a $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) \geq \gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}')$.*

1.2 Codes identifiants et ensembles séparateurs

Parmi les notions liées à notre problème que nous avons évoquées précédemment, nous donnons des définitions formelles pour trois d'entre elles dont nous aurons besoin dans le reste de ce chapitre.

Codes identifiants de graphes d'intervalles unitaires et de graphes de disques unitaires. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le sommet c *sépare* deux sommets x et y s'il domine exactement l'un d'entre eux. Un *code identifiant* de G est un ensemble dominant C de G tel que toute paire de sommets de G est séparée par au moins un sommet de C . On note $\gamma^{\text{ID}}(G)$ le nombre minimum de sommets d'un code identifiant de G . Remarquons que $\gamma^{\text{ID}}(G)$ n'est pas toujours bien défini car G peut avoir des sommets qui ont exactement le même voisinage et qui ne peuvent donc pas être séparés. De tels sommets sont appelés des *jumeaux*. Si un graphe n'admet aucune paire de sommets jumeaux, alors il a un code identifiant (en prenant par exemple tous les sommets de G dans C).

Les codes identifiants sont étroitement liés aux ensembles de disques identifiants quand on considère les graphes d'intersection géométrique. Étant donné un ensemble d'objets géométriques, il est possible de définir son graphe d'intersection comme suit. Les sommets sont les objets et il y a une arête entre deux objets s'ils s'intersectent. Une classe de graphes en particulier présente un intérêt pour nous, la classe des *graphes de disques unitaires* issus de l'intersection de disques de rayon 1. Soit G un graphe de disques unitaires, notons \mathcal{P} l'ensemble des centres des disques formant G . Alors, un code identifiant de G est équivalent à un ensemble de disques de rayon 2 identifiant \mathcal{P} et centrés sur les points de \mathcal{P} . En effet, un disque de rayon 2 centré sur un point P de \mathcal{P} contient tous les points qui sont les centres des disques du voisinage fermé du disque correspondant à P dans G . La figure 5.2 donne l'exemple d'un code identifiant pour un graphe de disques unitaires. Les codes identifiants dans les graphes de disques unitaires ont été étudiés par Müller et Sereni [99] qui ont prouvé, en particulier, que le problème de minimisation est NP-complet. Si les points de \mathcal{P} sont alignés, alors G est un *graphe d'intervalles unitaires*. La complexité des codes identifiants sur les graphes d'intervalles unitaires est étonnamment encore ouverte [59] (mais ce problème a été prouvé NP-complet pour les graphes d'intervalles).

Junnila et Laihonon [89] ont étudié les codes identifiants dans la grille \mathbb{Z}^2 en utilisant des boules euclidiennes. Le graphe sous-jacent est l'ensemble \mathbb{Z}^2 en tant que sommets et les voisinages fermés sont donnés par des boules euclidiennes d'un rayon r fixé. Ce graphe peut aussi être vu comme graphe de disques unitaires infini. Ils donnent une borne inférieure et une borne supérieure sur la densité de codes identifiants minimaux en fonction de r .

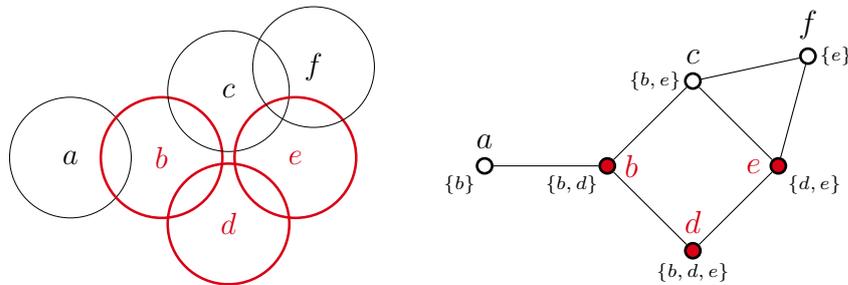


FIGURE 5.2 – Exemple de code identifiant pour un graphe de disques unitaires, avec sa représentation géométrique et classique. Les sommets et disques en rouge font partie du code identifiant, les ensembles adjacents aux sommets représentent leur voisinage dans le code.

Code identifiant dans les hypergraphes. La notion de code identifiant peut être étendue aux hypergraphes. Soit $\mathcal{H} = (X, \mathcal{F})$ un hypergraphe. Un *code identifiant* de \mathcal{H} est un ensemble $C \subset \mathcal{F}$ d'hyperarêtes tel que :

- chaque sommet de \mathcal{H} est dans au moins une hyperarête de C ;
- pour toute paire de sommets de \mathcal{H} , il y a un élément de C contenant exactement un élément de cette paire.

Un code identifiant d'un graphe G est équivalent à un code identifiant de l'hypergraphe des voisinages fermés de G . Comme dit dans l'introduction, cette notion est connue sous différents noms et a, en fait, été introduite avant les codes identifiants dans les graphes, voir [97, 98]. La Figure 5.3 donne un exemple de code identifiant pour un hypergraphe. Notre problème peut être réduit à un problème de codes identifiants dans un hypergraphe. En effet, soit \mathcal{P} un ensemble de n points de \mathbb{R}^2 et soit $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ l'hypergraphe dont l'ensemble de sommets est \mathcal{P} et où un sous-ensemble E de \mathcal{P} forme une hyperarête si et seulement si il existe un disque D qui contient exclusivement les points de E , c'est-à-dire que $D \cap \mathcal{P} = E$. Alors, trouver un ensemble de disques identifiant \mathcal{P} est équivalent à trouver un code identifiant de $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ et, comme nous le verrons dans la partie 1.3, cela peut se faire de manière polynomiale.

Familles séparatrices Une autre motivation de notre problème vient de la notion de *séparateurs géométriques* du domaine de la géométrie algorithmique [47]. Soit C_1, \dots, C_k k ensembles finis disjoints de \mathbb{R}^2 . Un ensemble S de courbes du plan est un *séparateur* pour les ensembles C_1, \dots, C_k si toute composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus S$ contient des points d'un seul ensemble C_i .

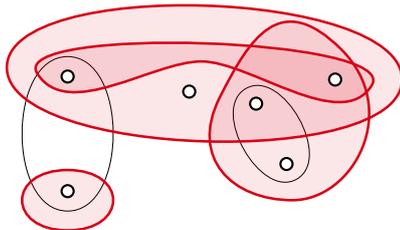


FIGURE 5.3 – Exemple de code identifiant dans un hypergraphe

Trouver des séparateurs est un problème classique de la géométrie algorithmique, en particulier en analyse d'image. Le cas le plus étudié est $k = 2$ et la séparation par des lignes ou des cercles [7].

Notre problème, si l'on omet la condition que les points doivent être couverts par un disque, peut être considéré comme un problème de séparation où chaque ensemble C_i ne contient qu'un seul point et où S est une union de cercles. Si \mathcal{D} ne fait que séparer les paires de sommets de \mathcal{P} , \mathcal{D} est une *famille de disques séparatrice*, étudiée par Gerbner et Tóth [61] dans le contexte plus général des ensembles convexes. Ils étudient en particulier les paramètres $s(n, \mathcal{D})$ et $s'(n, \mathcal{D})$ qui correspondent au nombre maximum de disques qui sont nécessaires pour identifier un ensemble de n points quelconques et un ensemble de n points en position générale (où il n'y a pas trois points alignés). Ils prouvent que $s(n, \mathcal{D}) = s'(n, \mathcal{D}) = \lceil n/2 \rceil$. Comme au plus un autre disque est nécessaire pour obtenir un ensemble identifiant à partir d'une famille séparatrice, cela nous permet de dire que $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ est au plus $\lceil n/2 \rceil + 1$. Dans le théorème 5.13, nous améliorons cette borne en $2\lceil n/6 \rceil + 1$ si, de plus, il n'y a pas quatre points cocycliques.

Les séparateurs de points ont aussi été étudiés pour des droites. Bolland et Urrutia [20] ont donné un algorithme de complexité $O(n \log n)$ pour trouver une famille de $\lceil n/2 \rceil$ droites qui séparent tout ensemble de n points en position générale (sans trois points alignés). Călinescu, Dumitrescu et Wan [35] ont prouvé que dans le cas particulier où les droites doivent être parallèles aux axes, le problème est NP-complet et ils donnent un algorithme d'approximation polynomial dans ce cas.

Une extension naturelle aux dimensions supérieures, appelée *problème multi-modal d'allocation de senseurs*, a été défini par Koushanfar *et al.* [93], faisant des liens avec des problèmes d'identification. Notons que le problème de séparation par des droites est un sous-problème du nôtre. En effet, si les points sont donnés, on peut considérer que les droites sont des cercles de très grand rayon.

1.3 Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay

Notre problème traitant de points et de distance euclidienne dans le plan, les diagrammes de Voronoï et les triangulations de Delaunay sont des outils que nous allons utiliser. Ces notions sont définies dans \mathbb{R}^k , mais nous ne les utiliserons que dans le plan, aussi les définitions et algorithmes dont nous parlerons sont réduits au cas planaire.

Pour plus d'information sur les diagrammes de Voronoï, le lecteur pourra se référer au livre d'Okabe, Boots et Sugihara [100].

Diagramme de Voronoï ordinaire

Étant donné un ensemble \mathcal{P} de $n \geq 2$ points dans le plan euclidien, on associe tous les points du plan au(x) point(s) de \mathcal{P} le(s) plus proche(s) pour la distance euclidienne. Le résultat est une partition du plan en un ensemble de régions associées aux points de \mathcal{P} . On appelle cette partition le diagramme de Voronoï généré par \mathcal{P} et les régions sont des cellules de Voronoï. Dans la Figure 5.4 on peut observer le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points.

On peut obtenir le diagramme de Voronoï de n points en temps $\mathcal{O}(n \log(n))$ grâce à l'algorithme de Fortune notamment [57, 58].

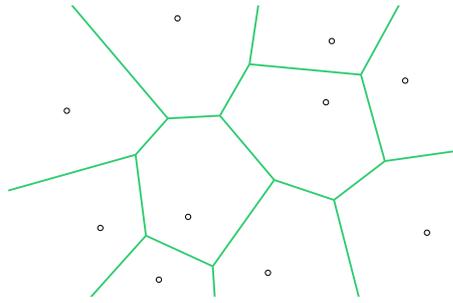


FIGURE 5.4 – Diagramme de Voronoï

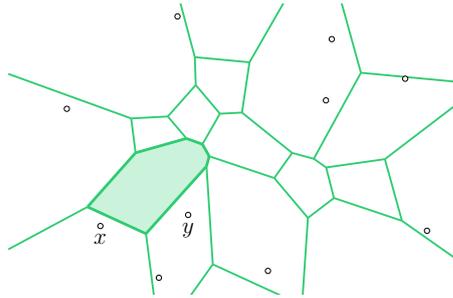


FIGURE 5.5 – Diagramme de Voronoï d'ordre 2. La cellule colorée correspond à l'ensemble des points qui sont plus proches de x et de y que de toute autre paire de points de \mathcal{P} .

Diagramme de Voronoï d'ordre supérieur

Les diagrammes de Voronoï d'ordres supérieurs sont similaire(s) aux diagrammes de Voronoï ordinaire(s) à la différence près qu'on ne s'intéresse pas aux points du plan les plus proches d'un point de \mathcal{P} mais aux points du plan les plus proches d'un sous-ensemble de \mathcal{P} . Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ un ensemble de $n \geq 2$ points de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, un sous-ensemble à k éléments de \mathcal{P} . On définit $\mathcal{V}(\mathcal{P}')$, la cellule de Voronoï d'ordre k associée à \mathcal{P}' , par $\mathcal{V}(\mathcal{P}') = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{d(p, p_h) \mid p_h \in \mathcal{P}'\} \leq \min\{d(p, p_h) \mid p_h \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'\}\}$. Cette cellule correspond à l'ensemble des points du plan dont les k points de \mathcal{P} les plus proches sont les points de l'ensemble \mathcal{P}' . On appelle diagramme de Voronoï d'ordre k l'ensemble des cellules de Voronoï d'ordre k . On peut remarquer que le diagramme de Voronoï ordinaire est aussi le diagramme de Voronoï d'ordre 1.

Le diagramme de Voronoï d'ordre $n - 1$ d'un ensemble \mathcal{P} de n points, est aussi appelé diagramme de Voronoï au plus loin de \mathcal{P} . En effet, chaque cellule correspond aux points les plus proches de $n - 1$ points de \mathcal{P} et donc aux points plus éloignés du point restant que de tout autre point de \mathcal{P} .

