

Examen final

Durée : 1 heure 30.

Avant de commencer

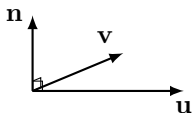
Ne vous concentrez pas sur les questions une par une, mais essayez de lire tout le sujet avant, car vous pourrez obtenir des indices pour certaines questions en lisant la suite. Un certain nombre de questions peuvent être répondues indépendamment des autres, donc ne restez pas coincés, essayez d’avancer rapidement sur ce que vous savez faire. Bon courage à tous.

Nous insistons sur la nécessité de **justifier toutes vos réponses** (même s’il n’est pas explicitement dit de le faire). Lorsque vous répondez simplement « oui », nous considérerons que vous avez probablement répondu au hasard, et vous ne recevrez pas les points même s’il s’agit de la bonne réponse. À l’inverse, si votre réponse est fautive, mais que votre justification fait preuve d’arguments intéressants, vous pourrez tout de même obtenir des points.

1 Éléments de géométrie

Cette section couvre des calculs classiques en synthèse d’image. Si vous ne trouvez pas le moyen de réaliser le calcul, vous pouvez néanmoins utiliser la notation pour les questions suivantes. Pour les questions qui suivent, vous êtes autorisés à utiliser des produits vectoriels $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ et scalaires $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ainsi que des normes $\|\mathbf{u}\|$ (avec les paramètres que vous voulez)

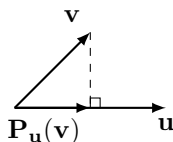
Question 1 – Soient deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , donnez une expression permettant de calculer un vecteur \mathbf{n} perpendiculaire à \mathbf{u} et \mathbf{v} .



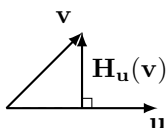
Question 2 – Soient deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , donnez une expression permettant de déterminer si l’angle entre ces deux vecteurs est plus grand ou plus petit que l’angle droit.



Question 3 – Soient deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , donnez une expression permettant de calculer le projeté $\mathbf{P}_u(\mathbf{v})$ de \mathbf{v} sur \mathbf{u} . Notez que ni \mathbf{u} ni \mathbf{v} ne sont normalisés. Vérifiez votre formule pour $\mathbf{u} = (2, 0, 0)$ et $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$.



Question 4 – Soient deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , donnez une expression permettant de calculer la hauteur $\mathbf{H}_u(\mathbf{v})$ de \mathbf{v} par rapport à \mathbf{u} . Notez que ni \mathbf{u} ni \mathbf{v} ne sont normalisés. Vérifiez votre formule pour $\mathbf{u} = (2, 0, 0)$ et $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$.



Étant donné un triangle (a, b, c) , et une normale \mathbf{n} normalisée de ce triangle, l'aire signée de ce triangle est donnée par la relation

$$A(a, b, c) = \frac{1}{2} [(b - a) \times (c - a)] \cdot \mathbf{n}. \quad (1)$$

Cette aire est signée car elle est positive si le repère $(b - a), (c - a), \mathbf{n}$ est direct, c'est à dire qu'avec votre main droite, en posant votre poignet sur a , la base de vos doigts sur b et la pointe de vos doigts sur c , la normale \mathbf{n} est dans la direction de votre pouce. Dans le cas contraire l'aire signée est négative. La valeur absolue est l'aire classique du triangle.

Question 5 – En supposant que vous avez posé ce sujet sur votre table, avec les schémas ci-dessous visibles, et que la normale \mathbf{n} est orientée vers le haut, indiquez si l'aire signée des triangles ci-dessous est positive ou négative.



Question 6 – Soit un triangle (a, b, c) et un point p dans le même plan que ce triangle, utilisez des aires signées pour exprimer un test indiquant si le point p est dans le triangle ou non.

Question 7 – En examinant l'équation 1 de l'aire signée à la lumière de vos réponses aux questions 1 et 2, que se passe-t-il quand le vecteur \mathbf{n} utilisé pour l'aire signée n'est plus normal au triangle ?

Question 8 – Que devient votre test de la question 6 lorsque p n'est plus dans le plan du triangle mais que l'aire signée est toujours calculée avec la normale \mathbf{n} de (a, b, c) ?

Question 9 – Que devient votre test de la question 6 lorsque p n'est pas nécessairement dans le plan du triangle et que l'aire signée est toujours calculée avec une direction \mathbf{d} pas forcément normale au triangle ?

2 Volumes d'ombre simples

Les shadow volumes sont une technique permettant de calculer les ombres d'objets éclairés par des lampes ponctuelles. Étant donné une lampe, le volume d'ombre d'un objet est la portion d'espace à l'ombre de cet objet. Dans cette partie, **vous travaillerez en deux dimensions**. Pensez à **utiliser les questions de la première partie**, même si vous n'y avez pas répondu, utilisez la notation proposée pour réaliser le calcul décrit.

