

## Interrogation 3 : structures arborescentes et Master Theorem

Durée : 30 minutes.

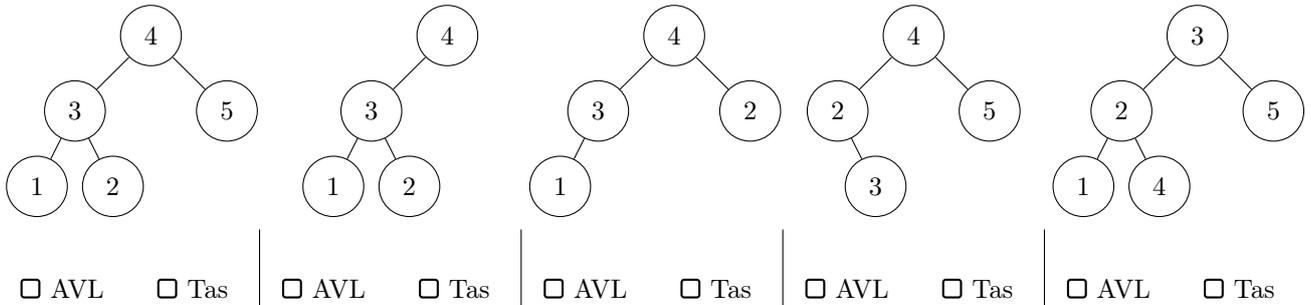
Nom :

Prénom :

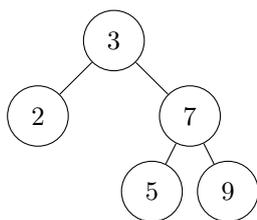
**Attention :** le sujet est recto-verso, n'oubliez pas de tourner la page.

### 1 Arbres

a) Pour chaque arbre ci-dessous, cochez s'il correspond à un tas binaire valide organisé pour fournir le maximum, un AVL valide, les deux, ou aucun des deux.



b) Soit l'arbre binaire de recherche suivant, indiquez sur chaque nœud son déséquilibre au sens des AVL, puis dessinez à côté l'arbre après insertion de la valeur 6 et rééquilibrage. Vous indiquerez également les rotations réalisées pour rééquilibrer l'arbre, et l'ordre dans lequel elles sont réalisées.



### 2 Master Theorem

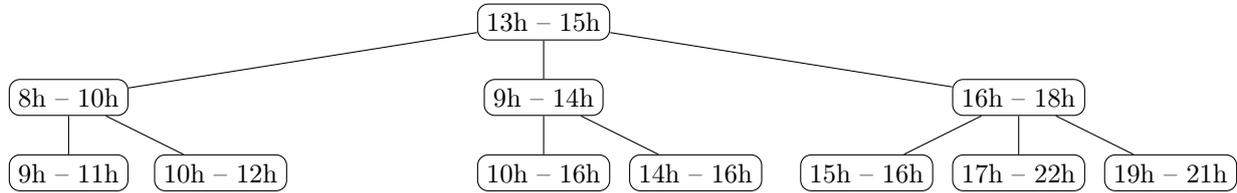
Soit  $T$  une fonction de la forme  $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

1. si  $f(n) = O(n^c)$  avec  $c < \log_b a$  alors  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ .
2. si  $f(n) = \Omega(n^c)$  avec  $c > \log_b a$  et si  $\exists k < 1, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, af(n/b) \leq kf(n)$  alors  $T(n) = \Theta(f(n))$ .
3. si  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$  alors  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ .

c) Calculez les valeurs de  $\log_5(125)$ ,  $\log_4(1)$  et  $\log_2(16)$ , justifiez vos résultats.

## 2.1 Rendez-vous

Dans cette partie nous allons étudier une structure de données pour organiser des rendez-vous. Chaque rendez-vous est spécifié par une date début et une date fin. Les rendez-vous sont organisés dans un arbre ternaire. À chaque nœud correspond un rendez-vous. L'enfant de gauche d'un nœud ne contient que des rendez-vous dont la fin est avant le début du nœud. L'enfant droit ne contient que des rendez-vous dont le début est après la fin du nœud. L'enfant du milieu contient tous les autres rendez-vous, c'est à dire ceux qui ont un instant commun avec le rendez vous du nœud. Vous considérerez par la suite que cet arbre est équilibré. Par exemple :



Nous allons déterminer la complexité de la requête visant à lister tous les rendez-vous contenant un instant donné. Les bornes des rendez-vous sont exclues : une requête sur 16h n'a pas à renvoyer de rendez-vous commençant ou finissant à 16h. Cette requête traversera l'arbre et stockera les rendez-vous pertinents dans un tableau dynamique.

d) Quels enfants d'un nœud devrez-vous visiter si :

- l'instant est avant le début rendez-vous du nœud
  
- l'instant est contenu dans le rendez-vous du nœud
  
- l'instant est après le rendez-vous du nœud

e) Quels sont les meilleurs et pires cas dans la question précédente ?

f) Pour le meilleur et le pire cas, exprimez la complexité de l'algorithme de recherche récursive avec le formalisme du Master Theorem, et résolvez la complexité résultante.

meilleur cas :

pire cas :