Dans la Figure 5.5, on peut observer le diagramme de Voronoï d'ordre 2 de l'ensemble de points déjà présent dans la Figure 5.4.

La complexité pour obtenir le diagramme de Voronoï d'ordre k est de $\mathcal{O}(n \log(n))$ (O'Rourke *et al.* [102]), tandis que trouver l'ensemble des diagrammes de Voronoï itérés peut se faire en temps $\mathcal{O}(n^3)$ (Edelsbrunner *et al.* [53]). Or, pour un ensemble de points \mathcal{P} donné, trouver l'ensemble des cellules de Voronoï non vides de tous les ordres revient à construire un hypergraphe dont les sommets sont les points de \mathcal{P} et les hyperarêtes contiennent les ensembles de points qui peuvent être isolés des autres par des disques. On peut donc bien transformer une instance du problème d'identification de points dans le plan par des disques en problème de tests couvrants en temps polynomial.

Triangulation de Delaunay

Soit \mathcal{V} un diagramme de Voronoï issu d'un ensemble de points \mathcal{P} de \mathbb{R}^2 tel que $|\mathcal{P}| \geq 3$ et qu'on n'ait jamais trois points alignés. On trace un segment entre toutes les paires de points de \mathcal{P} telles que leurs cellules de Voronoï partagent une arête. Si le résultat obtenu ne contient que des triangles, on l'appelle triangulation de Delaunay, sinon pré-triangulation de Delaunay. Dans ce second cas, on partitionne en triangles les polygones qui n'en sont pas grâce à des

segments joignant les sommets sans s'intersecter. La triangulation ainsi obtenue est aussi appelée triangulation de Delaunay. S'il n'y a pas quatre points co-cycliques, alors on se trouve forcément dans le premier cas.

Les sommets du diagramme de Voronoï sont les centres des disques circonscrits des triangles de la triangulation de Delaunay et les arêtes du diagramme de Voronoï sont sur les médiatrices des arêtes de la triangulation de Delaunay.

De plus, les triangulations de Delaunay possèdent la propriété de n'avoir aucun point à l'intérieur des cercles circonscrits à leurs triangles, ce que nous utiliserons par la suite. La Figure 5.6 représente la construction d'une triangulation de Delaunay à partir d'un diagramme de Voronoï.

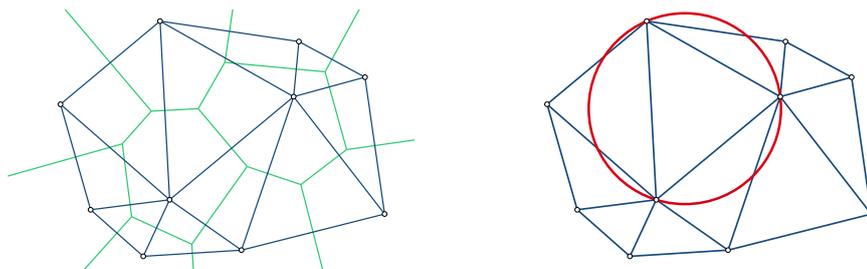


FIGURE 5.6 – Triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï associé et cercle circonscrit à un triangle de la triangulation de Delaunay

2 Configurations particulières

Pour commencer l'étude du problème d'identification de points dans le plan par des disques, intéressons-nous dans un premier temps à la valeur de $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ lorsque l'ensemble de points \mathcal{P} à une structure très contrainte : quand les points sont alignés ou positionnés sur les sommets d'une grille.

2.1 Points alignés

Quand les points sont alignés, le problème est complètement résolu par le théorème suivant :

Théorème 5.5 (G. et Parreau, 2019 [66]). *Soit \mathcal{P} un ensemble de n points alignés, alors $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.*

Démonstration. Soit \mathcal{P} un ensemble de n points alignés et situés sur une droite L . On note x_1, \dots, x_n ces points, en respectant leur ordre sur L .

Soit \mathcal{D} un ensemble de disques identifiant \mathcal{P} . Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, x_i et x_{i+1} sont séparés par \mathcal{D} . Cela veut donc dire qu'il y a un disque $D \in \mathcal{D}$, tel que son périmètre intersecte L entre x_i et x_{i+1} . De plus, x_1 et x_n sont couverts par \mathcal{D} , il y a donc un disque dont le périmètre intersecte L avant x_1 et un disque dont le périmètre intersecte L après x_n . Au total, il y a au moins $n+1$ intersections entre L et le périmètre de disques de \mathcal{D} . Puisqu'un cercle n'intersecte une droite qu'en deux points au plus, on a nécessairement $|\mathcal{D}| \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Pour prouver l'égalité, on peut remarquer que pour toute suite consécutive x_i, x_{i+1}, \dots, x_j de points de \mathcal{P} . Il existe un disque $D_{i,j}$ tel que $D_{i,j} \cap \mathcal{P} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j\}$. Alors, l'ensemble de disques

$$\mathcal{D} = \left\{ D_{i, i+\lceil n/2 \rceil} \mid i = 1, \dots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \right\}$$

est de taille $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ et identifie \mathcal{P} . La figure 5.7 illustre cette méthode pour un ensemble de neuf points alignés. □

Dans la solution du théorème 5.5, certains disques peuvent avoir un rayon très élevé. En fait, si le rayon des disques est borné par une constante r , n disques peuvent parfois être nécessaires et $\gamma_{D,r}^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ peut prendre des valeurs entre $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ et n . Dans la partie 4, nous donnerons un algorithme pour calculer $\gamma_{D,r}^{\text{ID}}(\mathcal{P})$ en temps linéaire.

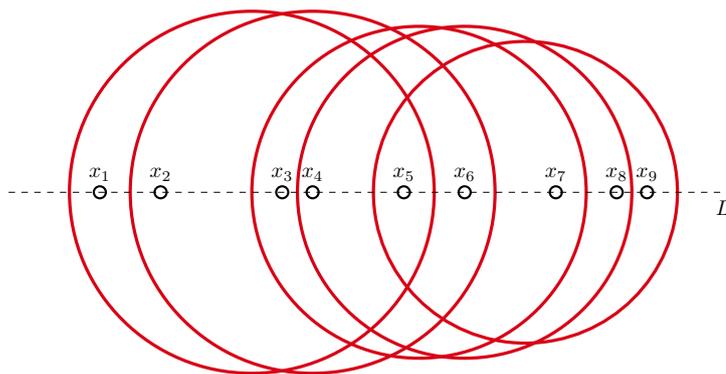


FIGURE 5.7 – Identification de points alignés

2.2 Points situés sur une grille

Considérons à présent le cas où les points sont situés sur une grille classique. Soit deux entiers m et n , on note $\mathcal{P}_{m,n}$ l'ensemble de points (x, y) de \mathbb{Z}^2 tels que $1 \leq y \leq m$ et $1 \leq x \leq n$.

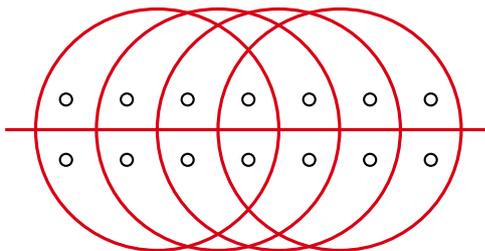
Grilles de hauteur 2

Quand la grille ne contient que deux lignes, il est possible d'identifier les points en utilisant le même nombre de disques que sur une seule ligne, à l'exception de quelques cas :

Théorème 5.6 (G. et Parreau, 2019 [66]). *Soit $n \geq 2$ un entier. On a :*

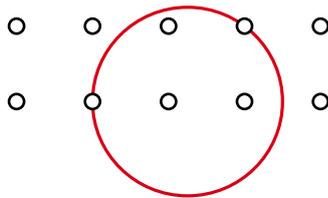
$$\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}_{2,n}) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1 & \text{si } n \in \{2, 3, 4, 5, 7\}, \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On peut d'abord remarquer que pour tout n , $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}_{2,n}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$. En effet, pour identifier $\mathcal{P}_{2,n}$ il est possible d'utiliser la méthode proposée dans le théorème 5.5 puis d'ajouter un demi-plan (qui peut être vu comme un disque de très grand rayon) pour séparer les deux lignes comme dans la Figure 5.8.


 FIGURE 5.8 – Identification de $\mathcal{P}_{2,7}$ avec $\lceil \frac{7+1}{2} \rceil + 1 = 5$ disques

Pour des grilles $\mathcal{P}_{2,n}$ avec $n \leq 5$, cette solution est optimale d'après le lemme 5.3. Comme nous le verrons dans la partie 3, l'intersection de quatre disques forme au plus treize zones différentes et donc cinq disques au moins sont nécessaires pour identifier un ensemble de quatorze points. Il n'y a donc pas non plus de meilleure solution pour $\mathcal{P}_{2,7}$. Dans tous les autres cas, nous montrons que $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ disques sont suffisants. Il est seulement nécessaire d'étudier les cas où n est impair ou égal à 6. En effet, d'après le lemme 5.4, une solution pour $\mathcal{P}_{2,2q+1}$ est aussi une solution pour $\mathcal{P}_{2,2q}$ en retirant les points de la dernière colonne.

Soit $X \subseteq \mathcal{P}_{2,n}$ l'union de deux ensembles de points consécutifs sur la première ligne $(a, 1), \dots, (b, 1)$ et sur la seconde ligne $(c, 2), \dots, (d, 2)$. Si a, b, c, d sont tels que soit $[a, b] \subseteq [c, d]$ ou $[c, d] \subseteq [a, b]$ et que les différences entre les extrémités ne diffèrent que d'au plus 1 (c'est-à-dire $|(c-a) - (b-d)| \leq 1$) alors il existe un disque $\mathcal{D}_{[a,b]}^{[c,d]}$ tel que son intersection avec $\mathcal{P}_{2,n}$ contient exactement X . En effet, supposons sans perdre en généralité que $[c, d] \subseteq [a, b]$ et que $c-a \leq b-d$.


 FIGURE 5.9 – Le disque $\mathcal{D}_{[2,4]}^{[3,4]}$

Si $c - a = b - d$ alors le disque dont le périmètre contient $(a, 1)$, $(b, 1)$ et $(c, 2)$ passera aussi par $(d, 2)$ et contient exactement X . Si $b - d = c - a + 1$, alors le disque dont le périmètre passe par $(a - \frac{1}{2}, 1)$, $(c, 2)$ et $(d + \frac{1}{2}, 2)$ passera aussi par $(b, 1)$ et contient exactement X . La Figure 5.9 est une représentation du disque $\mathcal{D}_{[2,4]}^{[3,4]}$.

Des solutions explicites pour les grilles $\mathcal{P}_{2,6}$ et $\mathcal{P}_{2,9}$ sont les suivantes :

- $\mathcal{P}_{2,6}$ peut être identifié par les disques : $\mathcal{D}_{[1,5]}^{[3,4]}$, $\mathcal{D}_{[3,6]}^{[4,5]}$, $\mathcal{D}_{[2,3]}^{[1,5]}$ et $\mathcal{D}_{[4,4]}^{[2,6]}$.
- $\mathcal{P}_{2,9}$ peut être identifié par les disques : $\mathcal{D}_{[1,6]}^{[3,4]}$, $\mathcal{D}_{[2,9]}^{[4,6]}$, $\mathcal{D}_{[4,8]}^{[6,7]}$, $\mathcal{D}_{[3,4]}^{[1,8]}$ et $\mathcal{D}_{[6,7]}^{[2,9]}$.

Nous donnons à présent une solution pour les grilles $\mathcal{P}_{2,4p+1}$, avec $p \geq 3$. Cette solution utilise trois étapes différentes. La Figure 5.10 illustre ces trois étapes.

La première étape est d'utiliser les disques $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{[1,3p+1]}^{[p+2,2p]}$, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{[p+2,2p]}^{[1,3p+1]}$, $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_{[p+1,4p+1]}^{[2p+2,3p]}$ et $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_{[2p+2,3p]}^{[p+1,4p+1]}$. Après avoir ajouté ces disques, tous les points de chaque ligne sont séparés de tous les points de l'autre ligne. En effet, les points de la première ligne dans les intervalles $[1, p+1]$ et $[2p+1, 3p+1]$ sont dans le disque \mathcal{D}_1 et ne sont pas dans le disque \mathcal{D}_2 ce qui les sépare des points de la deuxième ligne. De façon similaire, les points de la première ligne dans les intervalles $[p+2, 2p]$ et $[3p+2, 4p+1]$ sont couverts par \mathcal{D}_3 mais ne le sont pas par \mathcal{D}_4 , ce qui les sépare de la deuxième ligne.

