# Maker-Breaker Domination Game

Valentin Gledel

Journées Graphes et Algorithmes

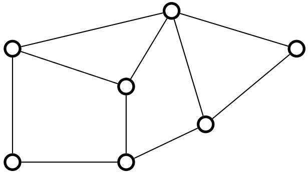
17 Novembre 2017

Avec Eric Duchêne, Aline Parreau, Gabriel Renault and Simon Schmidt

# Jeu de Domination (Brešar, Klavžar and Rall, 2010)

- Deux joueurs: Dominator et Staller
- Choisissent alternativement un sommet du graphe qui domine au moins un nouveau sommet.
- Dominator veut que l'ensemble dominant soit petit.
- Staller veut qu'il soit grand.

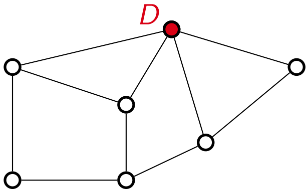
$\gamma_g$ : Taille de l'ensemble dominant obtenu



# Jeu de Domination (Brešar, Klavžar and Rall, 2010)

- Deux joueurs: Dominator et Staller
- Choisissent alternativement un sommet du graphe qui domine au moins un nouveau sommet.
- Dominator veut que l'ensemble dominant soit petit.
- Staller veut qu'il soit grand.

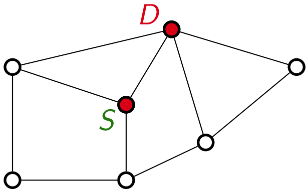
$\gamma_g$ : Taille de l'ensemble dominant obtenu



# Jeu de Domination (Brešar, Klavžar and Rall, 2010)

- Deux joueurs: Dominator et Staller
- Choisissent alternativement un sommet du graphe qui domine au moins un nouveau sommet.
- Dominator veut que l'ensemble dominant soit petit.
- Staller veut qu'il soit grand.

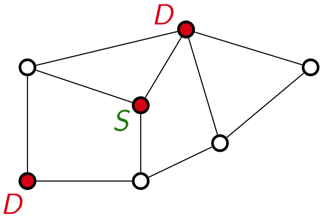
$\gamma_g$ : Taille de l'ensemble dominant obtenu



# Jeu de Domination (Brešar, Klavžar and Rall, 2010)

- Deux joueurs: Dominator et Staller
- Choisissent alternativement un sommet du graphe qui domine au moins un nouveau sommet.
- Dominator veut que l'ensemble dominant soit petit.
- Staller veut qu'il soit grand.

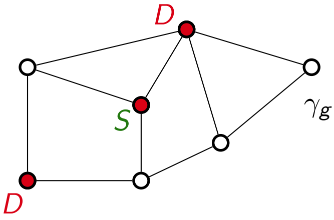
$\gamma_g$ : Taille de l'ensemble dominant obtenu



# Jeu de Domination (Brešar, Klavžar and Rall, 2010)

- Deux joueurs: Dominator et Staller
- Choisissent alternativement un sommet du graphe qui domine au moins un nouveau sommet.
- Dominator veut que l'ensemble dominant soit petit.
- Staller veut qu'il soit grand.

$\gamma_g$ : Taille de l'ensemble dominant obtenu




$\gamma_g(G) = 3$

# Jeu de Domination

Déterminer $\gamma_g$ est *PSPACE*-complet dans le cas général (Brešar et al., 2016).

Deux autres jeux de dominations ont été étudiés :

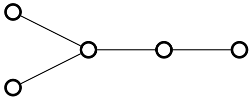
- Game domination number (Alon et al., 2002)
- Disjoint domination number (Bujtás et Tuza, 2014)

Dans ces trois cas, les actions possibles de Dominator et Staller sont les mêmes.

# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

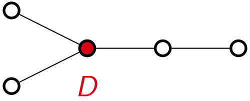
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

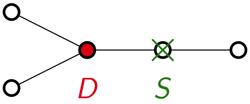
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

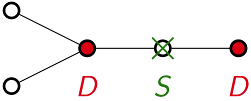
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

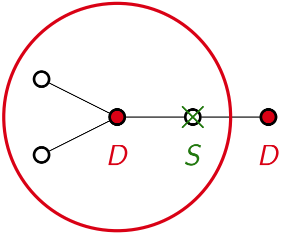
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



## Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

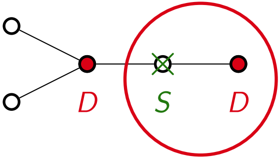
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

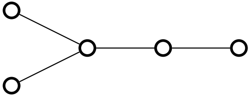
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

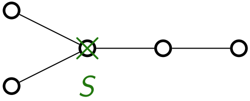
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

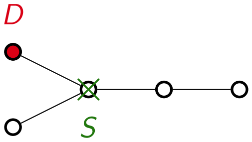
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

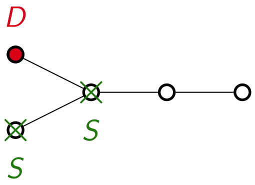
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

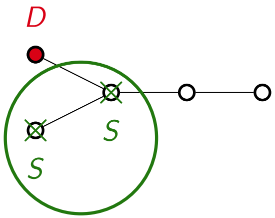
- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Définition

**Maker-Breaker Domination Game**

- Dominator sélectionne des sommets
- Staller interdit des sommets à Dominator
- Si les sommets sélectionnés par Dominator dominent le graphe, il gagne.
- S'il ne peut pas créer d'ensemble dominant, Staller gagne.



# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  | | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | | | |
| Staller commence | | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  | | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| | | | |
|---|---|---|---|
| |  | | |
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  | | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  | | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | Staller | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | Staller | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | Staller | | |

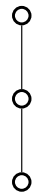
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | | |
| Staller commence | Staller | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | | |

# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | | |

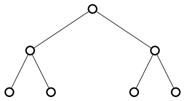
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  | |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | Dominator | |

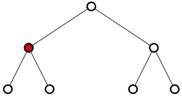
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | Dominator | |

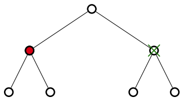
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | Dominator | |

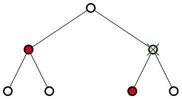
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | Dominator | |

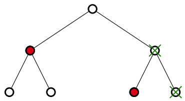
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | |
| Staller commence | Staller | Dominator | |

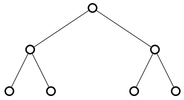
# Jouons !

Qui gagne dans ces situations :

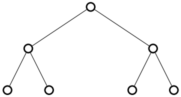
| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | |

# Jouons !

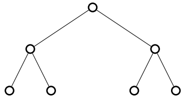
Qui gagne dans ces situations :

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |

# Issues possibles

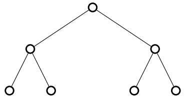
| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |

# Issues possibles

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |

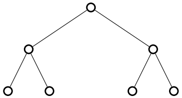
$\mathcal{N}$

# Issues possibles

| | | | |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |

$\mathcal{N}$ $\mathcal{D}$

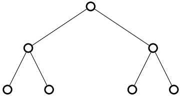
# Issues possibles

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |
| | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{S}$ |

# Issues possibles

**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

| | | | |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |
| | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{S}$ |

# Issues possibles

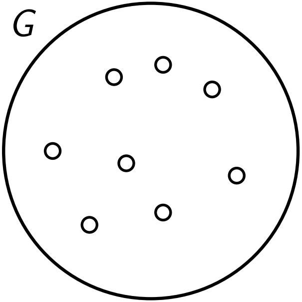
**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:

Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.

Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.



# Issues possibles

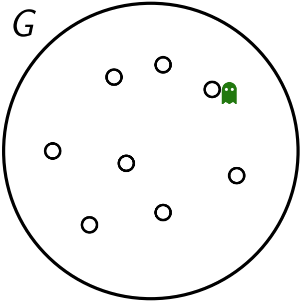
**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:

Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.

Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.

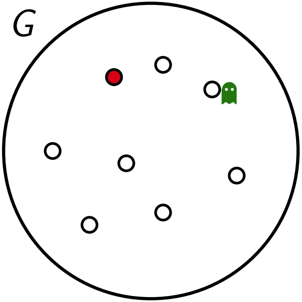


# Issues possibles

**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:
Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.
Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.

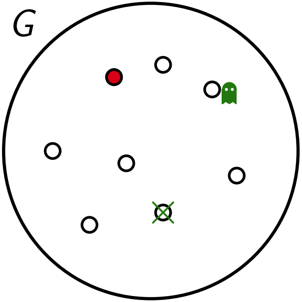


# Issues possibles

**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:
Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.
Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.



# Issues possibles

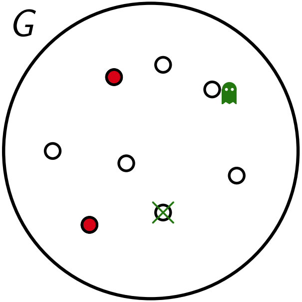
**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:

Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.

Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.



# Issues possibles

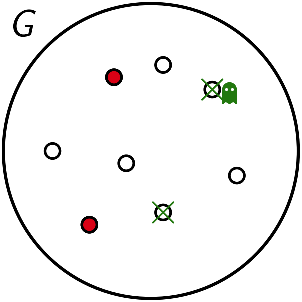
**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:

Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.

Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.

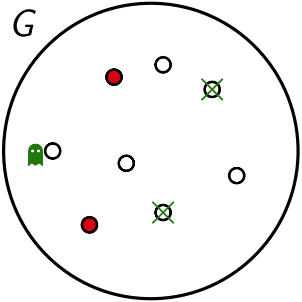


# Issues possibles

**Théorème**

Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

Preuve:
Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.
Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.



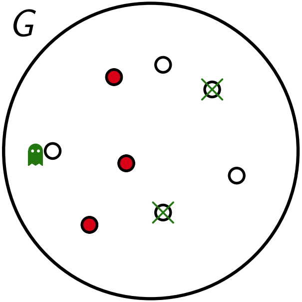
# Issues possibles

**Théorème**

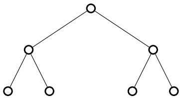
Pour le Maker-Breaker Domination Game, il n'y a pas de graphe où le deuxième joueur gagne toujours, quelque soit son rôle.

<u>Preuve</u>:

Supposons que Dominator gagne en tant que deuxième joueur.
Dominator gagne aussi en tant que premier joueur.



