

Numéro anonymat :

Calculabilité/Complexité – 07/01/2020

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Une page A4 manuscrite autorisée de documents.

1 λ -calcul pur

Question 1. Montrer que toute expression N du λ -calcul pur en forme normale (sans calcul possible) est :

- Une variable, ou bien
- De la forme $\lambda x_1 \cdots \lambda x_n. (\cdots ((y E_1) E_2) \cdots E_m)$ avec les E_i en forme normale et y une variable.

Procéder par induction sur N .

2 λ -calcul et combinateurs

On considère le système de combinateurs **S**, **K**, **I** défini comme suit :

- **I** est le combinateur identité : $(\mathbf{I} x)$ se réduit en x ,
- **K** est le combinateur de première projection : $((\mathbf{K} x) y)$ se réduit en x ,
- **S** est le combinateur d'application : $((\mathbf{S} x) y) z$ se réduit en $((x z) (y z))$.

L'ensemble des termes de combinateurs est défini inductivement par : une variable est un terme combinateur, un combinateur "primitif" (**S**, **K** ou **I**) est un terme combinateur, une application notée $(T_1 T_2)$ de deux termes de combinateurs T_1 et T_2 est un terme combinateur.

Question 2. Donner des λ -termes se comportant comme **S**, **K**, **I** (c.-à-d. donnant les mêmes résultats sur les mêmes paramètres).

-
-
-

Question 3. Montrer que $((\mathbf{S} \mathbf{K}) \mathbf{K})$ se comporte comme **I** (et donc que **I** n'est pas nécessaire).

Question 4. On rappelle qu'une variable libre dans un terme est une variable qui apparaît non liée par un λ dans ce terme. On peut écrire un terme combinateur de comportement équivalent à n'importe quel λ -terme. Pour convertir un λ -terme en une application de combinateurs ayant le même comportement, on peut utiliser l'interprétation ϕ suivante :

1. $\phi(x) = x$
2. $\phi((E_1 E_2)) = (\phi(E_1) \phi(E_2))$
3. (a) $\phi(\lambda x.E) = (\mathbf{K} \phi(E))$ si x n'est pas libre dans E , sinon :
 - (b) $\phi(\lambda x.x) = \mathbf{I}$
 - (c) $\phi(\lambda x.\lambda y.E) = \phi(\lambda x.\phi(\lambda y.E))$ (si x est libre dans E)
 - (d) $\phi(\lambda x.(E_1 E_2)) = ((\mathbf{S} \phi(\lambda x.E_1)) \phi(\lambda x.E_2))$ (si x est libre dans E_1 ou dans E_2).

Donner un terme combinateur de comportement équivalent à $\lambda x.\lambda y.(y x)$.

Numéro anonymat :

Question 5. Vérifier par calcul que le terme combinateur obtenu à la question précédente se comporte effectivement comme $\lambda x.\lambda y.(y x)$.

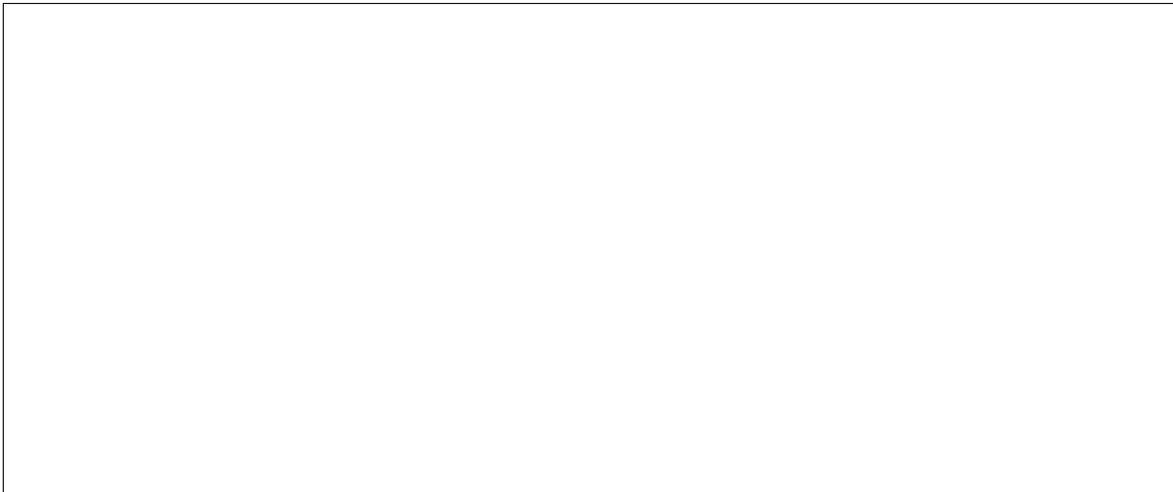


Question 6. Justifier de la décidabilité ou non du problème ayant pour données :

— Un terme combinateurs C_1 ,

et pour question :

— C_1 admet-il une forme normale, c'est-à-dire une forme irréductible par les 3 règles données en début de section 2 ?



NP-complétude

Question 7. Soit P_1 un problème NP-complet. Proposer une méthode faisant intervenir P_1 pour montrer qu'un autre problème P_2 est NP-complet.

-
-

Question 8. On suppose que CLIQUE, la recherche d'existence d'un sous-graphe complet (ensemble de nœuds d'un graphe qui sont tous voisins entre eux deux à deux) de taille k dans un graphe est NP-complète.

On considère le problème ENSEMBLE INDÉPENDANT qui a pour données :

- Un graphe G ,
- Un entier k ,

et pour question :

- Existe-t-il un ensemble de k nœuds de G dont aucun n'est voisin d'un autre ?

Ce problème est dans NP, montrer qu'il est NP-complet.