Dans la seconde étape, on ajoute les disques $\mathcal{D}_{[p,p+2]}^{[p,p+2]}$ et $\mathcal{D}_{[3p,3p+2]}^{[3p,3p+2]}$. Ces disques séparent les points sur les colonnes $p+1$, $2p+1$ et $3p+1$, ce qui n'était pas le cas jusqu'à présent.

Après cette étape, tous les points sont couverts par au moins un disque et les paires de points qui ne sont pas séparées sont sur une même ligne et sur l'un des intervalles $[1, p-1]$, $[3p+3, 4p+1]$, $[p+3, 2p]$ ou $[2p+2, 3p-1]$ (ces deux derniers intervalles apparaissent si $p \geq 4$).

Dans la troisième étape, nous finissons d'identifier ces points avec les disques concentriques suivants : $\mathcal{D}_{[2,4p]}^{[2,4p]}$, $\mathcal{D}_{[3,4p-1]}^{[3,4p-1]}$, \dots , $\mathcal{D}_{[p-1,3p+3]}^{[p-1,3p+3]}$, $\mathcal{D}_{[p+4,3p-2]}^{[p+4,3p-2]}$, $\mathcal{D}_{[p+5,3p-3]}^{[p+5,3p-3]}$, \dots , $\mathcal{D}_{[2p,2p+2]}^{[2p,2p+2]}$.

Nous utilisons quatre disques dans la première étape, deux dans la seconde et $(p-2) + (p-3)$ dans la dernière. Au total, $2p+1$ sont ajoutés, ce qui est bien égal à $\frac{(4p+1)+1}{2}$.

Pour les grilles $\mathcal{P}_{2,4p-1}$, les points sur les colonnes 1 et $4p+1$ peuvent être retirés ainsi que le disque $\mathcal{D}_{[2,4p]}^{[2,4p]}$.

Il est donc bien possible d'identifier les grilles $\mathcal{P}_{2,n}$, pour $n \geq 10$, avec $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ disques. \square

Cas des grilles quelconques

Considérons à présent le cas général des grilles $m \times n$, $n \geq m \geq 3$. Résolvons d'abord ce cas avec des demi-plans.

Théorème 5.7 (G. et Parreau, 2019 [66]). *Soit $m, n \geq 3$ deux entiers. On a $\gamma_{D,\infty}^{ID}(\mathcal{P}_{m,n}) = m + n - 2$.*

Démonstration. Notons $x_1, \dots, x_{2(m+n-2)}$ les points sur la frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}_{m,n}$, dans un ordre cyclique.

Soit \mathcal{L} un ensemble de demi-plans identifiant $\mathcal{P}_{m,n}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, 2(m+n-2)\}$, x_i et x_{i+1} sont séparés par \mathcal{L} (avec $x_{2(m+n-2)+1}$ identifié à x_1). Cela signifie qu'il y a un demi-plan $L \in \mathcal{L}$ dont la frontière intersecte la frontière de l'enveloppe de la grille entre x_i et x_{i+1} . Au total, il y a au moins $2(m+n-2)$ intersections entre la frontière de l'enveloppe convexe et les frontières de demi-plans de \mathcal{L} . Comme une droite intersecte un polygone convexe en au plus deux points, on a $|\mathcal{L}| \geq m + n - 2$.

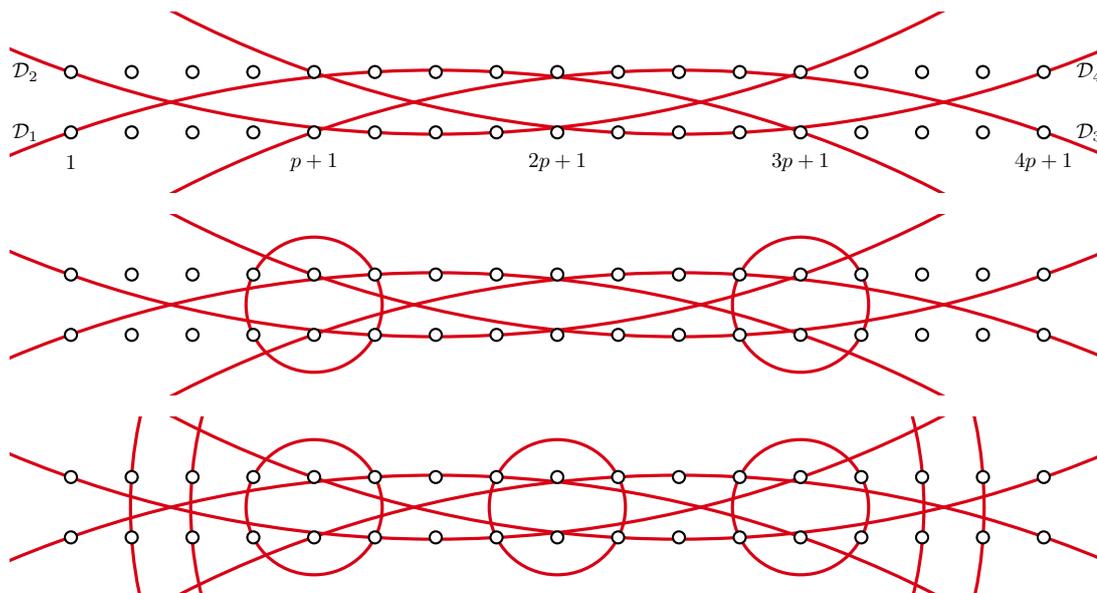


FIGURE 5.10 – Les trois étapes de la preuve sur la grille $\mathcal{P}_{2,4p+1}$

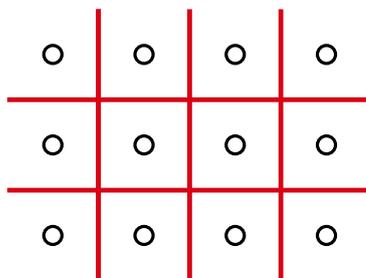


FIGURE 5.11 – Identification des sommets d'une grille avec des demi-plans

Considérons $m - 1$ droites verticales et $n - 1$ droites horizontales passant entre des points adjacents consécutifs (comme illustré dans la Figure 5.11). Toute paire de points est séparée par une des lignes. Pour obtenir un ensemble identifiant, il suffit de choisir des demi-plans dont les frontières sont ces lignes de telle sorte que tous les points soient couverts (cela est toujours possible avec $m, n \geq 3$). \square

Ce théorème donne une borne pour le cas général : $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}_{m,n}) \leq n + m - 2$. Cependant cette borne peut être améliorée, notamment dans le cas où n est très grand comparé à m . Le théorème suivant donne une meilleure (mais toujours non optimale) borne dans ce cas.

Théorème 5.8 (G. et Parreau, 2019 [66]). *Soit n et m deux entiers tels que $m \geq 3$ et $n \geq \frac{m^2}{2} - 3$. On a $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}_{n,m}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + m - 1$.*

Démonstration. L'idée est d'utiliser une méthode similaire à celle décrite dans la Figure 5.8. On utilise des demi-plans pour séparer les lignes et des disques pour séparer les colonnes. Quand n est assez grand, les disques agissent sur chaque ligne de la même façon qu'ils agiraient s'il n'y avait qu'une ligne.

Puisque $m \geq 3$ on utilise des demi-plans pour séparer les lignes et couvrir tous les points : le demi-plan le plus bas contenant tous les points au-dessus et le demi plan le plus haut contenant tous les points en-dessous.

On utilise à présent des disques de rayon $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\lceil \frac{n}{2} \rceil\right)^2 + \frac{m^2}{4}}$ et centrés sur $(\frac{1}{2}(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) + k, m/2)$ avec k un entier entre 0 et $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Comme $n \geq \frac{m^2}{2} - 3$, ces disques contiennent $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ points sur chaque ligne et ils séparent toutes les colonnes. Un exemple de tels disques est donné dans la Figure 5.12. Comme tous les points sont couverts par un demi-plan, les disques n'ont pas

besoin de couvrir les points, c'est pourquoi il y en a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ au lieu de $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ qui correspondait au cas avec une seule ligne.

Il y a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ disques pour séparer les colonnes et $m - 1$ demi-plans pour séparer les lignes, ce qui donne $\lceil \frac{n}{2} \rceil + m - 1$ au total. □

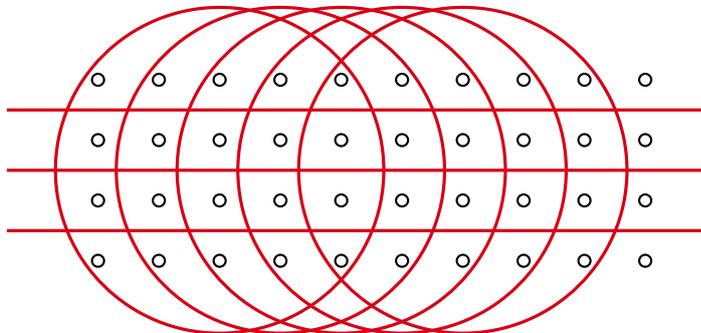


FIGURE 5.12 – Exemple d'identification des points d'une grille pour n suffisamment grand par rapport à m .

3 Cas extrémaux

Dans cette partie, nous donnons une borne inférieure et une borne supérieure pour $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P})$ en fonction de la taille de \mathcal{P} , ces deux bornes sont atteintes. Nous améliorons ensuite la borne supérieure dans le cas de points en position générale, c'est-à-dire quand il n'y a pas trois points alignés ni quatre points cocycliques.

3.1 Borne inférieure

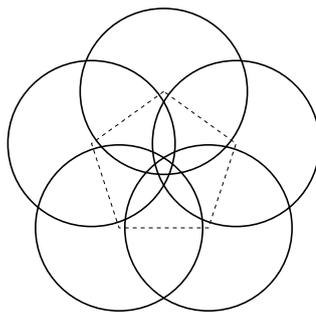
La borne inférieure logarithmique donnée dans le lemme 5.3 est la borne basse naturelle pour les codes identifiants dans les hypergraphes. Elle est atteinte si toutes les hyperarêtes sont autorisées, cependant s'il y a une certaine structure sur les hyperarêtes ce n'est pas toujours le cas. En particulier, si l'ensemble d'hyperarêtes est de VC-dimension duale d^* bornée, alors la borne inférieure est au moins de l'ordre de n^{1/d^*} [14]. C'est le cas ici car l'hypergraphe induit par des disques a une VC-dimension duale égale à 3, donnant une borne inférieure de l'ordre de $n^{1/3}$. Cependant, cette borne n'est toujours pas atteinte. En effet, nous donnons dans cette partie une borne inférieure d'ordre $n^{1/2}$. Cette borne vient du fait qu'un arrangement de k disques peut créer au plus $k^2 - k + 1$ faces internes. Ce résultat classique peut être prouvé par induction en remarquant qu'à chaque fois qu'on ajoute un disque à un ensemble de disques il intersecte les autres disques au plus deux fois (voir [107] pour plus de détails et de références). Or, pour tout ensemble de disques identifiant des points, il y a au plus un point dans chaque face de l'intersection des disques, on a donc la borne suivante :

Proposition 5.9. *Soit \mathcal{P} un ensemble de n points de \mathbb{R}^2 . On a $\gamma_D^{ID}(\mathcal{P}) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)}}{2} \right\rceil$.*

Cette borne est atteinte.

Pour obtenir un ensemble \mathcal{P} de n points atteignant cette borne, on trouve k disques créant $k^2 - k + 1$ faces internes et on place un point dans chacune de ces faces. Il est possible de créer un tel agencement de disques en prenant des disques de rayon $1 + \epsilon$, centrés sur les sommets d'un polygone k -régulier pouvant être inscrit dans un cercle de rayon 1. Voir la Figure 5.13 pour une telle construction avec $k = 5$.

Remarque 5.10. Comme un code identifiant d'un graphe de disques unitaires peut être vu comme un ensemble identifiant de disques particuliers, la borne inférieure de la proposition 5.9 est toujours valide pour des codes identifiants de graphes de disques unitaires, ce qui améliore la borne inférieure donnée dans [23]. De plus, cette borne est aussi atteinte dans ce cas. En effet,


 FIGURE 5.13 – Cinq disques créant $21 = 5^2 - 5 + 1$ faces internes.

la construction de la proposition 5.9 peut être adaptée pour des codes identifiants de graphes de disques unitaires en mettant le centre des disques unitaires dans chaque face et en divisant le rayon des disques par 2.