# Problématique

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Dominator commence | Dominator | Dominator | Staller |
| Staller commence | Staller | Dominator | Staller |
| | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{S}$ |

**Maker-Breaker Domination Game**

**Entrée :** Un graphe $G$
**Sortie :** L'issue du jeu : $\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{S}$

# Graphes non connexes

Table des issues d'union de graphes :

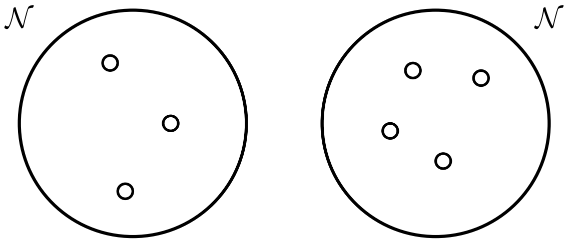
| $\cup$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{D}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{N}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |

# Graphes non connexes

Table des issues d'union de graphes :

| $\cup$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{D}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{N}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |

Idée pour $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}$:

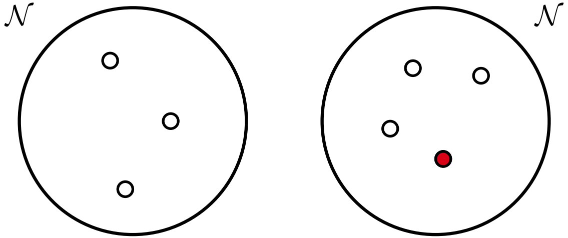


# Graphes non connexes

Table des issues d'union de graphes :

| $\cup$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{D}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{N}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |

Idée pour $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}$:

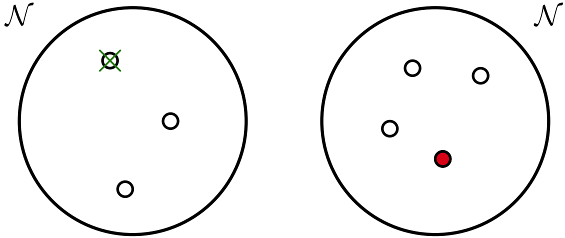


# Graphes non connexes

Table des issues d'union de graphes :

| $\cup$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{D}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{N}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |
| $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |

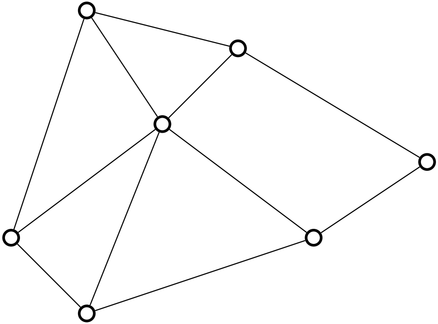
Idée pour $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}$:



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

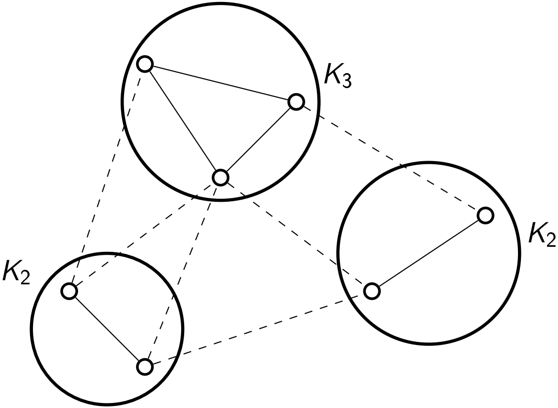
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

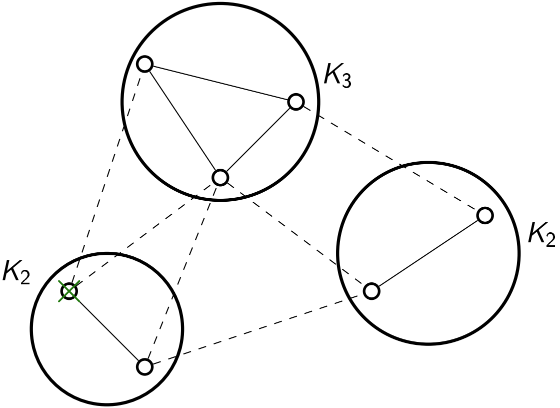
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

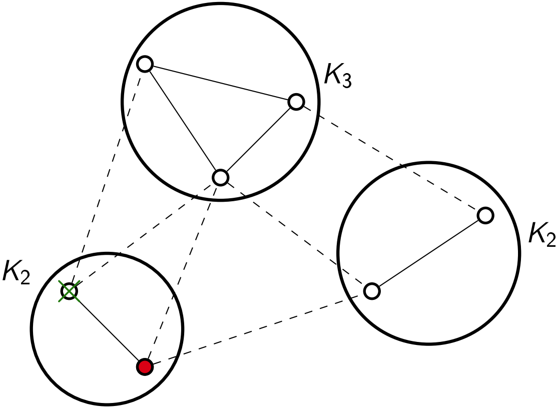
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

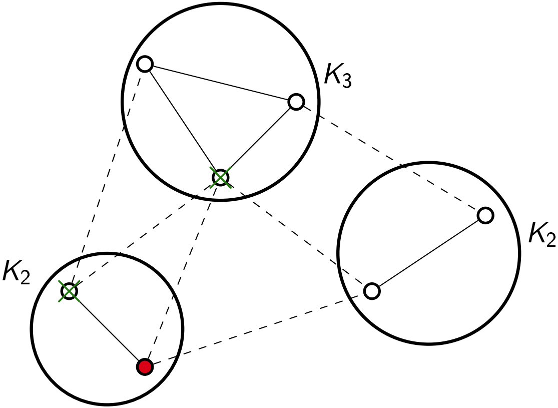
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