Question 10 – Recopiez le schéma ci-dessous sur votre copie, et tracez la portion de l'espace qui est à l'ombre du disque par rapport à la lampe ponctuelle. Le placement des éléments n'est pas important, l'important est que votre schéma comporte une lampe ponctuelle et un disque, ainsi que le volume d'ombre issu du disque. Définissez précisément les différents éléments qui délimitent cette zone.



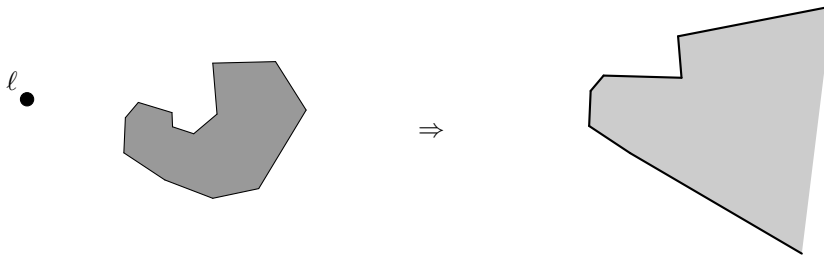
Question 11 – En vous aidant si vous le souhaitez des notations de la partie précédente, expliquez le calcul à réaliser pour déterminer étant donné la position ℓ de la lampe, le centre c du disque, son rayon r et la position p d'un point, si le point p est dans le volume d'ombre du disque par rapport à la lampe. Détaillez le principe du calcul, ne vous contentez pas de fournir une formule.

Question 12 – Deux segments $[a, b]$ et $[c, d]$ se coupent si et seulement si a et b sont de part et d'autre du segment $[c, d]$ et c et d sont de part et d'autre du segment $[a, b]$. En déduire un test permettant de déterminer étant donné une lampe ℓ et un segment $[a, b]$ si un point p est à l'ombre du segment. De même détaillez le principe du calcul, ne vous contentez pas d'une formule.

Question 13 – On souhaite généraliser le calcul des volumes d’ombres de segments pour les volumes d’ombres de polygones (toujours en 2D). Le polygone est fourni par un tableau de sommets décrivant dans l’ordre un tour du polygone dans le sens positif (anti horaire). Est-il suffisant de tester tous les volumes d’ombres des segments du bord du polygone? Est-il nécessaire de tous les tester, et si non pouvez vous donner un test permettant de déterminer si un segment doit être pris en compte ou non.

3 Volumes d’ombre maillés

Dans cette partie, nous **repassons en 3D**. Nous supposons que les volumes d’ombre de tous les objets d’une scène sont fournis sous la forme d’un **maillage de triangles munis de normales orientées vers l’extérieur du volume**. Même si les volumes sont a priori infinis, considérez que vous disposez d’un moyen pour encoder des triangles infinis. Vous supposerez également que vous n’avez **plus accès à la position de la lampe ou aux maillages des objets ayant générés les volumes d’ombre**. Sur le schéma ci-dessous, vous n’avez ainsi plus que la partie droite.



Utilisez pour répondre les éléments de géométrie de la première partie, en particulier supposez que vous disposez d’un test d’intersection rayon triangle (qui fonctionne également pour les triangles infinis).

Question 14 – Étant donné un point p , et un rayon issu de ce point, décrivez un test permettant de savoir lorsqu’un triangle des volumes d’ombres coupe le rayon si le rayon entre ou sort d’un volume d’ombre.

Question 15 – En supposant que le rayon finit par sortir de tous les volumes d’ombre, en déduire un test permettant de déterminer à base de compteur(s) si le point est dans un (ou plusieurs) volumes d’ombres ou non. Illustrez sur des exemples le fonctionnement de votre test.

Question 16 – Une technique consiste à utiliser la carte graphique et la rasterisation pour réaliser le test précédent sur tous les points de la scène en même temps pour une lampe donnée. Le pipeline est configuré pour réaliser le rendu du maillage des volumes d’ombre selon le même point de vue que la caméra. Le fragment shader a également accès au tampon de profondeur de la scène originale : pour chaque pixel de l’image, vous savez à quelle profondeur se situe le point de la vraie scène rendue. Cette passe écrit dans un nouveau tampon le nombre de volumes d’ombre contenant le point de la vraie scène pour chaque pixel. Décrivez le fonctionnement du fragment shader traitant les fragments des volumes d’ombres lors de cette passe. Il ne vous est pas demandé ici d’écrire du GLSL correct, mais de décrire l’algorithme. Vous supposerez à nouveau que les rayons issus de la caméra en direction de la scène finissent nécessairement par sortir de tous les volumes d’ombre.

Question 17 – La supposition selon laquelle tous les rayons finissent par sortir de la scène est-elle correcte? Si non pouvez-vous fournir un contre exemple ?