3.2 Borne supérieure

Considérons à présent la pire configuration de points. Autrement dit, quel est le nombre maximal de disques qui peuvent être nécessaire pour identifier n points ? Cette question a été résolue par Gerbner and Tóth lorsqu'on ne cherche qu'à séparer les points [61]. Ils prouvent que $\lceil n/2 \rceil$ sont toujours suffisants et que c'est le mieux que l'on puisse obtenir car il y a des ensembles de points nécessitant ce nombre de disques. Comme un disque supplémentaire est suffisant pour obtenir un ensemble identifiant, cela nous donne une borne de $\lceil n/2 \rceil + 1$. En réalité, on peut légèrement améliorer cette borne en remarquant que dans la preuve de Gerbner and Tóth [61], tous les points sont couverts s'il y a un nombre impair de points. Pour des raisons de complétude nous donnons la preuve, qui découle directement de celle de [61].

Proposition 5.11. *Soit \mathcal{P} un ensemble de n points de \mathbb{R}^2 . On a $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Cette borne est atteinte.*

Démonstration. Comme \mathcal{P} est fini, il existe une direction que l'on peut choisir comme abscisse de telle sorte qu'il n'y ait pas deux points avec la même abscisse. Il y a donc une droite L d'abscisse constante séparant les points en deux parties dont la différence entre les tailles est d'au plus 1. Soit D le demi-plan dont L est la frontière et qui contient le plus grand nombre de points. On choisit une direction perpendiculaire à l'abscisse en tant qu'ordonnée.

Au départ, tous les points font partie d'un ensemble \mathcal{P}' et l'ensemble de disques identifiant ne contient que D . Puis on répète l'opération suivante $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ fois : considérons l'enveloppe convexe de \mathcal{P}' , exactement deux de ses côtés intersectent L . Soit (x, y) le côté qui intersecte L et dont l'ordonnée est la plus grande. Comme c'est un côté de l'enveloppe convexe, il y a un disque $D_{x,y}$ dont l'intersection avec \mathcal{P}' contient uniquement x et y . On ajoute ce disque à l'ensemble de disques identifiant et on retire x et y de \mathcal{P}' . On itère à présent cette opération.

Cet algorithme donne un ensemble de disques qui identifie \mathcal{P} et de taille $1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. En effet, à chaque étape de l'algorithme, x et y sont séparés des autres points de \mathcal{P}' par $D_{x,y}$ et comme tous les points considérés précédemment sont aussi séparés de x et y , ils sont séparés de tous les points de \mathcal{P} . De plus, comme le côté (x, y) intersecte L , ces deux points sont aussi séparés par D . À la fin, s'il y a un nombre impair de points, il reste un point qui est couvert par D et comme c'est le seul point qui n'est couvert que par D il est aussi identifié.

La Figure 5.14 illustre quelques étapes de cet algorithme. Cette borne est atteinte dans le cas où les points sont alignés (voir théorème 5.5). \square

Toutes les valeurs comprises entre la borne inférieure de la proposition 5.9 et la borne supérieure de la proposition 5.11 peuvent être atteintes :

Théorème 5.12 (G. et Parreau, 2019 [66]). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)}}{2} \rceil \leq k \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Il existe un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^2 tel que $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) = k$.*

Démonstration. Considérons l'agencement optimal de k disques basé sur un polygone régulier décrit dans la Figure 5.13. Il existe une droite L coupant cette construction en $2k - 1$ zones. En

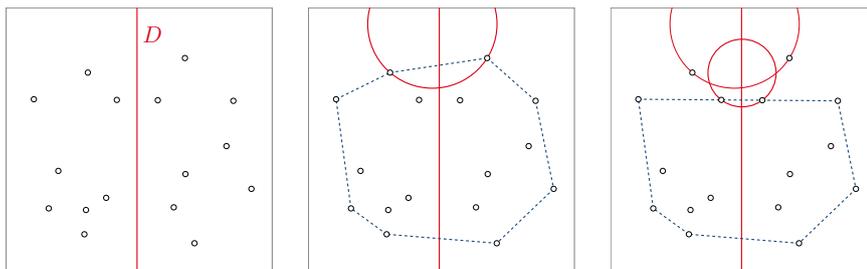


FIGURE 5.14 – Les premières étapes de l’algorithme pour la borne supérieure

effet, soit L' une droite passant par une intersection de disques et le centre du polygone. Pour des raisons de symétrie, si k est pair, cette droite traverse k zones et $k - 1$ intersections et, si k est impair, cette droite traverse $k - 1$ zones et k intersections. Dans les deux cas, en décalant cette droite de façon infinitésimale et en direction de sa normale, elle passe toujours par les mêmes zones que précédemment mais passe aussi par une nouvelle zone par intersection. Ainsi, il y a bien $2k - 1$ régions traversées par cette nouvelle droite L .

Comme $k \geq \lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)}}{2} \rceil$, on peut placer un point sur L pour chaque zone qu’elle traverse, puis rajouter $n - (2k - 1)$ points dans les autres régions de l’agencement. En faisant cela, les k disques de l’agencement identifient bien les n points et, comme il y a $2k - 1$ points alignés, aucun ensemble avec moins de disques ne pourrait identifier ces points. \square

3.3 Une meilleure borne supérieure pour des points en position générale

La borne supérieure de la proposition 5.11 est atteinte pour des points alignés. De plus, un nombre impair de points cocycliques permet aussi d’atteindre cette borne et la différence avec cette borne n’est que de 1 s’il y a un nombre pair de points cocycliques, ce qu’on peut prouver avec une méthode similaire à la preuve du théorème 5.5 en remarquant que deux cercles s’intersectent en au plus deux points, tout comme un cercle et une droite. Cependant, s’il n’y a pas trois points alignés ni quatre points cocycliques dans \mathcal{P} , alors cette borne supérieure n’est plus atteinte. Dans cette partie, nous disons que des points de \mathbb{R}^2 sont en *position générale* s’il n’y a pas trois points de \mathcal{P} sur une même droite ni quatre points sur un même cycle.

Théorème 5.13 (G. et Parreau, 2019 [66]). *Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble de n points en position générale. On a $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) \leq 2\lceil n/6 \rceil + 1$.*

L’idée de la preuve de ce théorème est de donner un algorithme qui construit un ensemble de disques identifiant \mathcal{P} de taille $2\lceil n/6 \rceil + 1$. Cet algorithme est basé sur le même principe que celui utilisé dans le cas non-restreint :

1. Diviser \mathcal{P} en trois parties égales en utilisant des droites ;
2. Choisir un disque qui contient exactement un point dans chaque partie, retirer ces points et réitérer cette opération.

La difficulté de cet algorithme est de trouver un disque répondant à la condition de la seconde étape. Pour ce faire, on utilise la triangulation de Delaunay – comme précisé dans la partie 1.3, c’est une triangulation des points telle que les cercles circonscrits à chaque triangle ne contiennent aucun autre points de la triangulation que les sommets de ce triangle. Comme il n’y a pas trois points alignés ni quatre points cocycliques, une telle triangulation existe toujours (et est unique). Pour trouver le disque de l’étape 2, il suffit donc de trouver un triangle de Delaunay qui a un sommet dans chaque partie, comme représenté dans la Figure 5.15. Pour s’assurer qu’un tel triangle existe, il nous faut toutefois être plus précis dans le choix des droites de la première étape.

Avant de rentrer dans les détails, nous avons besoin de deux résultats préliminaires.

Théorème 5.14 (Ceder [36]). *Pour n points de \mathbb{R}^2 qui ne comprennent pas trois points alignés, il existe une façon de diviser le plan en six régions contenant chacune entre $\lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ et $\lceil \frac{n}{6} \rceil$ points en utilisant trois droites concourantes.*

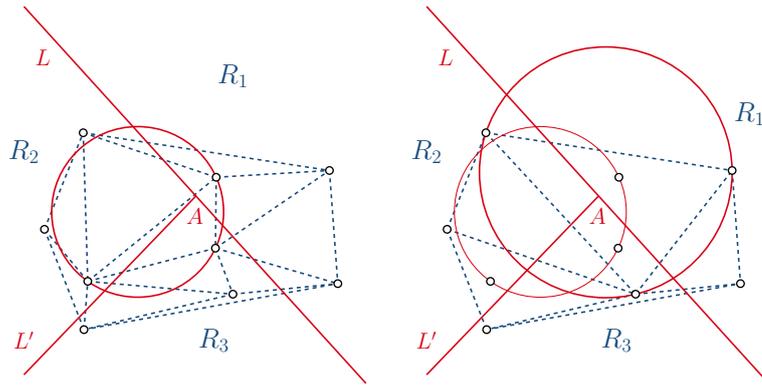


FIGURE 5.15 – Premières étapes de la méthode utilisée dans l'idée principale de la preuve

Lemme 5.15. *Soit \mathcal{P} un ensemble de points de \mathbb{R}^2 , L une droite et L' une demi-droite dont l'origine A est un point de L . Si chacune des trois régions R_1 , R_2 et R_3 créées par L et L' contiennent au moins un point de \mathcal{P} et si A est dans l'enveloppe convexe de \mathcal{P} , alors toute triangulation de \mathcal{P} contient un triangle ayant un sommet dans chaque région.*

Démonstration. Soit T une triangulation de \mathcal{P} . Comme l'intersection A entre L et L' est dans l'enveloppe convexe de \mathcal{P} et que chaque région contient au moins un point, il y a au moins un segment de T entre chaque paire de régions.

Considérons les segments entre les régions séparées par L' , à savoir R_2 et R_3 . Soit $[x, y]$ le segment qui coupe L' au plus près de A . Comme A est dans l'enveloppe convexe de \mathcal{P} , il y a au moins un point z de \mathcal{P} tel que (x, y, z) est un triangle de T dans la direction de A depuis ce segment. Si z était dans R_2 ou R_3 , alors les segments $[x, z]$ ou $[y, z]$ intersecteraient L' plus près de A que $[x, y]$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $[x, y]$ est le segment qui intersecte L' au plus près de A . Par conséquent, z est dans R_1 et (x, y, z) forme un triangle ayant un sommet dans chaque région. □

Preuve du théorème 5.13. En utilisant le théorème 5.14, on sait qu'il existe trois droites concourantes L_1 , L_2 et L_3 qui divisent le plan en six régions contenant le même nombre de points, à un près. Soit A leur point d'intersection. Soit D_1 , D_2 et D_3 les trois demi-plans définis par L_1 , L_2 et L_3 de telle sorte que chaque point est dans au moins un demi-plan (les flèches de la Figure 5.16 représentent la direction que les demi-plans couvrent). Soit a , b , c , d , e et f les six régions du plan créées par ces droites, comme illustré sur la Figure 5.16.

Considérons d'abord les régions a , c et e . Chacune de ces régions contient entre $\lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ et $\lceil \frac{n}{6} \rceil$ points. Pour des raisons de construction, si on prend un point dans chaque région alors A est à l'intérieur du triangle formé par ces points, donc le lemme 5.15 s'appliquera toujours.

Considérons à présent le processus suivant. Ajoutons D_1 , D_2 et D_3 au futur ensemble de disques identifiant et plaçons dans \mathcal{P}' tous les points de a , c et e . Répétons maintenant l'opération suivante $\lceil \frac{n}{6} \rceil - 1$ fois. Dans la triangulation de Delaunay de \mathcal{P}' , il y a au moins un triangle (x, y, z) ayant un sommet dans chaque région. Comme il s'agit d'une triangulation de Delaunay, son cercle circonscrit C ne contient aucun autre point de \mathcal{P}' . Ajoutons $D_{x,y,z}$, le disque de périmètre C à l'ensemble des disques identifiant et retirons x , y et z de \mathcal{P}' . On itère ce procédé.

Appliquons les mêmes opérations aux régions b , d et f .

À la fin de chaque étape de ce processus, tous les points considérés sont séparés de tous les autres points. En effet, à chaque étape x , y et z sont séparés des points des autres régions par les demi-plans et, comme chaque triangle vient d'une triangulation de Delaunay, leur cercle circonscrit ne contient aucun autre point de \mathcal{P}' .