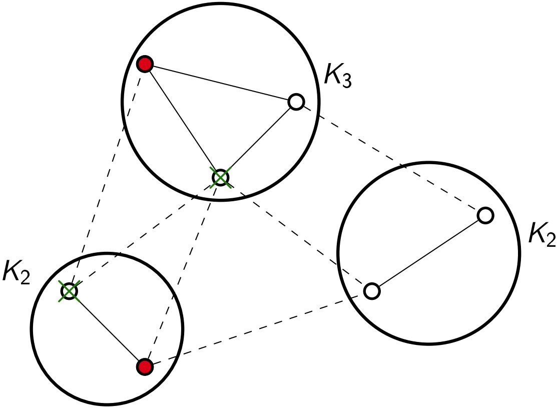
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

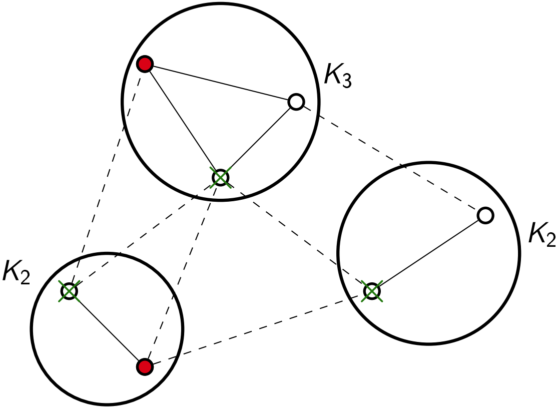
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

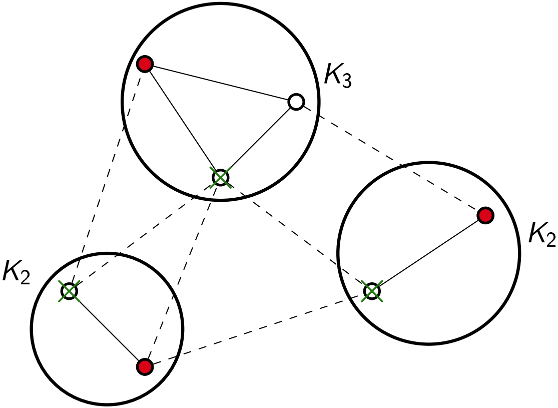
Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Une condition de victoire pour Dominator

**Lemme**

Si le graphe peut être partitionné en cliques de taille au moins 2, le jeu est $\mathcal{D}$.



# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

On prouve ce résultat par une réduction à partir du jeu POS-CNF qui est *PSPACE*-complet (Schaeffer, 1978).

# Complexité

POS-CNF est un jeu à deux joueurs sur une CNF :

- Variables $x_1, x_2, ..., x_n$
- Clauses $C_1, C_2, ..., C_m$ sans littéraux négatifs.
- Dominator: assigne les variables à vrai et gagne si la formule est satisfaite.
- Staller: assigne les variables à faux et gagne si la formule n'est pas satisfaite.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

$$x_1 = \qquad , x_2 = \qquad , x_3 = \qquad , x_4 = \qquad , x_5 =$$

# Complexité

POS-CNF est un jeu à deux joueurs sur une CNF :

- Variables $x_1, x_2, ..., x_n$
- Clauses $C_1, C_2, ..., C_m$ sans littéraux négatifs.
- Dominator: assigne les variables à vrai et gagne si la formule est satisfaite.
- Staller: assigne les variables à faux et gagne si la formule n'est pas satisfaite.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

$x_1 =$ vrai, $x_2 =$ , $x_3 =$ , $x_4 =$ , $x_5 =$

# Complexité

POS-CNF est un jeu à deux joueurs sur une CNF :

- Variables $x_1, x_2, ..., x_n$
- Clauses $C_1, C_2, ..., C_m$ sans littéraux négatifs.
- Dominator: assigne les variables à vrai et gagne si la formule est satisfaite.
- Staller: assigne les variables à faux et gagne si la formule n'est pas satisfaite.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

$$x_1 = \text{vrai},\ x_2 = \text{faux},\ x_3 = \quad\quad ,\ x_4 = \quad\quad ,\ x_5 =$$

# Complexité

POS-CNF est un jeu à deux joueurs sur une CNF :

- Variables $x_1, x_2, ..., x_n$
- Clauses $C_1, C_2, ..., C_m$ sans littéraux négatifs.
- Dominator: assigne les variables à vrai et gagne si la formule est satisfaite.
- Staller: assigne les variables à faux et gagne si la formule n'est pas satisfaite.

