Récriture (premier ordre) — Termes

Signature : triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$

- $\mathcal{S}$: ensemble $\neq \varnothing$ de sortes
- $\mathcal{F}$: ensemble de symboles
- τ : fonction $\mathcal{F} \to \mathcal{S}^{\mathbb{N}_+}$,

$$f \in \mathcal{F} \mapsto s_1 \times \ldots \times s_n \to s$$

n : arité de f

Récriture (premier ordre) — Termes

$(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$,
$X = \cup_{s \in \mathcal{S}} X_s$: ensemble de variables

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$: plus petit ensemble tel que

- $x \in X_s$ terme de sorte s
- $f \in \mathcal{F}$, $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$,
  $t_1 : s_1, \ldots \times t_n : s_n$
  $f(t_1, \ldots, t_n)$ terme de sorte s

Termes clos : $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \varnothing)$

Arbres $\rightsquigarrow$ définition alternative : avec des positions attention aux infinis

Récriture (premier ordre) — Termes

Définition du sous-terme en fonction des positions

Sous-terme de t à position p, $t|_p$, défini par l'ensemble de positions :
$\{q \in \mathbb{N}_+^* \mid p \cdot q \in \mathcal{P}\mathrm{os}(t)\}$

$$t|_p(q) = t(p \cdot q)$$

Si $t|_p$, $(p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(t))$ et u de même sorte,
Remplacement $t[u]_p$, défini par l'ensemble de positions :
$\{q \in \mathbb{N}_+^* \mid q \in \mathcal{P}\mathrm{os}(t) \wedge p \not\leq_{\text{préf.}} q\} \cup \{p \cdot q \mid q \in \mathcal{P}\mathrm{os}(u)\}$

$$t[u]_p(q) = t(q) \qquad \text{si } q \in \mathcal{P}\mathrm{os}(t) \wedge p \not\leq_{\text{préf.}} q$$
$$t[u]_p(p \cdot q) = u(q)$$

Récriture (premier ordre) — Substitutions

Substitution : application $X \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ conservant les sortes
Généralement : identité sauf sur un ensemble fini
Notation postfixée : $t\sigma$
Extension naturelle unique aux termes

Renommage : rel. d'équiv. analogue à l'α-conversion

$$\sigma = \{x_1 \mapsto y_1, \cdots, x_n \mapsto y_n\} \qquad y_i \text{ distincts deux à deux}$$

Récriture (premier ordre)

Règle de récriture : couple de termes $s \to t$

$$s \xrightarrow[l \to r, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p \equiv l\sigma \quad t \equiv s[r\sigma]_p$$

Système de récriture : ensemble de règles

$\underset{R}{\to}$: $s \underset{R}{\to} t$ ssi $\exists l \to r \in R, \exists p \in \mathcal{P}os(s), \exists \sigma, s \xrightarrow[l \to r, \sigma]{p} t$

En fait, extension monotone (contexte) stable (subst.) du système

Clôture réflexive/transitive : $\underset{R}{\to}^{\star}$

Clôture transitive : $\underset{R}{\to}^{+}$

Récriture (premier ordre) — Exemple calcul

Arithmétique binaire

Représentation de 6 : $\#110$. Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y \ldots\}$;

Signature : $\mathcal{F} = \{\# : 0\ ;\ 0 : 1\ ;\ 1 : 1\ ;\ + : 2\}$;

Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \# + x & \to & x & x + \# & \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 & \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 & \to & ((x+y) + \#1)0 \end{cases}$$

Relation $\to$ monotone : si $s \to t$ alors $C[s] \to C[t]$;

stable : si $s \to t$ alors $s\sigma \to t\sigma$.

$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1 \to (\#1)1$ STOP

Récriture (premier ordre) — Exemple calcul

Arithmétique unaire ?

Récriture (premier ordre)

Puissance de calcul : ? Turing complet

Questions :

- Existence du résultat $\rightsquigarrow$ terminaison
- Unicité du résultat $\rightsquigarrow$ confluence, convergence

t forme normale pour R si aucun u tel que $t \underset{R}{\longrightarrow} u$

t forme normale de s pour R si aucun u tel que $t \underset{R}{\longrightarrow} u$ et $s \underset{R}{\longrightarrow}^{\star} t$