Si un point n'a pas été considéré à la fin du processus, il est forcément seul dans sa région et est donc isolé de tous les autres points. De plus, de par la sélection des demi-plans, il est nécessairement à l'intérieur d'un demi-plan et est donc couvert.

Ainsi, cet algorithme construit un ensemble de disques identifiant de taille $3 + 2(\lceil \frac{n}{6} \rceil - 1) = 2\lceil \frac{n}{6} \rceil + 1$. □

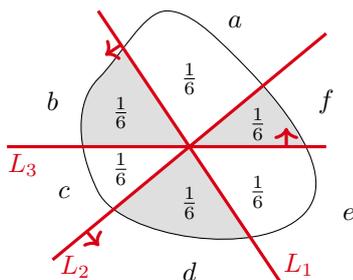


FIGURE 5.16 – Division des points en six régions de tailles égales

La borne précédente est atteinte à une constante 2 près quand les points sont situés sur une demi-parabole (la courbe constituée d’un des côtés d’une parabole par rapport à son axe de symétrie) :

Proposition 5.16. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble de n points situés sur une demi-parabole. On a $\gamma_D^{\text{ID}}(\mathcal{P}) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Démonstration. Soit \mathcal{P} un ensemble de n points situés sur une demi-parabole H . On note x_1, \dots, x_n ces points, en respectant leur ordre sur H , avec x_1 le point le plus proche du sommet de la parabole.

Soit \mathcal{D} un ensemble de disques identifiant \mathcal{P} . Pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, x_i et x_{i+1} sont séparés par \mathcal{D} . Cela signifie qu’il y a un disque $D \in \mathcal{D}$ dont le périmètre intersecte H entre x_i et x_{i+1} . De plus, x_n est couvert par \mathcal{D} , il y a donc un disque dont le périmètre intersecte H après x_n . Au total, il y a au moins n intersections entre H et le périmètre de disques de \mathcal{D} .

Prouvons maintenant qu’un cercle C intersecte H en au plus trois points. Soit $(x, y) \in C \cap H$, sans perdre en généralité, (x, y) satisfait les équations suivantes, avec x_0, y_0, r des constantes.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

En particulier, x est une solution de :

$$(X - x_0)^2 + (X^2 - y_0)^2 = r^2 \tag{5.1}$$

Il n’y a pas de terme en X^3 dans l’équation précédente. Ainsi, si x_1, x_2, x_3 et x_4 sont solutions de (5.1), on a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Comme $x \geq 0$, il y a au plus trois valeurs possibles pour x .

Comme il y a au moins n intersections entre H et un ensemble de disques identifiant \mathcal{D} et comme un cercle intersecte une demi-parabole en au plus trois points, on a nécessairement $\mathcal{D} \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. \square

4 Complexité quand le rayon est fixé

La complexité du problème d’identification de points dans le plan reste pour l’instant un problème ouvert dans le cas général. Une approche que nous avons employée pour tenter de résoudre ce problème a été de fixer le rayon des disques et d’étudier la complexité dans ce cas. Dans cette partie, nous considérons donc la complexité des problèmes de décision suivants (avec $r \in \mathbb{R}$) :

IDENTIFICATION-DISK(r)

Instance : Un ensemble fini $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$, un entier p .

Question : Existe-t-il un ensemble de p disques de rayon r qui identifie \mathcal{P} ?

et le problème d’optimisation associé :

MIN IDENTIFICATION-DISK(r)

Instance : Un ensemble fini $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$

Solution : Un ensemble de disques \mathcal{D} de rayon r qui identifie \mathcal{P} .

Mesure : Le nombre de disques de \mathcal{D} .

Théorème 5.17 (G. et Parreau, 2019 [66]). IDENTIFICATION-DISK(r) est NP-complet.

Démonstration. Remarquons dans un premier temps que le problème est dans NP. Depuis un ensemble \mathcal{D} de disques, il suffit d'un temps polynomial pour vérifier que chaque point est bien identifié par \mathcal{D} . Il faut toutefois faire attention à la représentation des disques. En effet, si l'on représentait un ensemble de disques identifiant par leur centres et rayons, pour s'assurer qu'un disque contienne bien les bons points du plan il se pourrait que les coordonnées de son centre aient un nombre arbitraire de chiffres après la virgule, ce qui empêcherait la polynomialité du certificat. Cependant, au lieu de représenter les disques par un centre et un rayon, il suffit de donner pour chaque disque de \mathcal{D} l'ensemble des points de \mathcal{P} qu'il contient. Comme on l'a vu dans la sous-partie 1.3 vérifier qu'il existe un disque qui ne contient qu'un certain ensemble de points revient à vérifier qu'une cellule de Voronoï d'ordre supérieur est non vide et cela peut se faire en temps polynomial. Notre certificat est donc bien de taille polynomiale et il suffit ensuite d'un temps polynomial pour le vérifier. Prouvons à présent que le problème est NP-difficile.

On prouve ce résultat pour $r = 1/2$ ce qui n'est pas restrictif. On réduit ce problème depuis le problème de partition de graphe de grille en chemins de trois sommets. Un *graphe de grille* est un graphe dont l'ensemble de sommets est inclus dans \mathbb{Z}^2 et où deux sommets sont adjacents s'ils sont à une distance euclidienne de 1.

P_3 -PARTITION-GRID

Instance : Un graphe de grille G .

Question : Existe-t-il une partition des sommets de G telle que chaque partie induise un P_3 ?

Bevern *et al.* [19] ont prouvé que ce problème était NP-complet.

Soit G une instance de P_3 -PARTITION-GRID et $n = |V(G)|$. Si n n'est pas divisible par 3, il est trivial que G n'admet pas de P_3 -partition, on suppose donc que n est bien divisible par 3. L'instance du problème d'identification est $\mathcal{P} = V(G)$ et $p = 2n/3$. On doit prouver que G a une P_3 -partition si et seulement si $V(G)$ est identifié par $2n/3$ disques de rayon $1/2$.

Supposons d'abord qu'il y a une partition de G en P_3 . Pour chaque ensemble de sommets $\{x, y, z\}$ induisant un P_3 (avec les arêtes xy et yz), ajoutons à l'ensemble identifiant le disque $D_{x,y}$ de rayon $1/2$ qui contient x et y et le disque $D_{y,z}$ qui contient y et z . Comme xy et yz sont des arêtes de G , ces disques existent et contiennent exactement deux points. De plus, x est le seul point couvert uniquement par $D_{x,y}$, z est le seul point couvert uniquement par $D_{y,z}$ et y est le seul point couvert à la fois par $D_{x,y}$ et $D_{y,z}$. On obtient donc bien un ensemble identifiant de taille $2n/3$.

Supposons à présent qu'il y ait un ensemble de disques \mathcal{D} identifiant $V(G)$ avec $2n/3$ disques. Comme les points sont à distance au moins 1, chaque disque contient au plus deux points. Sans perdre en généralité, on peut supposer que si un disque ne contient qu'un point alors ce point n'est pas inclus dans d'autres disques. En effet, supposons qu'il y ait deux points x et y et deux disques D_1 et D_2 tels que D_1 contienne x et y et que D_2 ne contienne que x , on peut alors remplacer D_1 par D'_1 qui ne contient que y et la situation est similaire, $V(G)$ étant identifié par le même nombre de disques.

Soit a le nombre de disques qui ne contiennent qu'un seul point. Soit V' les $n - a$ points qui ne sont pas couverts par ces a disques. Soit G' le graphe d'ensemble de sommets V' et où deux sommets sont adjacents si et seulement si ils sont contenus dans un même disque de \mathcal{D} . Remarquons que G' est un sous-graphe de G . Le graphe G' a $n - a$ sommets et ses composantes connexes ont au moins trois sommets. En effet, si une composante avait deux sommets alors elle ne serait pas identifiée par \mathcal{D} . Il y a donc $k \leq (n - a)/3$ composantes connexes. On nomme ces composantes $\{G_1, \dots, G_k\}$. Le nombre d'arêtes de G' est $\sum_{i=1}^k |E(G_i)| \geq \sum_{i=1}^k (|V(G_i)| - 1) = (n - a) - k \geq 2(n - a)/3$.

Soit un disque ne contient qu'un seul point (et il y a a disques de cette sorte), soit il est une arête de G' , il y a donc au moins $a + 2(n - a)/3 = 2n/3 + 2a/3$ disques dans \mathcal{D} . On a donc $a = 0$ et il y a exactement $n/3$ composantes connexes dans G' , chacune étant d'ordre 3. Il s'agit d'une P_3 -partition de G . □

Cependant, dans le cas où les points de \mathcal{P} sont alignés, il existe un algorithme linéaire qui calcule une solution optimale de MIN IDENTIFICATION-DISK(r), comme nous allons le voir dans le reste de cette partie. Notons que si les disques devaient être centrés sur les points, le problème

serait équivalent au problème des codes identifiants pour les graphes d'intervalles unitaires, dont la complexité est toujours ouverte [59]. Dans notre cas, les centres peuvent être placés n'importe où dans \mathbb{R}^2 .

Avant de donner notre algorithme, nous avons besoin de quelques définitions et lemmes préliminaires. Soit \mathcal{P} un ensemble de n points alignés sur une droite L . Soit x_1, \dots, x_n les points de \mathcal{P} . On identifie x_i à son abscisse sur L et on suppose que $x_1 < \dots < x_n$. Notons que, comme les points sont alignés et que les centres des disques peuvent être situés dans tout le plan, pour un ensemble $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, il existe un disque de rayon r qui contient les points de \mathcal{P}' et aucun autre point de \mathcal{P} si et seulement si les points de \mathcal{P}' sont consécutifs et distants d'au plus $2r$.

Soit \mathcal{D} un ensemble de disques de rayon r identifiant \mathcal{P} . Les disques de \mathcal{D} partitionnent les points de \mathcal{P} en *composantes connexes* : deux sommets x_s et x_t sont dans la même composante connexe si pour tout i entre s et $t - 1$, x_i et x_{i+1} appartiennent à un même disque de \mathcal{D} . Notons $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$ les différentes composantes connexes de \mathcal{P} et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r$ les parties de \mathcal{D} induites, avec \mathcal{D}_i l'ensemble des disques contenant des points de \mathcal{P}_i (il est facile de voir que, d'après cette définition, un disque ne peut contenir que des points de la même composante connexe). Clairement \mathcal{D}_i identifie \mathcal{P}_i .

Notre algorithme trouve une solution optimale de MIN IDENTIFICATION-DISK(r) qui a une forme particulière, appelée *régulière*. Un ensemble de disques \mathcal{D} identifiant \mathcal{P} est *régulier* si

1. Toute composante connexe de \mathcal{P} formée par \mathcal{D} est de taille impaire.
2. Si une composante connexe est constituée d'un unique sommet x_s , un seul disque de \mathcal{D} contient x_s (et uniquement x_s).
3. Si $x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+k-1}$ est une composante connexe de taille $k \geq 2$, alors les disques contenant ces points sont exactement les disques contenant :
 - $\{x_s, x_{s+1}\}$,
 - $\{x_{s+k-2}, x_{s+k-1}\}$,
 - $\{x_{s+i}, x_{s+i+1}, x_{s+i+2}\}$ pour i impair avec $1 \leq i \leq k - 3$.

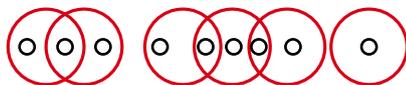


FIGURE 5.17 – Un ensemble de disques régulier identifiant des points alignés.

En particulier, le nombre de disques dans chaque composante connexe est exactement $(k+1)/2$ avec k la taille de la composante, ce qui est une façon optimale d'identifier la composante. Voir la Figure 5.17 pour un exemple. Nous prouvons qu'il existe toujours une solution optimale qui est régulière.

Lemme 5.18. *Soit \mathcal{P} un ensemble de points alignés. Il existe un ensemble optimal de disques de rayon r identifiant \mathcal{P} qui est régulier.*

Démonstration. On prouve d'abord qu'il y a une solution où chaque composante connexe est de taille impaire et est couverte par exactement $(k+1)/2$ disques où k est la taille de la composante. Soit \mathcal{D} un ensemble minimum de disques de rayon r qui identifie \mathcal{P} . On choisit \mathcal{D} qui minimise la somme du nombre de points contenus dans chaque disque, noté $f(\mathcal{D}) : f(\mathcal{D}) = \sum_{D \in \mathcal{D}} |D \cap \mathcal{P}|$.