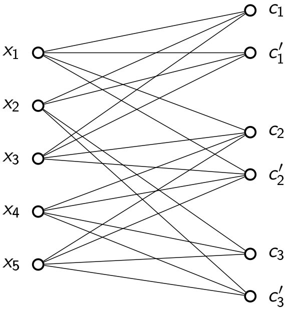
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

$x_1 =$ vrai, $x_2 =$ faux, $x_3 =$ , $x_4 =$ , $x_5 =$ vrai

# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

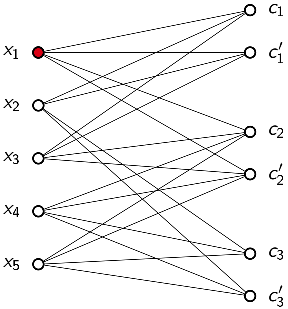



$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

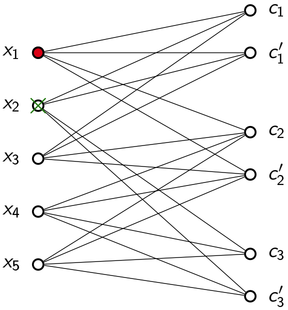



$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

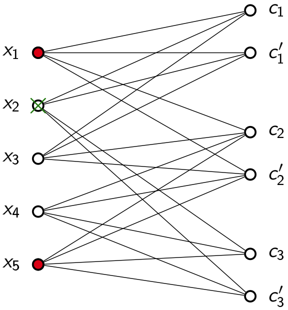



$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$

# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

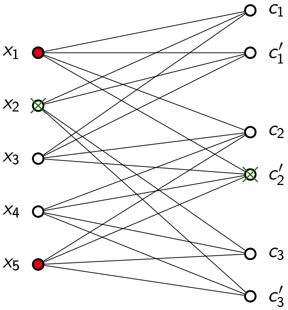



$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

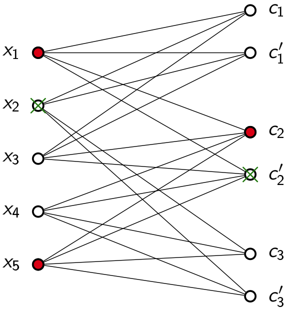



$$(x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_2 \lor x_4 \lor x_5)$$

# Complexité

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.

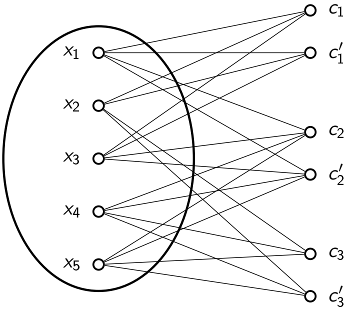



$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

# Complexité

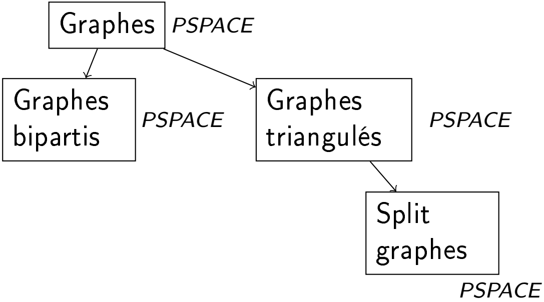
**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est *PSPACE*-complet.




$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5)$

# Complexité



Graphes
*PSPACE*
Graphes bipartis
*PSPACE*
Graphes triangulés
*PSPACE*
Split graphes
*PSPACE*

# Cographes

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

Un cographe est défini inductivement :

# Cographes

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

Un cographe est défini inductivement :

- Un sommet

# Cographes

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

Un cographe est défini inductivement :

- Un sommet
- L'union disjointe de deux cographes

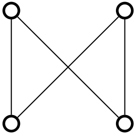
# Cographes

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

Un cographe est défini inductivement :

- Un sommet
- L'union disjointe de deux cographes
- Le joint de deux cographes



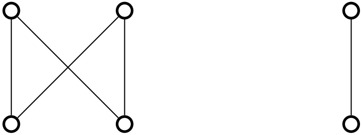
# Cographes

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

Un cographe est défini inductivement :

- Un sommet
- L'union disjointe de deux cographes
- Le joint de deux cographes



# Cographes

**Théorème**

Le Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

L'issue du joint de deux cographes est déterminée de la manière suivante :

# Cographes

**Théorème**

Le Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

L'issue du joint de deux cographes est déterminée de la manière suivante :

- Si chacun des graphes a au moins deux sommets, le jeu est $\mathcal{D}$

# Cographes

**Théorème**

Le Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

L'issue du joint de deux cographes est déterminée de la manière suivante :

- Si chacun des graphes a au moins deux sommets, le jeu est $\mathcal{D}$
- Si un des graphes ne contient qu'un sommet et que l'autre est $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{D}$, le jeu est $\mathcal{D}$

# Cographes

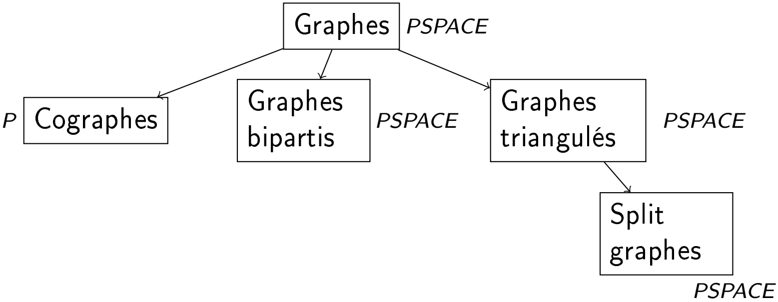
**Théorème**

Le Maker-Breaker Domination Game est linéaire sur les cographes.

