λ-calcul

Trois grands modèles :

- Machines de Turing (Turing 36, Post 36)
- Fonctions récursives (Gödel 31, Kleene ~40, Ackermann ~40)
- λ-calcul (Church ~30)

  $\leadsto$ λ-calculs typés (Church ~40...)

Syntaxe

λ-terme s :

- Ensemble de variables, infini : X
- Ensemble des λ-terme s, ensemble inductif : Λ $(\Lambda(X))$
  - $x \in X$ alors $x \in \Lambda$
  - $E_1 \in \Lambda$ et $E_2 \in \Lambda$ alors $(E_1\ E_2) \in \Lambda$ application
  - $E \in \Lambda$ et $x \in X$ alors $\lambda x.E \in \Lambda$ abstraction

  « Fonction qui à x associe E »

Exemples :

$\lambda x.x$ « fonction identité »

$\lambda x.c$ « fonction constante c »

$(f\ x)$ « f appliquée à x »

Structure

Naturellement, raisonnement par induction sur λ-termes :

Soit P prop. sur Λ,

- $P(x)$ pour tout $x \in X$
- $P(E_1)$ et $P(E_2)$ alors $P((E_1\ E_2))$
- $P(E)$ alors $P(\lambda x.E)$

Alors $P(E)$ pour tout $E \in \Lambda$ (car $\Lambda \subseteq \{E \text{ t.q. } P(E)\}$)

Variables libres

But : exprimer $\lambda x.E$, x « muet » x lié

Ex. : $\lambda x.x$ et $\lambda y.y$ équivalentes pour identité

Variables libres d'un λ-terme t $(FV(t))$:

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV((E_1\ E_2)) = FV(E_1) \cup FV(E_2)$
- $FV(\lambda x.E) = FV(E) - \{x\}$

Variables, substitution

Remplacement de variable par λ-terme dans λ-terme.

λ-terme obtenu en substituant x par F dans E ($E[x \mapsto F]$) :

- $E = y \in X$
  - Si $x = y$ alors F
  - Si $x \neq y$ alors y
- $E = (E_1\ E_2)$ alors $(E_1[x \mapsto F]\ E_2[x \mapsto F])$
- $E = \lambda y.E_1$
  - Si $x = y$ alors E
  - Sinon
    - Si $y \notin FV(F)$ alors $\lambda y.E_1[x \mapsto F]$
    - Si $y \in FV(F)$ alors changement de nom de y capture
      $z \notin FV(F) \cup FV(E_1) \leadsto \lambda z.E_1[y \mapsto z][x \mapsto F]$

Variables, α-conversion

Relation α-réduction ($\to_\alpha$) :

$$\lambda x.E \to_\alpha \lambda y.E[x \mapsto y] \text{ pour tout } y \notin FV(E)$$

Relation α-conversion ($=_\alpha$) : clôture de $\to_\alpha$

- Réflexive
- Symétrique
- Transitive
- Par contexte

α-conversion : congruence

Variables, α-conversion

Proposition.

E_1 et E_2 α-convertibles $\Leftrightarrow$

- $E_1 = E_2 = x \in X$
- $E_1 = (F_1\ G_1)$ et $E_2 = (F_2\ G_2)$ où
  $F_1 =_\alpha F_2$ et $G_1 =_\alpha G_2$
- $E_1 = \lambda x.F_1$ et $E_2 = \lambda y.F_2$ où
  $F_1[x \mapsto z] =_\alpha F_2[y \mapsto z]$ avec $z \notin FV(F_1) \cup FV(F_2)$

Dém. par induction

Corollaire.