Supposons qu'il y ait une composante connexe \mathcal{P}_i de taille k et pour laquelle l'ensemble de disque \mathcal{D}_i n'est pas de taille $\frac{k+1}{2}$, ce qui est possible si les points sont trop éloignés. Comme \mathcal{D}_i identifie \mathcal{P}_i , et comme \mathcal{P}_i contient des points alignés, cela signifie que \mathcal{D}_i est de taille au moins $\frac{k+2}{2}$. En particulier, d'après la preuve du théorème 5.5, il y a deux disques D_1 et D_2 dont les périmètres intersectent L tous les deux entre la même paire de points adjacents de \mathcal{P}_i , tous les deux avant tous les points de \mathcal{P}_i , ou tous les deux après tous les points de \mathcal{P}_i . Soit x_a, x_{a+1}, \dots, x_b les points couverts par D_1 et x_c, x_{c+1}, \dots, x_d les points couverts par D_2 . Sans perdre en généralité, on suppose $a \leq c$. D'après la remarque précédente, on a $a = c$, $b = d$ ou $c = b + 1$.

Cas 1 : $a = c$ (le cas $b = d$ est similaire). Supposons $d \leq b$ sans perdre en généralité. Soit D'_1 un disque de rayon r qui contient les points de x_{a+1} à x_b , un tel disque existe car son intersection avec \mathcal{P} est incluse dans $D_1 \cap \mathcal{P}$. Alors $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \{D_1\} \cup \{D'_1\}$ identifie \mathcal{P} . En effet,

le seul point de \mathcal{P} pour lequel la situation est différente entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' est x_a . Pour \mathcal{D}' c'est le seul point de \mathcal{P} qui est couvert par D_2 mais qui ne l'est pas par D_1' . On a donc un ensemble de disques qui identifie \mathcal{P} et tel que $f(\mathcal{D}') < f(\mathcal{D})$. C'est une contradiction avec la propriété de minimalité de \mathcal{D} .

Cas 2 : $c = b + 1$. Comme x_b et $x_c = x_{b+1}$ sont dans la même composante connexe, il existe un disque D_3 dans \mathcal{D} tel que D_3 contient x_b et $x_c = x_{b+1}$. Soit x_e le premier point de \mathcal{P} couvert par D_3 et x_f le dernier point.

Si nécessaire, il est possible de changer des disques de \mathcal{D} sans changer la somme $f(\mathcal{D})$ et d'avoir $a < e \leq b < f < d$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas et qu'on ait $e < a$. Soit D_1' un disque de rayon r qui contient les points de x_e à x_b . Un tel disque existe car ces points sont contenus dans D_3 qui est aussi de rayon r . Soit D_3' un disque de rayon r qui contient les points de x_a à x_f . Un tel disque existe car ces points sont contenus dans D_3 . L'ensemble de disques $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \{D_1, D_3\} \cup \{D_1', D_3'\}$ identifie \mathcal{P} . En effet, les seuls points de \mathcal{P} pour lesquels la situation est différente sont ceux compris entre x_e et x_{a-1} . Ils sont toujours séparés entre eux par les mêmes disques qui les séparaient dans \mathcal{D} et ils sont séparés de tous les autres points car ce sont les seuls points de \mathcal{P} qui sont dans D_1' mais qui ne sont pas dans D_3' . On a $f(\mathcal{D}) = f(\mathcal{D}')$ et les rôles de x_a et x_e ont été échangés. La même opération peut être effectuée si $d < f$. Si $a = e$ ou $f = d$, nous sommes dans le cas 1. Ainsi, on peut supposer $a < e \leq b < f < d$. Soit D_1' un disque de rayon r qui contient les points de x_a à x_{b-1} , un tel disque existe car il contient un sous-ensemble des points contenus par D_1 , et soit $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \{D_1\} \cup \{D_1'\}$. Alors, le seul point de \mathcal{D}' pour lequel la situation est différente est x_b et il est bien couvert et séparé de tous les autres points car c'est le seul point de D_3 qui n'est ni dans D_1' ni dans D_2 . \mathcal{D}' identifie donc \mathcal{P} et $f(\mathcal{D}') < f(\mathcal{D})$, cela contredit la propriété de minimalité de \mathcal{D} .

Ainsi, il y a une solution \mathcal{D} dans laquelle chaque composante connexe \mathcal{P}_i est identifiée par un ensemble de disques D_i de taille $\frac{|\mathcal{P}_i|+1}{2}$. En particulier, \mathcal{P}_i est de taille impaire. Considérons à présent une composante \mathcal{P}_i avec son ensemble identifiant \mathcal{D}_i de taille $\frac{|\mathcal{P}_i|+1}{2}$. Soit $x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+k-1}$ ses points (k est impair). Il suffit à présent de prouver que l'on peut remplacer les disques de \mathcal{D}_i par une solution régulière. Autrement dit, nous devons prouver que les ensembles de points décrits dans la définition d'une solution régulière sont bien tous de largeur au plus $2r$.

Si $k = 1$ nous avons fini car \mathcal{D}_i contient un seul disque. Supposons donc $k > 1$. Comme x_s et x_{s+1} sont des points consécutifs de la même composante connexe, cela signifie qu'il y a un disque de rayon r qui contient ces deux points. Ils sont donc distants d'au plus $2r$. Le même argument s'applique aux points x_{s+k-2}, x_{s+k-1} .

Nous prouvons maintenant que x_{s+j} et x_{s+j+2} sont distants d'au plus $2r$, pour tout j impair tel que $1 \leq j \leq k - 3$. Supposons que ce ne soit pas le cas et que pour un certain j impair x_{s+j} et x_{s+j+2} sont à une distance strictement plus grande que $2r$. Soit $\mathcal{P}_i^1 = \{x_s, \dots, x_{s+j}\}$ et $\mathcal{P}_i^2 = \{x_{s+j+2}, \dots, x_{s+k-1}\}$. Soit \mathcal{D}_i^1 (respectivement \mathcal{D}_i^2) le sous-ensemble de disques de \mathcal{D}_i qui contient au moins un point de \mathcal{P}_i^1 (resp. \mathcal{P}_i^2). L'intersection entre \mathcal{D}_i^1 et \mathcal{D}_i^2 est vide car la distance entre x_{s+j} et x_{s+j+2} est plus grande que $2r$. D'après le théorème 5.5, comme \mathcal{D}_i^1 identifie \mathcal{P}_i^1 et comme j est impair :

$$|\mathcal{D}_i^1| \geq \left\lceil \frac{|\mathcal{P}_i^1| + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{j + 2}{2} \right\rceil = \frac{j + 3}{2}.$$

De la même façon on peut prouver que $|\mathcal{D}_i^2| \geq \frac{k-j}{2}$ et donc $|\mathcal{D}_i| \geq |\mathcal{D}_i^1| + |\mathcal{D}_i^2| \geq \frac{k+3}{2}$. Il s'agit d'une contradiction, car \mathcal{D}_i contient exactement $\frac{k+1}{2}$ disques. \square

Grâce à ce résultat, nous pouvons à présent résoudre MIN IDENTIFICATION-DISK(r) dans le cas où les points sont alignés.

Théorème 5.19 (G. et Parreau, 2019 [66]). *MIN IDENTIFICATION-DISK(r) peut être résolu en temps linéaire si \mathcal{P} est un ensemble de points alignés.*

Démonstration. L'algorithme 1 construit un ensemble régulier de disques identifiant avec la propriété qu'une composante connexe induite par la solution est la plus grande composante possible contenant son premier point. En commençant avec x_1 , l'algorithme ajoute des disques correspondants à une solution régulière jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. Puis il fait de même avec les sommets restants. Notons que si x_1, \dots, x_s est la plus grande composante possible contenant x_1 , on doit être dans l'un des cas suivants :

1. $s = 1$ et donc soit x_1 et x_2 sont à une distance plus grande que $2r$, soit x_2 et x_3 sont à une distance plus grande que $2r$, et par la propriété 1 de la régularité x_1 et x_2 ne peuvent pas former une composante.
2. $s > 1$, et donc x_{s-1} et x_{s+1} sont à une distance plus grande que $2r$ ou x_{s+1} et x_{s+2} sont à une distance plus grande que $2r$.

Ces cas correspondent aux conditions de notre algorithme.

Algorithme 1 Algorithme résolvant MIN IDENTIFICATION-DISK(r) en temps linéaire pour un ensemble de points alignés

Entrée : Les abscisses x_1, \dots, x_n d'un ensemble de points alignés \mathcal{P}

Sortie : Un ensemble régulier minimum de disques identifiant \mathcal{P} .

```

i ← 0
 $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$ 
 $x_{n+1} \leftarrow \infty, x_{n+2} \leftarrow \infty, x_{n+3} \leftarrow \infty$ 
tant que  $i \leq n$  faire
    // Début d'une nouvelle composante
    si  $x_{i+1} - x_i > 2r$  ou  $x_{i+2} - x_{i+1} > 2r$  alors
        // Composante de taille 1
        Ajout à  $\mathcal{D}$  d'un disque qui ne contient que  $x_i$ 
         $i \leftarrow i + 1$ 
    sinon
        // Composante de taille plus grande que 1
        Ajout à  $\mathcal{D}$  d'un disque qui contient uniquement  $x_i$  et  $x_{i+1}$ 
         $i \leftarrow i + 1$ 
        //  $i$  devient l'avant-dernier point potentiel de la composante
        tant que  $x_{i+2} - x_i \leq 2r$  et  $x_{i+3} - x_{i+2} \leq 2r$  faire
            Ajout à  $\mathcal{D}$  d'un disque qui contient uniquement  $x_i, x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$ 
             $i \leftarrow i + 2$ 
        fin tant que
        // Fin de la composante
        Ajout à  $\mathcal{D}$  d'un disque qui contient uniquement  $x_i$  et  $x_{i+1}$ 
         $x_i \leftarrow x_{i+2}$ 
    fin si
fin tant que

```

Prouvons à présent que la solution est optimale. D'après le lemme 5.18, il existe une solution optimale régulière \mathcal{D}^{opt} . Soit $\mathcal{P}_1^{opt}, \dots, \mathcal{P}_r^{opt}$ la partition de \mathcal{P} induite par \mathcal{D}^{opt} . Soit $\mathcal{P}_1^A, \dots, \mathcal{P}_t^A$ la partition de \mathcal{P} induite par la solution \mathcal{D}^A retournée par notre algorithme. Comme les deux solutions sont régulières, le nombre de disques est complètement déterminé par le nombre de composantes connexes. Ainsi, il est suffisant de montrer que $t = r$. Nous savons déjà que $r \leq t$.

Soit y_i (respectivement z_i) le dernier point de \mathcal{P}_i^{opt} (resp. \mathcal{P}_i^A), pour i entre 1 et r (resp. t). On a $y_r = z_t = x_n$. Nous allons prouver que pour tout $i \leq r$, la composante i de la solution optimale finit avant ou au même emplacement que la composante i de la solution donnée par l'algorithme, c'est-à-dire $y_i \leq z_i$. Cela terminera la preuve car cela signifie que $z_r = x_n$ et donc que \mathcal{P}_r^A est la dernière composante.

De par notre algorithme, on a $y_1 \leq z_1$ puisque nous prenons la plus grande composante possible. Supposons que $y_{i-1} \leq z_{i-1}$ pour $i > 1$. Comme les deux solutions sont régulières, les composantes connexes sont de taille impaire et donc y_i (respectivement z_i) correspond à un sommet x_j avec j et i de même parité. Soit $x_j = z_i$. Si $y_i > z_i$, cela signifie que z_i est un point de \mathcal{P}_i^{opt} mais pas le dernier point, et pour des raisons de parité, il doit y avoir un disque contenant (au moins) z_i et x_{j+1} et un disque contenant (au moins) x_{j+1} et x_{j+2} .