L'issue du joint de deux cographes est déterminée de la manière suivante :

- Si chacun des graphes a au moins deux sommets, le jeu est $\mathcal{D}$
- Si un des graphes ne contient qu'un sommet et que l'autre est $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{D}$, le jeu est $\mathcal{D}$
- Si un des graphes ne contient qu'un sommet et que l'autre est $\mathcal{S}$, le jeu est $\mathcal{N}$

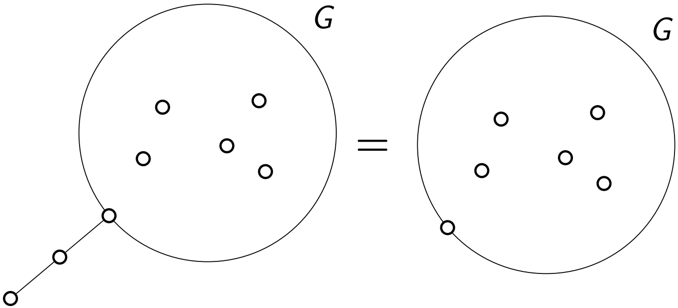
# Complexité


Graphes
PSPACE
P
Cographes
Graphes bipartis
PSPACE
Graphes triangulés
PSPACE
Split graphes
PSPACE

# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

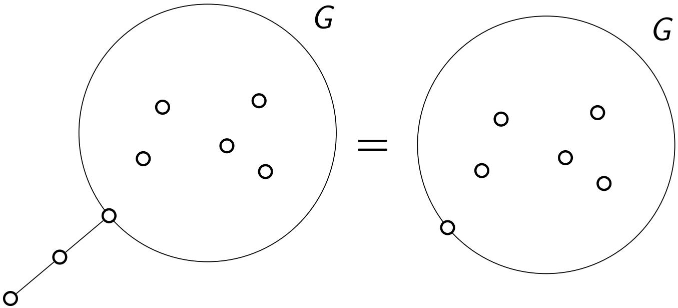


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Dominator gagne sur $G$

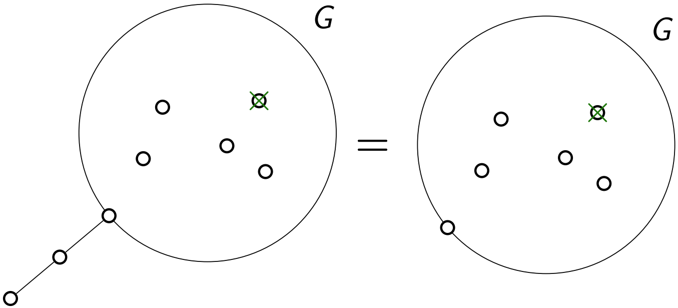


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Dominator gagne sur $G$

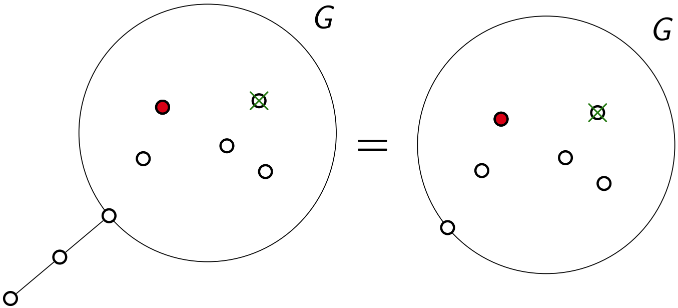


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Dominator gagne sur $G$

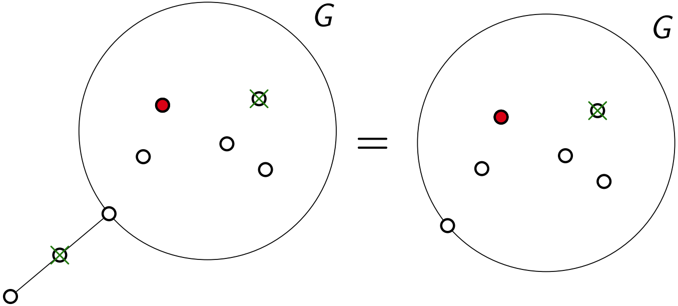


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Dominator gagne sur $G$

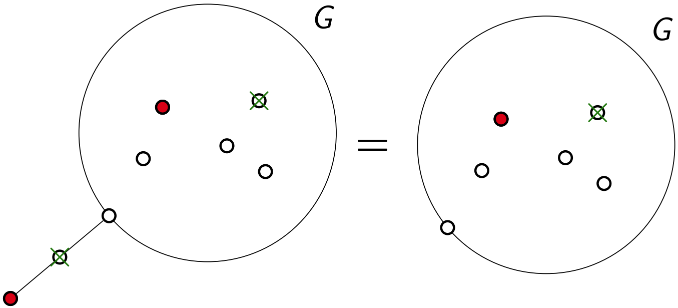


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Dominator gagne sur $G$

