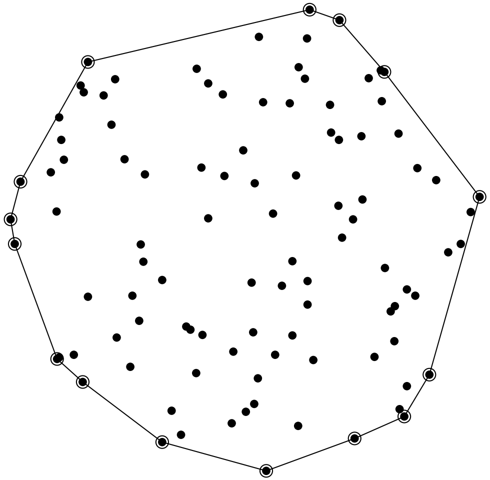
Robustesse des algorithmes géométriques : prédicats, filtrage et perturbation

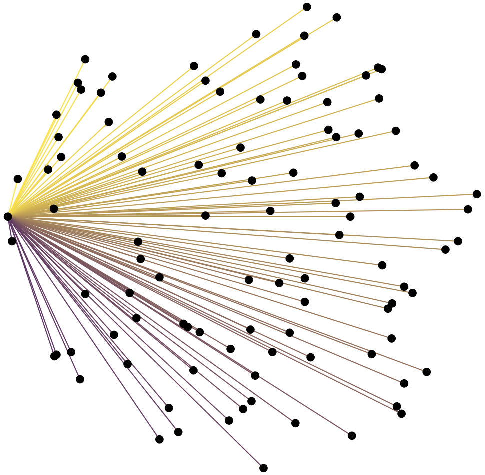
Vincent Nivoliers

29 avril 2022

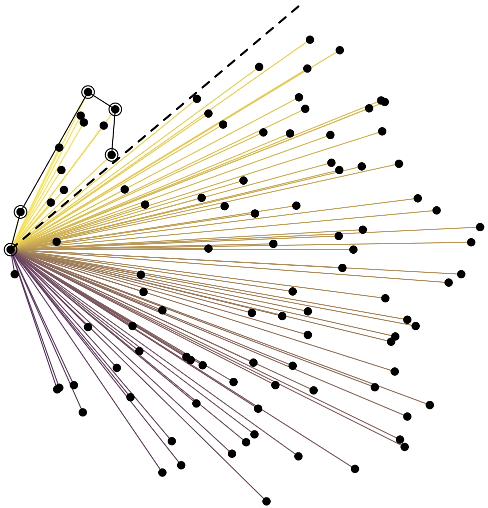
Enveloppe convexe



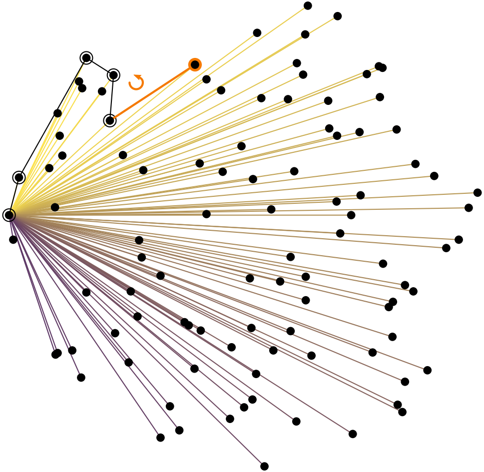
1 – trier par angle



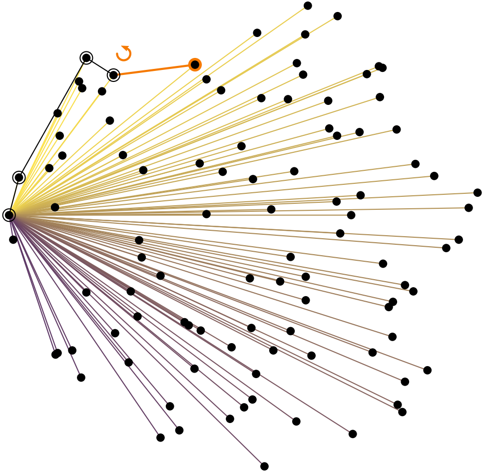
2 – balayage



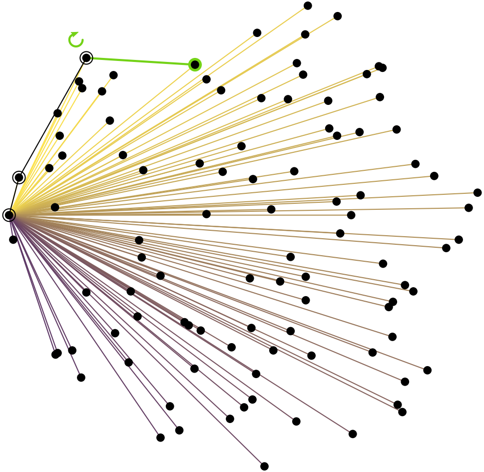
2 – balayage



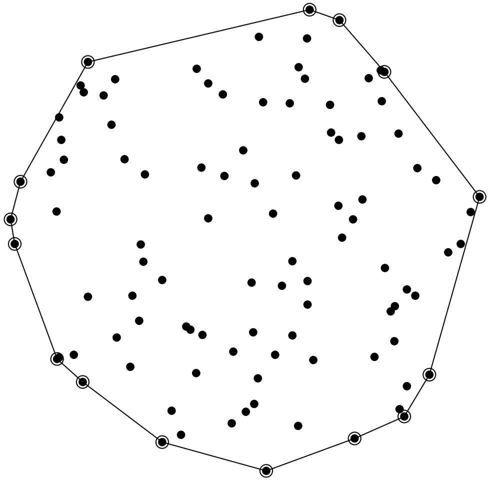
2 – balayage



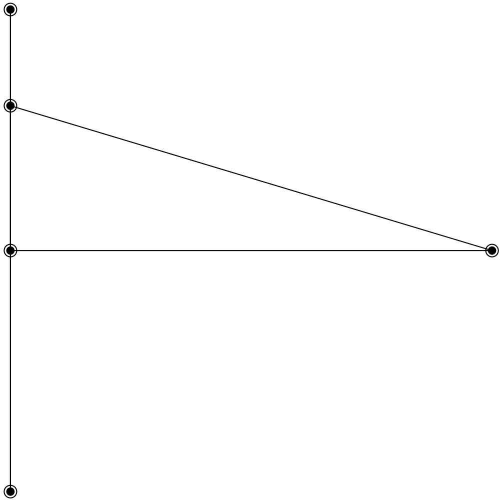
2 – balayage



2 – balayage



Robustesse : alignements de points



Algorithme

Algorithme

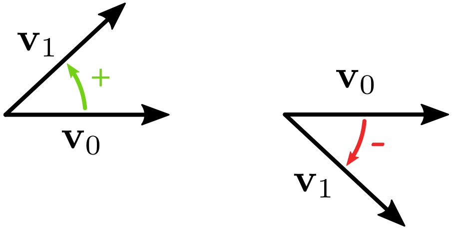
- déterminer le point le plus à gauche
- trier les points par angle
- enveloppe $\leftarrow$ une nouvelle pile
- ajouter les deux premiers points à enveloppe
- **pour chaque** *autre point* p *dans l'ordre* **faire**
  - $p_0 \leftarrow$ dernier point de l'enveloppe
  - $p_1 \leftarrow$ avant dernier point de l'enveloppe
  - **tant que** (p_0p) *tourne à gauche par rapport à* (p_1p) **faire**
    - retirer le sommet de l'enveloppe
    - $p_0 \leftarrow$ dernier point de l'enveloppe
    - $p_1 \leftarrow$ avant dernier point de l'enveloppe
  - ajouter p à l'enveloppe
- **retourner** *l'*enveloppe