Cependant, l'algorithme arrête la composante connexe sur $x_j = z_i$. Si z_i est le seul élément de cette composante c'est soit parce que z_i et x_{j+1} sont espacés d'une distance plus grande que $2r$ soit parce que x_{j+1} et x_{j+2} sont espacés d'une distance d'au moins $2r$, ce qui est une contradiction. Si z_i n'est pas le seul élément de la composante, l'algorithme s'arrête car x_{j-1} et x_{j+1} ou x_{j+1} et x_{j+2} sont espacés de plus de $2r$, ce qui est encore une contradiction. Ainsi, $y_i \leq z_i$ et par induction c'est vrai pour tout $i \leq r$. Autrement dit, chaque composante connexe

\mathcal{P}_i^{opt} finit avant ou au même moment que la composante correspondante \mathcal{P}_i^A , ce qui inclut la dernière composante. Ainsi, il y a le même nombre de composantes et l'algorithme 1 est optimal. Enfin, cet algorithme est linéaire car chaque sommet n'est considéré qu'au plus une fois. \square

5 Conclusion et perspectives

Au cours de ce chapitre nous avons introduit le problème d'identification de points dans le plan par des disques. Après avoir donné des résultats exacts pour des points alignés et des points situés sur une ligne de largeur 2, et des bornes pour des points situés sur une grille quelconque, nous avons étudié le cas général et avons donné une borne supérieure de l'ordre de $n/3$ pour des points en position générale. Puis, nous avons étudié la complexité dans le cas où le rayon des points est fixé et avons montré que le cas général est NP-complet et que l'on peut trouver en temps linéaire le nombre exact de disques nécessaires si les points sont alignés.

Nous ne savons pas encore si le problème est NP-complet lorsque le rayon des disques est libre mais le contraire serait surprenant. Une autre question intéressante est celle du nombre de disques nécessaires à identifier n points disposés aléatoirement (avec une distribution uniforme) dans un carré de côté 1.

Pour quitter la problématique des disques, dans leur article, Gerbener et Tóth [61] étudient la séparation par des formes convexes quelconques. Il serait intéressant d'essayer d'adapter nos résultats à des formes convexes arbitraires. En particulier, la VC-dimension duale pourrait nous permettre d'obtenir une borne inférieure et notre algorithme utilisant la triangulation de Delaunay pourrait possiblement être adapté à ces formes en utilisant la métrique liée à la forme convexe et en créant une triangulation de Delaunay associée.

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié différents problèmes liés à la couverture de sommets.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au problème de la domination de puissance sur les grilles (chapitre 2). Nous donnons la valeur exacte du nombre de domination de puissance des grilles triangulaires à bords triangulaires et une borne supérieure pour le cas des grilles de dimension 3.

Nous nous sommes ensuite penchés sur le jeu de domination Maker-Breaker (chapitre 3). Pour ce jeu, nous cherchons à connaître quel joueur dispose d'une stratégie gagnante mais aussi combien de coups sont nécessaires pour dominer le graphe si Dominator gagne. Nous montrons que ces problèmes sont PSPACE-complets dans le cas des graphes bipartis et des graphes cordaux mais qu'ils sont de complexité polynomiale sur les arbres. Nous prouvons aussi que déterminer l'issue est polynomial sur les cographes. Afin d'étudier ce jeu, nous introduisons la notion d'ensemble dominant par appariement et nous avons montré que déterminer si un graphe admettait un ensemble dominant par appariement était NP-complet. Nous introduisons aussi deux variantes du jeu de domination Maker-Breaker : le jeu de domination totale Maker-Breaker et le jeu de domination Avoïder-Enforcer. Nous montrons que résoudre le jeu de domination totale est polynomial sur les cactus et que résoudre le jeu de domination Avoïder-Enforcer est polynomial sur les arbres.

Ensuite, nous avons étudié le nombre géodésique fort d'un graphe (chapitre 4). Nous donnons d'abord la valeur du nombre géodésique fort des graphes bipartis complets. Puis, nous introduisons le concept de noyau géodésique fort, qui correspond à une notion d'"efficacité" d'un ensemble géodésique fort. Nous étudions ensuite le nombre géodésique fort pour le produit cartésien de chemins et nous utilisons le noyau géodésique fort pour améliorer une borne existante. Nous donnons ensuite des bornes pour un cas particulier de produit cartésien, les hypercubes.

Enfin, nous avons orienté nos recherches vers l'identification de points dans le plan par des disques (chapitre 5). Après avoir donné des valeurs exactes et des bornes pour certaines dispositions particulières, nous avons étudié des bornes dans le cas général. En particulier, nous donnons une borne supérieure de l'ordre de $\frac{n}{3}$ lorsqu'il n'y a pas trois points alignés ni quatre points cocycliques. Enfin, nous avons étudié la complexité de ce problème dans le cas où le rayon des disques est fixé : nous prouvons que ce problème est NP-complet lorsque qu'il n'y a pas de contrainte sur la position des points mais qu'il est linéaire si les points sont alignés.

Certains des problèmes abordés dans ce manuscrit amènent des questions qu'il serait intéressant d'approfondir dans la continuité de cette thèse. Parmi les questions les plus intéressantes figurent :

- Trouver la valeur (au moins asymptotique) du nombre de domination de puissance des grilles de dimensions 3 et supérieures.
- Déterminer la complexité du jeu de domination Maker-Breaker sur les graphes d'intervalles.
- Étudier le lien entre les ensembles dominants par appariement et le jeu de domination Maker-Breaker. En particulier, il serait intéressant d'étudier les graphes qui ont pour issue \mathcal{D} si et seulement si ils admettent un ensemble dominant par appariement.
- Poursuivre l'étude du jeu de domination Avoïder-Enforcer et observer ses liens avec le jeu de domination Maker-Breaker. En effet, pour les graphes que nous avons étudiés, si on compare les issues des jeux de domination Avoïder-Enforcer et Maker-Breaker, les graphes d'issue \mathcal{E} ont pour issue \mathcal{D} , ceux d'issue \mathcal{SL} ont pour issue \mathcal{N} et ceux d'issue \mathcal{A} ont pour issue \mathcal{S} . Il serait intéressant de caractériser les graphes pour lesquels cette équivalence entre les issues reste vraie.

- Étudier la complexité du problème ENSEMBLE GÉODÉSIQUE FORT consistant à savoir si un ensemble donné de sommets d'un graphe est un ensemble géodésique fort de ce graphe.
- Trouver une borne inférieure en fonction du nombre géodésique fort des graphes de départ pour le nombre géodésique fort du produit cartésien de graphes.
- Trouver la complexité du problème consistant à déterminer la valeur de $\gamma_D^{ID}(P)$ dans le cas général.
- Étudier les ensembles de disques identifiants pour des points disposés aléatoirement selon une distribution uniforme dans un carré de côté 1.
- Étudier l'identification par d'autres formes convexes que les disques et, en particulier, tenter d'appliquer la méthode du théorème 5.13 à d'autres formes.

Concernant des perspectives à plus long terme, en plus de continuer l'étude des sujets présentés dans ce manuscrit, j'aimerais beaucoup étudier d'autres jeux positionnels sur les graphes avec une approche combinatoire. En particulier, je pense que les problèmes de couverture de sommets se prêtent particulièrement bien à ce type d'approche.

Enfin, un autre aspect de mon travail de chercheur me semble important et je n'ai pas encore eu l'occasion de l'aborder dans ce manuscrit : la médiation scientifique. Au cours de mes trois années de thèses, j'ai pu, dans le cadre de Maths à Modeler et MATH.en.JEANS, faire pratiquer des ateliers en lien avec mes thèmes de recherches à des élèves de primaire, collèges et lycées. De par l'aspect très visuel de la théorie des graphes, mes thématiques de recherche se prêtent en effet très bien à de la vulgarisation. Cette activité de médiation me semble une part importante du travail de chercheur et je souhaite la développer dans mes futurs environnements de recherche.

Bibliographie

- [1] A. AAZAMI : *Hardness results and approximation algorithms for some problems on graphs*. Thèse de doctorat, University of Waterloo, 2008.
- [2] M. AGRAWAL, N. KAYAL et N. SAXENA : PRIMES is in P. *Annals of mathematics*, 160 :781–793, 2004.
- [3] R. AHARONI et T. SZABÓ : Vizing’s conjecture for chordal graphs. *Discrete Mathematics*, 309(6) :1766–1768, 2009.
- [4] AIM MINIMUM RANK – SPECIAL GRAPHS WORK GROUP : Zero forcing sets and the minimum rank of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 428(7) :1628–1648, 2008.
- [5] N. ALON, J. BALOGH, B. BOLLOBÁS et T. SZABÓ : Game domination number. *Discrete Mathematics*, 256(1-2) :23–33, 2002.
- [6] K. APPEL et W. HAKEN : Every planar map is four colorable. part I : Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3) :429–490, 1977.
- [7] E. M. ARKIN, F. HURTADO, J. S. B. MITCHELL, C. SEARA et S. S. SKIENA : Some separability problems in the plane. *In Proc of the 16-th European Workshop on Computational Geometry*, pages 51–54, 2000.
- [8] D. ARTIGAS, S. DANTAS, M. C. DOURADO et J. L. SZWARCFITER : Partitioning a graph into convex sets. *Discrete Mathematics*, 311(17) :1968–1977, 2011.
- [9] M. ATICI : Computational complexity of geodesic set. *International Journal of Computer Mathematics*, 79(5) :587–591, 2002.
- [10] K. BALAKRISHNAN, B. BREŠAR, M. CHANGAT, W. IMRICH, S. KLAVŽAR, M. KOVŠE et A. R. SUBHAMATHI : On the remoteness function in median graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(18) :3679–3688, 2009.
- [11] T. L. BALDWIN, L. MILI, M. B. BOISEN et R. ADAPA : Power system observability with minimal phasor measurement placement. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(2) :707–715, 1993.
- [12] A. M. BARCALKIN et L. F. GERMAN : The external stability number of the Cartesian product of graphs. *Bul. Akad. Stiinte RSS Moldoven*, 1976.
- [13] R. BARRERA et D. FERRERO : Power domination in cylinders, tori, and generalized Petersen graphs. *Networks*, 58(1) :43–49, 2010.
- [14] L. BEAUDOU, P. DANKELMANN, F. FOUCAUD, M. A. HENNING, A. MARY et A. PARREAU : Bounding the order of a graph using its diameter and metric dimension : A study through tree decompositions and VC dimension. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 32(2) :902–918, 2018.
- [15] J. BECK : Foundations of positional games. *Random Structures and Algorithms*, 9(1-2) :15–47, 1996.
- [16] J. BECK : *Combinatorial Games : Tic-Tac-Toe Theory*. Cambridge Univ Pr, 2008.
- [17] K. F. BENSON, D. FERRERO, M. FLAGG, V. FURST, L. HOGBEN, V. VASILEVSKA et B. WISSMAN : Zero forcing and power domination for graph products. *The Australasian Journal of Combinatorics*, 70 :221–235, 2018.
- [18] C. BERGE : *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, 1958.
- [19] R. VAN BEVERN, R. BREDERECK, L. BULTEAU, J. CHEN, V. FROESE, R. NIEDERMEIER et G. J. WOEGERING : Star partitions of perfect graphs. *In International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 174–185. Springer, 2014.