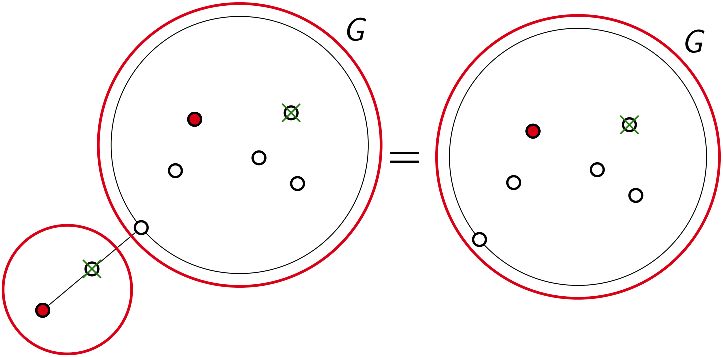


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Dominator gagne sur $G$

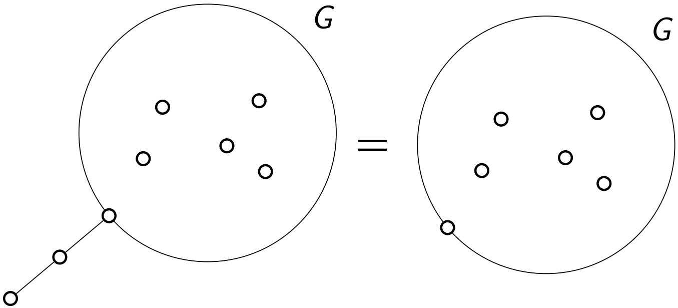


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

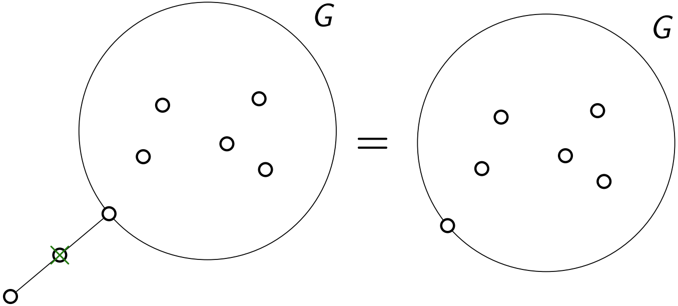


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

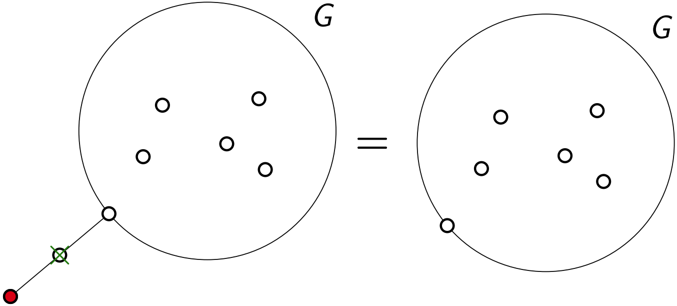


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

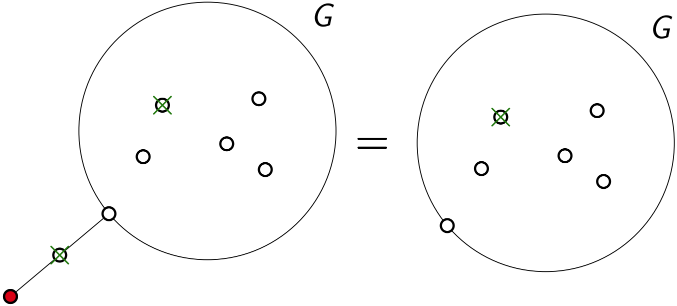


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

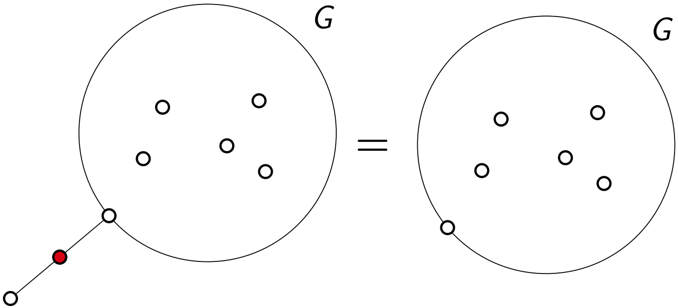


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

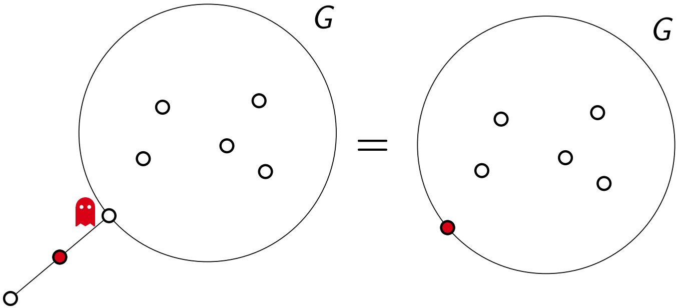


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

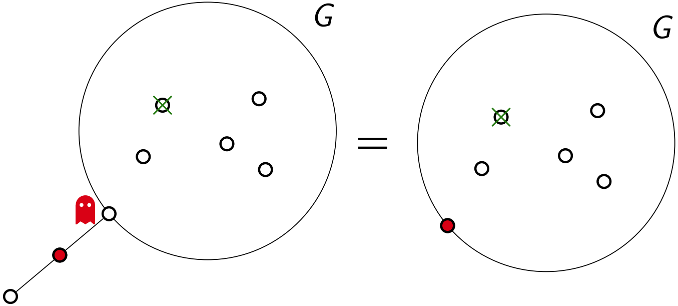


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

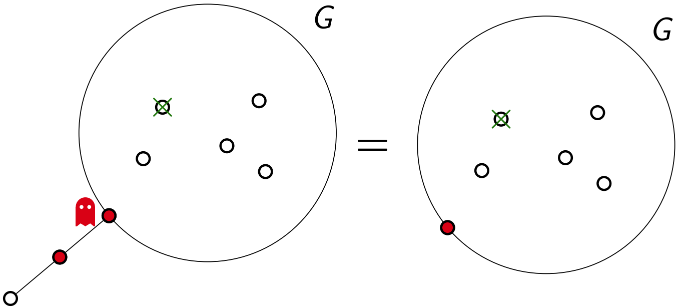


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$

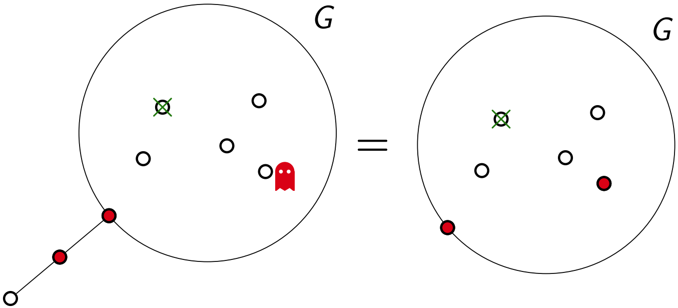


# Arbres

**Lemme**

On peut retirer des $P_2$ pendants d'un graphe sans en changer l'issue.

Staller gagne sur $G$



# Arbres

**Théorème**

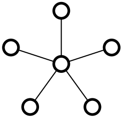
