

# CALCU – TD

## 1 Échauffement

*Question 1.* Indiquer dans les expressions suivantes les occurrences libres et liées de chaque variable, indiquer le cas échéant le  $\lambda$  qui lie une occurrence.

- $((x v) \lambda y.(y v))w$
- $((\lambda y.((y x) \lambda x.((y \lambda y.z) x)) v) w)$

## 2 Substitutions

*Question 2.* Calculer les substitutions suivantes.

1.  $\lambda y.(x \lambda x.x)[x \mapsto \lambda y.(x y)]$
2.  $(y \lambda v.(x v))[x \mapsto \lambda y.(v y)]$
3.  $\lambda x.(y \lambda x.(z x))[y \mapsto \lambda y.(x y)]$

*Question 3.* Indiquer ceux des termes suivants qui sont  $\alpha$ -convertibles.

1.  $\lambda x.(z \lambda x.\lambda z.(x z))$
2.  $\lambda z.(x \lambda z.\lambda x.(z x))$
3.  $\lambda z.(x \lambda x.\lambda z.(x z))$

## 3 $\beta$ -réduction

*Question 4.* Représenter si possible toutes les réductions possibles des termes suivants.

1.  $(\lambda x.(x (x y)) N)$
2.  $(\lambda x.y N)$
3.  $(\lambda x.(\lambda y.(y x) z) v)$
4.  $((Z Z) A)$  avec  $Z = \lambda z.(\lambda x.(x ((z z) x)))$

## 4 Expressivité

Rappel : un entier de Church  $\bar{n}$  prend en arguments deux termes et applique la composition  $n$ -fois du premier au second :  $((\bar{n} f) x) = (f \cdots (f x) \cdots)$ .

On définit les booléens *true* et *false* comme les première et deuxième projections en  $\lambda$ -calcul pur.

*Question 5.* Proposer un  $\lambda$ -terme pour le successeur, l'addition, la multiplication et l'exponentiation d'entiers de Church.

*Question 6.* Proposer un  $\lambda$ -terme pour la construction "if-then-else".

*Question 7.* Proposer un  $\lambda$ -terme pour la construction de paires.

*Question 8.* Proposer un  $\lambda$ -terme effectuant un test à 0 sur les entiers de Church.

*Question 9.* Proposer un  $\lambda$ -terme calculant le prédécesseur d'un entier de Church.