- [20] R. P. BOLAND et J. URRUTIA : Separating collections of points in euclidean spaces. *Information Processing Letters*, 53 :177–183, 1995.
- [21] J. A. BONDY et U. S. R. MURTY : *Graph Theory*. Springer London, 2011.
- [22] P. BOSE, V. GLEDEL, C. PENNARUN et S. VERDONSCHOT : Power domination on triangular grids with triangular and hexagonal shape. HAL 01814346.
- [23] N. BOUSQUET, A. LAGOUTTE, Z. LI, A. PARREAU et S. THOMASSÉ : Identifying codes in hereditary classes of graphs and VC-dimension. *Siam Journal on Discrete Mathematics*, 29(4) :2047–2064, 2015.
- [24] B. BREŠAR, P. DORBEC, S. KLAVŽAR, G. KOŠMRLJ et G. RENAULT : Complexity of the game domination problem. *Theoretical Computer Science*, 648 :1–7, 2016.
- [25] B. BREŠAR et A. T. HORVAT : On the geodetic number of median graphs. *Discrete Mathematics*, 308(18) :4044–4051, 2008.
- [26] B. BREŠAR, S. KLAVŽAR et A. T. HORVAT : On the geodetic number and related metric sets in Cartesian product graphs. *Discrete Mathematics*, 308(23) :5555–5561, 2008.
- [27] B. BREŠAR, S. KLAVŽAR, G. KOŠMRLJ et D. F. RALL : Domination game : Extremal families of graphs for 3/5-conjectures. *Discrete Applied Mathematics*, 161(10-11) :1308–1316, 2013.
- [28] B. BREŠAR, S. KLAVŽAR et D. F. RALL : Domination game and an imagination strategy. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 24(3) :979–991, 2010.
- [29] B. BREŠAR, S. KLAVŽAR et D. F. RALL : Domination game played on trees and spanning subgraphs. *Discrete Mathematics*, 313(8) :915–923, 2013.
- [30] B. BREŠAR et D. F. RALL : Fair reception and Vizing’s conjecture. *Journal of Graph Theory*, 61(1) :45–54, 2009.
- [31] F. BUCKLEY, F. HARARY et L. V. QUNTAS : Extremal results on the geodetic number of a graph. 1988.
- [32] L. R. BUENO, L. D. PENSO, F. PROTTI, V. R. RAMOS, D. RAUTENBACH et U. S. SOUZA : On the hardness of finding the geodetic number of a subcubic graph. *Information Processing Letters*, 135 :22–27, 2018.
- [33] C. BUJTÁS et Z. TUZA : The disjoint domination game. *Discrete Mathematics*, 339(7) :1985–1992, 2016.
- [34] D. BURGARTH et V. GIOVANNETTI : Full control by locally induced relaxation. *Physical Review Letters*, 99(10), 2007.
- [35] G. CĂLINESCU, A. DUMITRESCU, H. KARLOFF et P.-J. WAN : Separating points by axis-parallel lines. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 15(06) :575–590, 2005.
- [36] J. G. CEDER : Generalized sixpartite problems. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 9 :28–32, 1964.
- [37] G.-B. CHAE, E. M. PALMER et W.-C. SIU : Geodetic number of random graphs of diameter 2. *Australasian Journal of Combinatorics*, 26 :11–20, 2002.
- [38] T. Y. CHANG : *Domination numbers of grid graphs*. Thèse de doctorat, University of South Florida, 1992.
- [39] G. CHARTRAND, F. HARARY et P. ZHANG : On the geodetic number of a graph. *Networks*, 39(1) :1–6, 2001.
- [40] V. CHVÁTAL et P. ERDÖS : Biased positional games. In *Algorithmic Aspects of Combinatorics*, pages 221–229. Elsevier, 1978.
- [41] E. J. COCKAYNE, R. M. DAWES et S. T. HEDETNIEMI : Total domination in graphs. *Networks*, 10(3) :211–219, 1980.
- [42] S. A. COOK : The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing - STOC '71*. ACM Press, 1971.
- [43] D. G. CORNEIL, Y. PERL et L. K. STEWART : A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14(4) :926–934, 1985.
- [44] D. G. CORNEIL et L. K. STEWART : Dominating sets in perfect graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1-3) :145–164, 1990.

- [45] A. DAILLY, V. GLEDEL et M. HEINRICH : A generalization of arc-kayles. *International Journal of Game Theory*, 48(2) :491–511, 2018.
- [46] N. DEAN, A. ILIC, I. RAMIREZ, J. SHEN et K. TIAN : On the power dominating sets of hypercubes. In *2011 14th IEEE International Conference on Computational Science and Engineering*. IEEE, 2011.
- [47] O. DEVILLERS, F. HURTADO, M. MORA et C. SEARA : Separating several point sets in the plane. In *In Proc. 13th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 81–84, 2001.
- [48] I. DINUR et D. STEURER : Analytical approach to parallel repetition. In *Proceedings of the 46th Annual ACM Symposium on Theory of Computing - STOC '14*. ACM Press, 2014.
- [49] P. DORBEC, M. MOLLARD, S. KLAVŽAR et S. ŠPACAPAN : Power domination in product graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(2) :554–567, 2008.
- [50] M. DORFLING et M. A. HENNING : A note on power domination in grid graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 154(6) :1023–1027, 2006.
- [51] M. C. DOURADO, F. PROTTI, D. RAUTENBACH et J. L. SZWARCFITER : Some remarks on the geodetic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 310(4) :832–837, 2010.
- [52] E. DUCHÊNE, V. GLEDEL, A. PARREAU et G. RENAULT : Maker-Breaker domination game. arXiv :1807.09479.
- [53] H. EDELSBRUNNER, J. O’ROURKE et R. SEIDEL : Constructing arrangements of lines and hyperplanes with applications. *SIAM Journal on Computing*, 15(2) :341–363, 1986.
- [54] P. ERDÖS et J. L. SELFRIDGE : On a combinatorial game. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 14(3) :298–301, 1973.
- [55] D. FERRERO, S. VARGHESE et A. VIJAYAKUMAR : Power domination in honeycomb networks. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 14(6) :521–529, 2011.
- [56] D. C. FISHER : The domination number of complete grid graphs. Preprint, 1993.
- [57] S. FORTUNE : A sweepline algorithm for voronoi diagrams. In *Proceedings of the Second Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG ’86, pages 313–322, New York, NY, USA, 1986. ACM.
- [58] S. FORTUNE : A sweepline algorithm for voronoi diagrams. *Algorithmica*, 2 :153–174, 1987.
- [59] F. FOUCAUD, G. B. MERTZIOS, R. NASERASR, A. PARREAU et P. VALICOV : Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. ii. algorithms and complexity. *Algorithmica*, pages 1–31, 2016.
- [60] M. R. GAREY et D. S. JOHNSON : *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*. WH Freeman and Company, New York, 1979.
- [61] D. GERBNER et G. TÓTH : Separating families of convex sets. *Computational Geometry*, 46(9) :1056–1058, 2013.
- [62] V. GLEDEL, M. A. HENNING, V. IRŠIČ et S. KLAVŽAR : Maker-Breaker total domination game. arXiv :1902.00204, 2019.
- [63] V. GLEDEL et V. IRŠIČ : Strong geodetic number of complete bipartite graphs, crown graphs and hypercubes. arXiv :1810.04004.
- [64] V. GLEDEL, V. IRŠIČ et S. KLAVŽAR : Strong geodetic cores and cartesian product graphs. arxiv :1803.11423.
- [65] V. GLEDEL, V. IRŠIČ et S. KLAVŽAR : Maker–breaker domination number. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42(4) :1773–1789, 2019.
- [66] V. GLEDEL et A. PARREAU : Identification of points using disks. *Discrete Mathematics*, 342(1) :256–269, 2019.
- [67] D. GONÇALVES, A. PINLOU, M. RAO et S. THOMASSÉ : The domination number of grids. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 25(3) :1443–1453, 2011.
- [68] S. GRAVIER : Total domination number of grid graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 121(1-3) :119–128, 2002.

- [69] L. N. GRIPPO, M. MATAMALA, M. D. SAFE et M. J. STEIN : Convex p -partitions of bipartite graphs. *Theoretical Computer Science*, 609 :511–514, 2016.
- [70] F. HARARY, E. LOUKAKIS et C. TSOUROU : The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11) :89–95, 1993.
- [71] B. L. HARTNELL et D. F. RALL : Vizing's conjecture and the one-half argument. *Discusiones Mathematicae Graph Theory*, 15(2) :205, 1995.
- [72] T. W. HAYNES, S. HEDETNIEMI et P. SLATER : *Fundamentals of domination in graphs*. CRC Press, 1998.
- [73] T. W. HAYNES, S. M. HEDETNIEMI, S. T. HEDETNIEMI et M. A. HENNING : Domination in graphs applied to electric power networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 15(4) :519–529, 2002.
- [74] D. HEFETZ, M. KRIVELEVICH, M. STOJAKOVIĆ et T. SZABÓ : Avoider–enforcer : The rules of the game. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 117(2) :152–163, 2010.
- [75] D. HEFETZ, M. KRIVELEVICH, M. STOJAKOVIĆ et T. SZABÓ : *Positional Games*. Springer Basel, 2014.
- [76] P. HELL et D. G. KIRKPATRICK : Packings by cliques and by finite families of graphs. *Discrete Mathematics*, 49(1) :45–59, 1984.
- [77] M. A. HENNING et W. B. KINNERSLEY : Domination game : A proof of the $3/5$ -conjecture for graphs with minimum degree at least two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30(1) :20–35, 2016.
- [78] M. A. HENNING, S. KLAVŽAR et D. F. RALL : Total version of the domination game. *Graphs and Combinatorics*, 31(5) :1453–1462, 2014.
- [79] M. A. HENNING, S. KLAVŽAR et D. F. RALL : The $4/5$ upper bound on the game total domination number. *Combinatorica*, 37(2) :223–251, 2016.
- [80] M. A. HENNING et D. F. RALL : On the total domination number of Cartesian products of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 21(1) :63–69, 2005.
- [81] M. A. HENNING et D. F. RALL : Trees with equal total domination and game total domination numbers. *Discrete Applied Mathematics*, 226 :58–70, 2017.
- [82] W. IMRICH, S. KLAVŽAR et D. F. RALL : *Topics in Graph Theory : Graphs and Their Cartesian Product*. Taylor & Francis Inc, 2008.
- [83] V. IRŠIČ et M. KONVALINKA : Strong geodetic problem on complete multipartite graphs. arxiv :1806.00302.
- [84] V. IRŠIČ : Strong geodetic number of complete bipartite graphs and of graphs with specified diameter. *Graphs and Combinatorics*, 34(3) :443–456, 2018.
- [85] V. IRŠIČ et S. KLAVŽAR : Strong geodetic problem on Cartesian products of graphs. *RAIRO - Operations Research*, 52(1) :205–216, 2018.
- [86] M. S. JACOBSON et L. F. KINCH : On the domination number of products of graphs : I. *Ars Combin*, 18 :33–44, 1983.
- [87] T. JIANG, I. PELAYO et D. PRITIKIN : Geodesic convexity and Cartesian products in graphs. Manuscript, 2004.
- [88] D. S. JOHNSON et M. R. GAREY : *Computers and intractability : A guide to the theory of NP-completeness*. WH Freeman, 1979.
- [89] V. JUNNILA et T. LAIHONEN : Identification in \mathbb{Z}^2 using euclidean balls. *Discrete Applied Mathematics*, 159(5) :335–343, 2011.
- [90] R. M. KARP : Reducibility among combinatorial problems. *In Complexity of computer computations*, pages 85–103. Springer, 1972.
- [91] W. B. KINNERSLEY, D. B. WEST et R. ZAMANI : Extremal problems for game domination number. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(4) :2090–2107, 2013.
- [92] S. KLAVŽAR et P. MANUEL : Strong geodetic problem in grid-like architectures. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 41(3) :1671–1680, 2018.
- [93] F. KOUSHANFAR, S. SLIJEPCEVIC, M. POTKONJAK et A. SANGIOVANNI-VINCENTELLI : Error-tolerant multi-modal sensor fusion. *In In Proc. of IEEE CAS Workshop on Wireless Communication and Networking*, 2002.

-
- [94] A. LEHMAN : A solution of the Shannon switching game. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12(4) :687–725, 1964.
- [95] P. MANUEL, S. KLAVŽAR, A. XAVIER, A. AROKIARAJ et E. THOMAS : Strong geodetic problem in networks. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2018.
- [96] L. MILI, T. BALDWIN et R. ADAPA : Phasor measurement placement for voltage stability analysis of power systems. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 1990.
- [97] J. MONCEL : *Codes identifiants dans les graphes*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.
- [98] B. M. E. MORET et H. D. SHAPIRO : On minimizing a set of tests. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6(4) :983–1003, 1985.
- [99] T. MÜLLER et J.-S. SERENI : Identifying and locating-dominating codes in (random) geometric networks. *Combin. Probab. Comput.*, 18(6) :925–952, 2009.
- [100] A. OKABE, B. BOOTS et K. SUGIHARA : *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1992.
- [101] O. ORE : *Theory of graphs*, volume 38. American Mathematical Society, 1962.
- [102] J. O’ROURKE, S. R. KOSARAJU et N. MEGIDDO : Computing circular separability. *Discrete & Computational Geometry*, 1(1) :105–113, 1986.
- [103] K.-J. PAI et W.-J. CHIU : A note on “on the power dominating sets of hypercubes”. In *29th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, Taipei*, volume 56. Citeseer, 2012.
- [104] T. J. SCHAEFER : On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2) :185–225, 1978.
- [105] A. N. SIEGEL : *Combinatorial Game Theory*. American Mathematical Society, 2013.
- [106] M. SIPSER : *Introduction to the Theory of Computation*. Course Technology, 2012.
- [107] N. J. A. SLOANE : The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Sequence A014206. <http://oeis.org/A014206>.
- [108] V. G. VIZING : Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, 23(6) :125, 1968.
- [109] K. XU, X. LI et S. KLAVŽAR : On graphs with largest possible game domination number. *Discrete Mathematics*, 341(6) :1768–1777, 2018.
- [110] B. YANG : Fast-mixed searching and related problems on graphs. *Theoretical Computer Science*, 507 :100–113, 2013.