Maker-Breaker Domination Game est polynomial sur les arbres.

Chaque arbre peut être réduit à l'une des situations suivante :

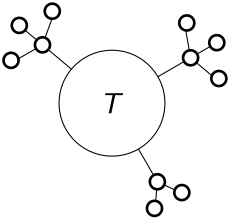
$\emptyset$

graphe vide

$K_{1,0}$



$K_{1,n}$



# Arbres

**Théorème**

Maker-Breaker Domination Game est polynomial sur les arbres.

Chaque arbre peut être réduit à l'une des situations suivante :

$\emptyset$

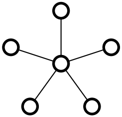
graphe vide

$\mathcal{D}$

$\circ$

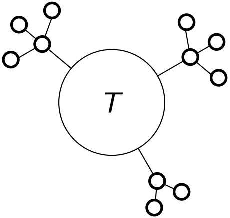
$K_{1,0}$

$\mathcal{N}$



$K_{1,n}$

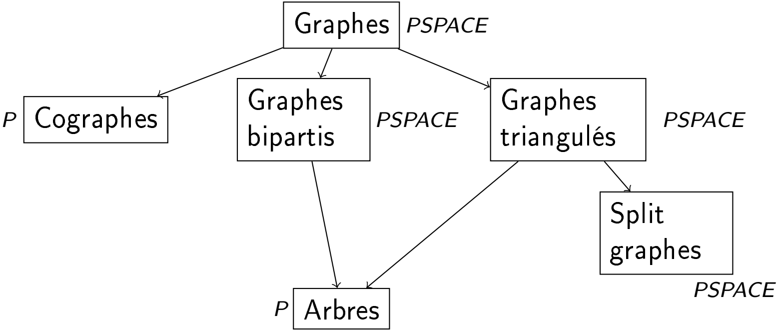
$\mathcal{N}$



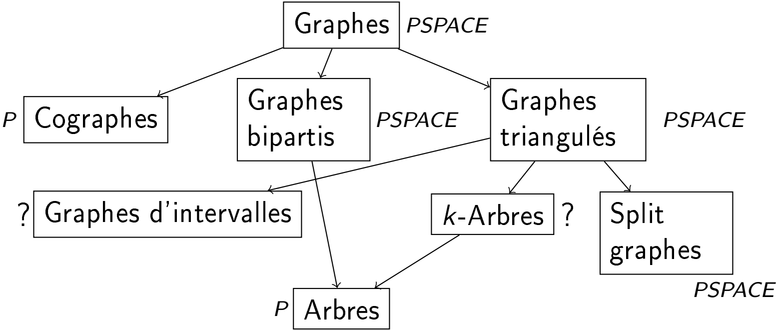

$\mathcal{S}$

# Conclusion

# Complexité

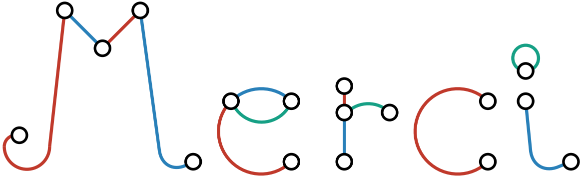

Graphes
PSPACE
P
Cographes
Graphes bipartis
PSPACE
Graphes triangulés
PSPACE
Split graphes
PSPACE
P
Arbres

# Complexité


Graphes
PSPACE
P
Cographes
Graphes bipartis
PSPACE
Graphes triangulés
PSPACE
?
Graphes d'intervalles
k-Arbres
?
Split graphes
PSPACE
P
Arbres

# Autres questions ouvertes

- Un résultat en fonction de la densité du graphe ?
- Que se passe-t-il dans les hypergraphes ?
- Que se passe-t-il si on inverse les objectifs de Dominator et Staller ?


Merci