$=_\alpha$: décidable

Désormais on travaille modulo $=_\alpha$-conversion

β-réduction

Expression de l'évaluation d'une fonction appliquée à un λ-terme

Relation β-réduction en un pas ($\rightarrow_\beta$)

$$(\lambda x.E_1\ E_2) \rightarrow_\beta E_1[x \mapsto E_2] \text{ et clôture par contexte}$$

Exemple :

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda x.x\ c) & \rightarrow_\beta & x[x \mapsto c] = c \\
((\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ b)\ c) & \rightarrow_\beta & (\lambda y.(x\ y)[x \mapsto b]\ c) \\
 & = & (\lambda y.(b\ y)\ c) \\
 & \rightarrow_\beta & (b\ y)[y \mapsto c] \\
 & = & (b\ c)
\end{array}$$

β-réduction

Expression de l'évaluation d'une fonction appliquée à un λ-terme

Relation β-réduction en un pas ($\rightarrow_\beta$)

$$(\lambda x.E_1\ E_2) \rightarrow_\beta E_1[x \mapsto E_2] \text{ et clôture par contexte}$$

Relation β-réduction, (resp. β-réduction stricte) :

Clôture transitive et réflexive (resp. transitive) de $\rightarrow_\beta$

Notée $\rightarrow_\beta^\star$ (resp. $\rightarrow_\beta^+$)

β-réduction

λ-terme E en forme normale s'il n'existe aucun F tel que $E \rightarrow_\beta F$

λ-terme F forme normale d'un λ-terme E si $E \rightarrow_\beta^\star F$ et F forme normale

$$\Delta = \lambda x.(x\ x) \qquad \text{forme normale}$$

$$\begin{array}{rcl}
\Omega = (\Delta\ \Delta) & = & (\lambda x.(x\ x)\ \Delta) \\
 & \rightarrow_\beta & (x\ x)[x \mapsto \Delta] \\
 & = & (\Delta\ \Delta) = \Omega
\end{array}$$

Corollaire.

Un λ-terme n'a pas toujours de forme normale

β-réduction

Théorème.

Si un λ-terme a une forme normale alors celle-ci est unique

Même résultat quel que soit l'ordre des calculs

Théorème. (Church-Rosser)

Si $E \rightarrow_\beta^\star E_1$ et $E \rightarrow_\beta^\star E_2$

Alors il existe $F \in \Lambda$ t. q. $E_1 \rightarrow_\beta^\star F$ et $E_2 \rightarrow_\beta^\star F$

C.-R. $\Rightarrow$ th.

β-conversion

Relation de β-conversion ($=_\beta$) :
clôture réflexive, symétrique, transitive de $\rightarrow_\beta$.
PAS la clôture symétrique de $\rightarrow_\beta^\star$

Corollaire.

$$E =_\beta F \Leftrightarrow \text{il existe } G \text{ t. q. } \begin{cases} E & \rightarrow_\beta^\star & G \\ F & \rightarrow_\beta^\star & G \end{cases}$$

Dém. par récurrence sur le nombre de $\rightarrow_\beta$ ou $\leftarrow_\beta$ de E à F

β-réduction

$$\lambda y.y \leftarrow_\beta (\lambda x.\lambda y.y\ \Omega) \rightarrow_\beta \cdots$$

Suivant stratégie, forme normale atteinte… ou pas !

Réduction normale : choix du rédexe le plus à gauche

Théorème. (Curry)
Si E a une forme normale F alors la réduction normale de E aboutit à F

Expressivité

Codage des entiers : entiers de Church

$n \in \mathbb{N} \quad \mapsto \quad \overline{n} = \lambda f.\lambda x.(\underbrace{f \cdots (f}_{n}\ x) \cdots)$ (fonction associant $f^n(x)$ à f et x)

Fonction successeur $succ$ t. q. pour tout $n \in \mathbb{N}, (succ\ \overline{n}) \to_\beta^\star \overline{n+1}$:

Ainsi $(((succ\ \overline{n})\ f)\ x) \to_\beta^\star (\underbrace{f \cdots (f}_{n+1}\ x)) =_\beta (f\ ((\overline{n}\ f)\ x))$

D'où $succ = \lambda n.\lambda f.\lambda x.(f\ ((n\ f)\ x))$

Exo. : add, mul, etc.

Expressivité

Théorème. (Point fixe)

Il existe Y t. q. pour tout H : $(Y\ H) =_\beta (H\ (Y\ H))$

Exemple : opérateur de Curry $\lambda h.(\lambda x.(h\ (x\ x))\ \lambda x.(h\ (x\ x)))$

Corollaire.

Pour tout H, $(HX) = X$ admet (au moins) une solution