Algorithme

Algorithme

déterminer le point le plus à gauche
trier les points par angle
enveloppe ← une nouvelle pile
ajouter les deux premiers points à enveloppe
pour chaque *autre point* p *dans l'ordre* **faire**
    p_0 ← dernier point de l'enveloppe
    p_1 ← avant dernier point de l'enveloppe
    tant que $(p_0 p)$ *tourne à gauche par rapport à* $(p_1 p)$ **faire**
        retirer le sommet de l'enveloppe
        p_0 ← dernier point de l'enveloppe
        p_1 ← avant dernier point de l'enveloppe
    ajouter p à l'enveloppe
retourner *l'*enveloppe

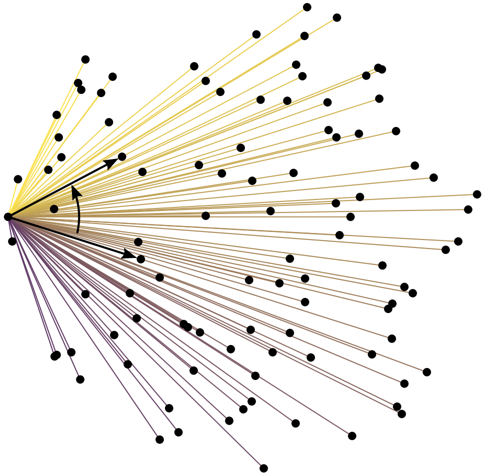
Prédicat : orientation



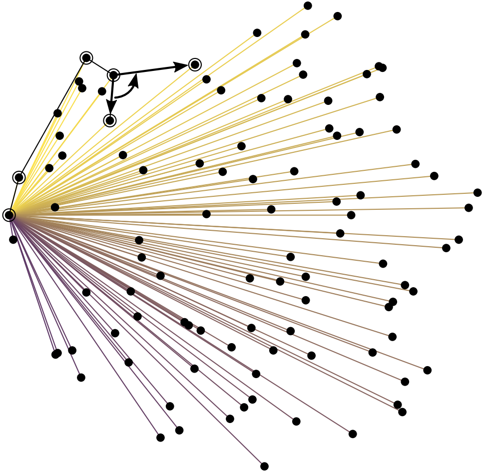
$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}$: sinus de l'angle si vecteurs normalisés.

positif, négatif ou nul

Utilisation pour l'enveloppe convexe



Utilisation pour l'enveloppe convexe



Perturbation

$$\det\begin{pmatrix} x_0+\varepsilon_{0,0} & x_1+\varepsilon_{1,0} \\ y_0+\varepsilon_{0,1} & y_1+\varepsilon_{1,1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}$$
$$+\varepsilon_{0,0}y_1+\varepsilon_{1,1}x_0-\varepsilon_{0,1}x_1-\varepsilon_{1,0}y_0$$
$$+\varepsilon_{0,0}\varepsilon_{1,1}-\varepsilon_{0,1}\varepsilon_{1,0}$$

1. systématiquement plus de zéro ?
2. facilité d'évaluation ?

Rester dans le pétrin

Posons que $\forall(i,j), \varepsilon_{i,j} = \varepsilon > 0$

$$\varepsilon y_1 + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_1 - \varepsilon y_0 + \varepsilon\varepsilon - \varepsilon\varepsilon$$

Si $(x_0, y_0) = (0,1)$ et $(x_1, y_1) = (0,2)$

$$2\varepsilon - \varepsilon + \varepsilon\varepsilon - \varepsilon\varepsilon = \varepsilon \quad \Rightarrow \text{positif !}$$

Rester dans le pétrin

Posons que $\forall(i,j), \varepsilon_{i,j} = \varepsilon > 0$

$$\varepsilon y_1 + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_1 - \varepsilon y_0 + \varepsilon\varepsilon - \varepsilon\varepsilon$$

Si $(x_0, y_0) = (0,1)$ et $(x_1, y_1) = (0,2)$

$$2\varepsilon - \varepsilon + \varepsilon\varepsilon - \varepsilon\varepsilon = \varepsilon \quad \Rightarrow \text{positif !}$$

