Numéro anonymat :

Calculabilité/Complexité – 07/01/2020

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Une page A4 manuscrite autorisée de documents.

1 λ-calcul pur

Question 1. Montrer que toute expression N du λ-calcul pur en forme normale (sans calcul possible) est :

- Une variable, ou bien
- De la forme $\lambda x_1 \cdots \lambda x_n.(\cdots((y\ E_1)\ E_2)\cdots E_m)$ avec les E_i en forme normale et y une variable.
  Procéder par induction sur N.

2 λ-calcul et combinateurs

On considère le système de combinateurs **S**, **K**, **I** défini comme suit :

— **I** est le combinateur identité : $(\mathbf{I}\ x)$ se réduit en x,

— **K** est le combinateur de première projection : $((\mathbf{K}\ x)\ y)$ se réduit en x,

— **S** est le combinateur d'application : $(((\mathbf{S}\ x)\ y)\ z)$ se réduit en $((x\ z)\ (y\ z))$.

L'ensemble des termes de combinateurs est défini inductivement par : une variable est un terme combinateur, un combinateur "primitif" (**S**, **K** ou **I**) est un terme combinateur, une application notée $(T_1\ T_2)$ de deux termes de combinateurs T_1 et T_2 est un terme combinateur.

Question 2. Donner des λ-termes se comportant comme **S**, **K**, **I** (c.-à-d. donnant les mêmes résultats sur les mêmes paramètres).

-
-
-

Question 3. Montrer que $((\mathbf{S}\ \mathbf{K})\ \mathbf{K})$ se comporte comme **I** (et donc que **I** n'est pas nécessaire).

Question 4. On rappelle qu'une variable libre dans un terme est une variable qui apparaît non liée par un λ dans ce terme. On peut écrire un terme combinateur de comportement équivalent à n'importe quel λ-terme. Pour convertir un λ-terme en une application de combinateurs ayant le même comportement, on peut utiliser l'interprétation ϕ suivante :

1. $\phi(x) = x$
2. $\phi((E_1\ E_2)) = (\phi(E_1)\ \phi(E_2))$
3. (a) $\phi(\lambda x.E) = (\mathbf{K}\ \phi(E))$ si x n'est pas libre dans E, sinon :
   (b) $\phi(\lambda x.x) = \mathbf{I}$
   (c) $\phi(\lambda x.\lambda y.E) = \phi(\lambda x.\phi(\lambda y.E))$ (si x est libre dans E)
   (d) $\phi(\lambda x.(E_1\ E_2)) = ((\mathbf{S}\ \phi(\lambda x.E_1))\ \phi(\lambda x.E_2))$ (si x est libre dans E_1 ou dans E_2).

Donner un terme combinateur de comportement équivalent à $\lambda x.\lambda y.(y\ x)$.

Numéro anonymat :

Question 5. Vérifier par calcul que le terme combinateur obtenu à la question précédente se comporte effectivement comme $\lambda x.\lambda y.(y\ x)$.

Question 6. Justifier de la décidabilité ou non du problème ayant pour données :

— Un terme combinateurs C_1,

et pour question :

— C_1 admet-il une forme normale, c'est-à-dire une forme irréductible par les 3 règles données en début de section 2 ?

NP-complétude

Question 7. Soit P_1 un problème NP-complet. Proposer une méthode faisant intervenir P_1 pour montrer qu'un autre problème P_2 est NP-complet.

-
-

Question 8. On suppose que CLIQUE, la recherche d'existence d'un sous-graphe complet (ensemble de nœuds d'un graphe qui sont tous voisins entre eux deux à deux) de taille k dans un graphe est NP-complète.

On considère le problème ENSEMBLE INDÉPENDANT qui a pour données :
— Un graphe G,
— Un entier k,
et pour question :
— Existe-t-il un ensemble de k nœuds de G dont aucun n'est voisin d'un autre ?
Ce problème est dans NP, montrer qu'il est NP-complet.