Numéro anonymat :

Calculabilité/Complexité – 04/12/2019

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Une page A4 manuscrite autorisée de documents.

Question 1. En supposant l'addition et la multiplication récursives primitives, montrer que la fonction qui à un entier n associe la somme des carrés de 0 à n est récursive primitive.

Question 2. En supposant que l'addition des entiers et la fonction $\mod$ associant à (x, y) le reste de la division euclidienne de x par y sont récursives, montrer que la fonction associant à (x, y) le plus petit multiple commun de x et y est récursive.

Question 3. Décrire une machine de Turing de vocabulaire $\{a, b\}$ (plus caractère blanc) reconnaissant les mots ayant autant de a que de b. On supposera qu'au départ, la tête de lecture est sur la case précédant le mot en entrée. On étendra le vocabulaire si utile.

- Décrire le fonctionnement général de cette machine, en grandes phases.
- Expliquer pourquoi cette machine s'arrête sur toute entrée.
- Proposer la fonction de transition correspondant à chacune de ces phases.

Question 4. Soit P_1 un problème NP-complet. Proposer une méthode faisant intervenir P_1 pour montrer qu'un autre problème P_2 est NP-complet.

-
-

Question 5. On suppose que la recherche de circuit hamiltonien (circuit parcourant tout le graphe et ne passant qu'une seule fois par chacun des nœuds) dans un graphe est NP-complète.

On considère le problème *circuit le plus long* qui a pour données :

— Un graphe G de taille n,

— Un entier k,

et pour question :

— Existe-t-il un circuit de longueur supérieure ou égale à k dans G qui ne passe pas deux fois par le même nœud ?

Ce problème est dans NP, montrer qu'il est NP-complet.

Constantes

$$C_{k,c} \in \mathcal{F}_k, \quad C_{k,c}(x_1, \ldots, x_k) = c$$

Successeur

$$S \in \mathcal{F}_1, S(x) = x + 1$$

Projections

$$\pi_{k,i} \in \mathcal{F}_k, \quad \pi_{k,i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$$

Schéma de *Composition* :

— f à n arguments

— $g_1, \ldots, g_n$ à m arguments

$\rightsquigarrow$ h à m arguments

$$h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$$

$h = \textit{Comp}_{n,m}(f, g_1, \ldots, g_n)$

Schéma de *récursion primitive* :

— b à n arguments

— h à $n+2$ arguments

$\rightsquigarrow$ f à $n+1$ arguments

$$\begin{array}{rcl} f(0, x_1, \ldots, x_n) & = & b(x_1, \ldots, x_n) \\ f(k+1, x_1, \ldots, x_n) & = & h(k, x_1, \ldots, x_n, \underbrace{f(k, x_1, \ldots, x_n)}) \end{array}$$

$f = \textit{Rec}(b, h)$

Schéma de *minimisation* :

— g à $n+1$ arguments

$\rightsquigarrow$ f à n arguments

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{k \mid g(k, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

$f = \textit{Min}(g)$