Si $(x_0, y_0) = (1,1)$ et $(x_1, y_1) = (2,2)$

$$2\varepsilon + \varepsilon - 2\varepsilon - \varepsilon + \varepsilon\varepsilon - \varepsilon\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \text{arf.}$$

Sortir du pétrin

Avec la perturbation $\begin{pmatrix} \varepsilon^1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^1 y_1 + \varepsilon^2 x_0 - \varepsilon^2 x_1 - \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon^1\varepsilon^2 - \varepsilon^2\varepsilon^2 \\ &= \varepsilon y_1 + \varepsilon^2(x_0 - x_1 - y_0) + \varepsilon^3 - \varepsilon^4 \end{aligned}$$

Sortir du pétrin

Avec la perturbation $\begin{pmatrix} \varepsilon^1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^1 y_1 + \varepsilon^2 x_0 - \varepsilon^2 x_1 - \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon^1 \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 (x_0 - x_1 - y_0) + \varepsilon^3 - \varepsilon^4 \end{aligned}$$

- si y_1 est non nul, renvoyer son signe ;

Sortir du pétrin

Avec la perturbation $\begin{pmatrix} \varepsilon^1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon^1 y_1 + \varepsilon^2 x_0 - \varepsilon^2 x_1 - \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon^1 \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \varepsilon^2$$
$$= \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 (x_0 - x_1 - y_0) + \varepsilon^3 - \varepsilon^4$$

- si y_1 est non nul, renvoyer son signe ;
- si $x_0 - x_1 - y_0$ est non nul, renvoyer son signe ;

Sortir du pétrin

Avec la perturbation $\begin{pmatrix} \varepsilon^1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^1 y_1 + \varepsilon^2 x_0 - \varepsilon^2 x_1 - \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon^1 \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 (x_0 - x_1 - y_0) + \varepsilon^3 - \varepsilon^4 \end{aligned}$$

- si y_1 est non nul, renvoyer son signe ;
- si $x_0 - x_1 - y_0$ est non nul, renvoyer son signe ;
- sinon renvoyer positif.

Calcul exact

Il peut arriver que le déterminant ne soit pas nul
mais que l'arrondi en virgule flottante le soit.

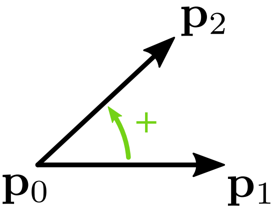
Calcul exact

Il peut arriver que le déterminant ne soit pas nul
mais que l'arrondi en virgule flottante le soit.

Calculer en précision exacte :

- entiers sans limite de taille ;
- nombre rationels ;
- opérations dont le résultat est rationnel (pas de racine carrée !) ;
- le prédicat ne doit prendre en entrée que des nombres initiaux.

Généralisation de l'orientation



examiner le signe de : $\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$

Simulation de simplicité (Edelsbrunner & Mücke 90)

Utiliser des ε avec une puissance exponentielle en i et j :

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon^{2^{i*d-j}}$$

Principe :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{k+1} - 1$
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \varepsilon^{2^k} = \varepsilon^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} = \varepsilon^{2^{n+1}-1} >> \varepsilon^{2^{n+1}}$

Extraire les termes

$$\begin{pmatrix} p_{0,0}+\varepsilon_{0,0} & p_{0,1}+\varepsilon_{0,1} & \cdots & p_{0,d}+\varepsilon_{0,d-1} & 1 \\ p_{1,0}+\varepsilon_{1,0} & p_{1,1}+\varepsilon_{1,1} & \cdots & p_{1,d}+\varepsilon_{1,d-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{d,0}+\varepsilon_{d,0} & p_{d,1}+\varepsilon_{d,1} & \cdots & p_{d,d-1}+\varepsilon_{d,d-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- pour chaque point aligner la perturbation voulue sur la diagonale ;
- développement par les cofacteurs.