$\rightsquigarrow$ s normalisable

Système normalisant si tout terme normalisable

Système fortement normalisant si tout calcul mène à une forme normale

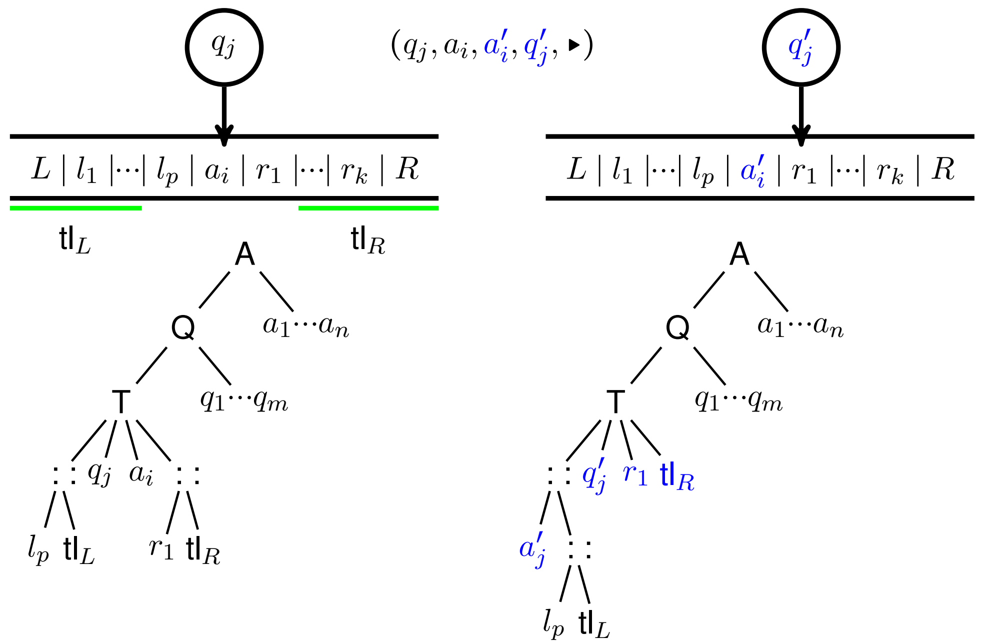
Automatisation ? $\rightsquigarrow$ correctes, incomplètes...

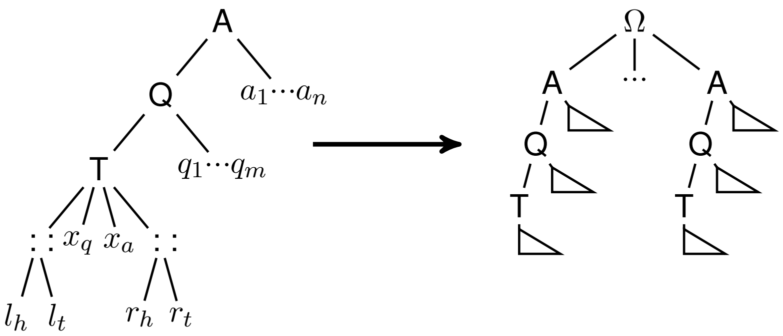
Toujours difficile.

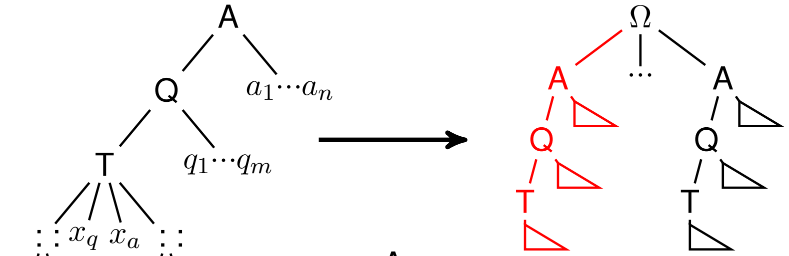
- $f(f(x)) \to f(x)$. mouais...
- $f(f(x)) \to f(g(f(x)))$.
- $f(a, b, x) \to f(x, x, x)$.
- 1800 règles (> 1000 symboles). spec. com.
- $\begin{cases} a(a(x)) & \to & b(c(x)) \\ b(b(x)) & \to & a(c(x)) \\ c(c(x)) & \to & a(b(x)) \end{cases}$
- Syracuse...

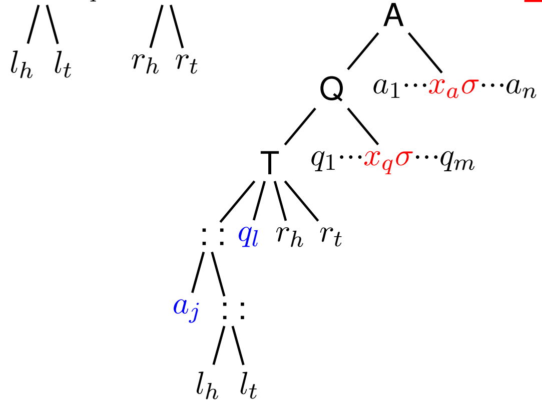
Décidabilité... Et si on restreint les règles ?

- Qualité : linéaires ?
- Quantité ?





