

Interrogation 3 : structures arborescentes et Master Theorem

Durée : 30 minutes.

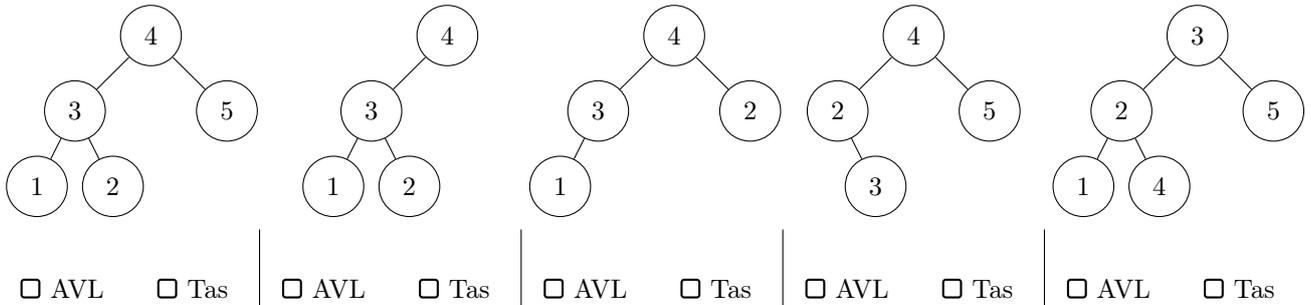
Nom :

Prénom :

Attention : le sujet est recto-verso, n'oubliez pas de tourner la page.

1 Arbres

a) Pour chaque arbre ci-dessous, cochez s'il correspond à un tas binaire valide organisé pour fournir le maximum, un AVL valide, les deux, ou aucun des deux.



2 Master Theorem

Soit T une fonction de la forme $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

1. si $f(n) = O(n^c)$ avec $c < \log_b a$ alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. si $f(n) = \Omega(n^c)$ avec $c > \log_b a$ et si $\exists k < 1, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, af(n/b) \leq kf(n)$ alors $T(n) = \Theta(f(n))$.

b) Calculez les valeurs de $\log_5(25)$, $\log_2(8)$ et $\log_3(1)$, justifiez vos résultats.

3 Pesées

Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème de pesées. Nous disposons d'un ensemble de n pièces de monnaies. Parmi ces pièces, une fausse pièce a été glissée. Toutes les vraies pièces de monnaie ont le même poids. La fausse pièce est indiscernable des vraies visuellement, mais a un poids différent. On cherche donc à la détecter en comparant les poids d'ensembles de pièces.

3.1 Une pièce, deux tas

On suppose qu'une seule pièce est plus légère, et que le nombre n de pièces est une puissance de deux. On suppose également que séparer un tas de pièces en deux tas égaux peut se faire en temps constant, et que comparer le poids de deux tas se fait en temps constant.

c) Proposez un algorithme récursif pour déterminer la fausse pièce, et étudiez sa complexité.

3.2 Une pièce, cinq tas

On suppose qu'une seule pièce est plus légère, et que le nombre n de pièces est une puissance de cinq. On suppose également que séparer un tas de pièces en cinq tas égaux peut se faire en temps constant, et que comparer le poids de deux tas se fait en temps constant.

d) Proposez un algorithme récursif pour déterminer la fausse pièce, et étudiez sa complexité. Vous pouvez vous contenter d'indiquer les différences avec l'algorithme précédent.

3.3 Une pièce, n tas

On suppose qu'une seule pièce est plus légère, On suppose également que séparer un tas de n pièces en n tas égaux peut se faire en temps constant (il suffit de les prendre une par une), et que comparer le poids de deux tas se fait en temps constant.

e) Proposez un algorithme pour déterminer la fausse pièce, et étudiez sa complexité.