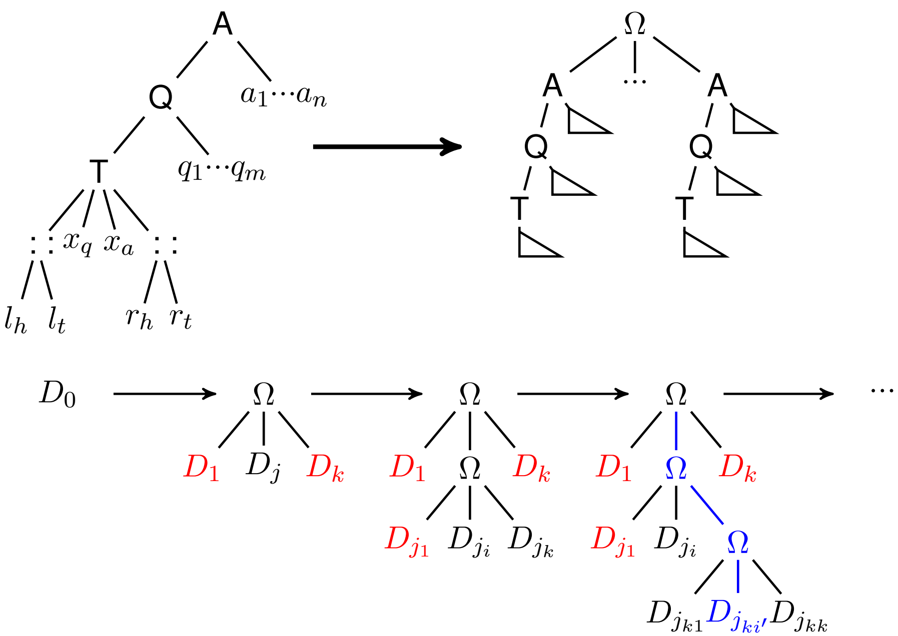




$(q_k, a_i, a_j, q_l, \blacktriangleright)$

$x_a\sigma$ à la place de a_i

$x_q\sigma$ à la place de q_k



Récriture (premier ordre) — Terminaison

Décidabilité... Et si on restreint les règles ?

- Qualité : linéaires ?
- Quantité ?

Cool : indécidable même pour une seule règle linéaire à gauche

Récriture (premier ordre)

Questions :

- Existence du résultat $\rightsquigarrow$ terminaison
- Unicité du résultat $\rightsquigarrow$ confluence, convergence

R confluent si

$$u \leftarrow^{\star} s \rightarrow^{\star} v \Rightarrow \exists t,\ u \rightarrow^{\star} t \leftarrow^{\star} v$$

R localement confluent si

$$u \leftarrow s \rightarrow v \Rightarrow \exists t,\ u \rightarrow^{\star} t \leftarrow^{\star} v$$

Récriture (premier ordre)

Exemple : théorie équationnelle des groupes

$$\begin{array}{lcl} x \cdot e & = & x \\ x \cdot x^{-1} & = & e \\ (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

Pas facile pour les preuves... et si on oriente les équations ?

Récriture (premier ordre)

Exemple : théorie équationnelle des groupes

$$\begin{array}{lcl} x \cdot e & \rightarrow & x \\ x \cdot x^{-1} & \rightarrow & e \\ (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

ça ne conflue pas !

$$x \cdot (x^{-1} \cdot z) \quad \leftarrow \quad (x \cdot x^{-1}) \cdot z \quad \rightarrow \quad e \cdot z$$

Récriture (premier ordre)

Décidabilité

Donnée : système R (fini)

Question : R confluent ?

Indécidable admis (réd. pb. du mot)

Récriture (premier ordre)

Très souvent R non confluent : paire critique non confluente.

$$\begin{array}{lcl} x \cdot e & \to & x \\ x \cdot x^{-1} & \to & e \\ (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

$$x \cdot (x^{-1} \cdot z) \leftarrow (x \cdot x^{-1}) \cdot z \to e \cdot z$$

Idée : ajouter $\quad x \cdot (x^{-1} \cdot z) \to e \cdot z$

Récriture (premier ordre)

Équations vers système convergent (et même calcul) : complétion

$$\begin{array}{lcl} x \cdot e & = & x \\ x \cdot x^{-1} & = & e \\ (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

Récriture (premier ordre)

Équations vers système convergent (et même calcul) : complétion

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} e \cdot x & \to & x & e^{-1} & \to & e \\ x \cdot e & \to & x & (x \cdot y)^{-1} & \to & y^{-1} \cdot x^{-1} \\ x^{-1} \cdot x & \to & e & x \cdot (x^{-1} \cdot y) & \to & y \\ x \cdot x^{-1} & \to & e & x^{-1} \cdot (x \cdot y) & \to & y \\ (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) & (x^{-1})^{-1} & \to & x \end{array}$$

Récriture (premier ordre)

$e \cdot x = x \cdot e$?

Avec équations...

$$\begin{aligned} e \cdot x &= e \cdot (x \cdot e) = e \cdot (x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1})) = e \cdot ((x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1}) \\ &= e \cdot (e \cdot (x^{-1})^{-1}) = (e \cdot e) \cdot (x^{-1})^{-1} = e \cdot (x^{-1})^{-1} \\ &= (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1} = x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) = x \cdot e \end{aligned}$$

... avec règles :

$$e \cdot x \to x \equiv x \leftarrow x \cdot e$$