Numéro d'anonymat : **← CE N'EST PAS votre numéro d'étudiant**

LIFLC – ECA

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Tout document interdit.

Induction

Pour tout ensemble (fini) A, un *mot* sur A est une suite finie d'éléments de A. On définit l'opération de *concaténation* sur les mots de A comme étant : uv est la suite u suivie de la suite v. On note ε la suite vide (le mot sans lettre). On note A^* l'ensemble des mots sur A.

Soit $V = \{[,]\}$ (c'est-à-dire l'ensemble constitué de deux éléments [et]). On défini inductivement l'ensemble Σ par les deux règles :

1. ε (le mot sans symbole) appartient à Σ
2. Si u et v appartiennent à Σ, alors $[u]v$ appartient à Σ

Par exemple le mot [[ ][ ]][ ] appartient à Σ.

Question 1. Donner deux autres éléments de Σ (et justifier par les règles) et un mot qui ne lui appartient pas.

Correction

1. ε : par la première règle
2. [ ] car [ ] $= [\varepsilon]\varepsilon$
3.][

Question 2. On définit la fonction de poids p sur V par : $p([) = 1$ et $p(]) = -1$ et on étend cette fonction à V^* par $p(x_1 \cdots x_n) = p(x_1) + \cdots + p(x_n)$ et $p(\varepsilon) = 0$. C'est-à-dire : le poids d'un mot sur V est la somme des poids de chacun des symboles qui le constituent.

Montrer que si $u \in \Sigma$ alors $p(u) = 0$.

Correction
Par induction sur $u \in \Sigma$.

— $p(\varepsilon) = 0$ par définition de la somme vide
— Si u et v sont dans Σ et si (par hypothèse d'induction) $p(u) = p(v) = 0$ alors $p([u]v) = p([) + p(u) + p(]) + p(v) = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$.

La propriété de poids nul est stable par les règles donc vérifiée par tout l'ensemble.

Logique propositionnelle : modélisation

On considère les énoncés suivants :

1. Si Bill rate son examen alors Bill sera déprimé.
2. S'il fait beau alors Bill est à la piscine.
3. S'il est à la piscine, Bill ne travaille pas.
4. Bill rate son examen s'il ne travaille pas.
5. Si Bill n'est pas à la piscine il sera déprimé.

Question 3. Modéliser le problème en logique propositionnelle.

Correction

B : il fait beau	T Bill travaille	P : à la piscine	R : Bill rate	D : déprimé
$R \Rightarrow D$	$B \Rightarrow P$	$P \Rightarrow \neg T$	$\neg T \Rightarrow R$	$\neg P \Rightarrow D$

Question 4. À l'aide d'une méthode sémantique montrer que Bill sera déprimé ; on pourra considérer en premier lieu la présence ou non de Bill à la piscine.

Correction
Soit I une interprétation qui satisfait chacune de ces formules montrons que $I(D) = 1$. Considérons $I(P)$.

1. Si $I(P) = 0$ alors $I(\neg P) = 1$ donc $I(D) = 1$.
2. Sinon $I(P) = 1$. Alors $I(\neg T) = 1$ donc $I(R) = 1$ donc $I(D) = 1$.

Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
2. $\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

Correction

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,ax \qquad \dfrac{}{A, A \Rightarrow B \vdash A}\,ax}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\,\Rightarrow_e}{A \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee B, A \Rightarrow B \vdash A \vee B}\,ax \qquad \dfrac{}{A \vee B, A \Rightarrow B, B \vdash B}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,ax \qquad \dfrac{}{A, A \Rightarrow B \vdash A}\,ax}{A \vee B, A, A \Rightarrow B \vdash B}\,\Rightarrow_e}{A \vee B, A \Rightarrow B \vdash B}\,\vee_e}{\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)}\,\Rightarrow_i *2$$

Logique du premier ordre : déduction naturelle

Le monde se divise en deux catégories : ceux qui ont un pistolet (chargé bien entendu) et ceux qui creusent. Nul ne possède à la fois une pelle et un pistolet. Toute personne possédant un pistolet ne creuse pas. Toute personne possédant une pelle fait creuser toute personne ne possédant pas de pistolet. Toute personne possédant un pistolet fait creuser toute personne ne possédant pas de pistolet.

Question 5. Formaliser le monde ci-dessus décrit en logique du premier ordre.

Correction
Il nous faut trois symboles de relations unaires : Pel (posséder une pelle), Pis (posséder un pistolet) et Cr (creuser).

On a alors les formules suivantes :

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \forall x, Cr(x) \vee Pis(x) \\ \neg \exists x, Pel(x) \wedge Pis(x) \\ \forall x, Pis(x) \Rightarrow \neg Cr(x) \\ \forall x \forall y, Pel(x) \Rightarrow \neg Pis(y) \Rightarrow Cr(y) \\ \forall x \forall y, Pis(x) \Rightarrow \neg Pis(y) \Rightarrow Cr(y) \end{array} \right.$$

Question 6. Montrer, à l'aide de la déduction naturelle, que toute personne possédant une pelle ne possède pas de pistolet.

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash Pel(x)}\,ax \quad \dfrac{}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash Pis(x)}\,\wedge_i}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash Pel(x) \wedge Pis(x)}\,\wedge_i}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash \exists x, \underbrace{(Pel(x) \wedge Pis(x))}_{F}}\,\exists_i \qquad \dfrac{}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash \neg \exists x, F}\,ax}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash \bot}\,\neg_e}{Pel(x), \Gamma \vdash \neg Pis(x)}\,\neg_i}{\Gamma \vdash Pel(x) \Rightarrow \neg Pis(x)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall x, Pel(x) \Rightarrow \neg Pis(x)}\,\forall_i$$

Question 7. *Bonus.* Montrer que toute personne possédant une pelle creuse. (Attention assez difficile. Il est très important que vous ayez une preuve informelle **AVANT** de vous lancer dans la preuve formelle).

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash \forall x, Cr(x) \lor Pis(x)}\;ax}{\Gamma_1 \vdash Cr(x) \lor Pis(x)}\;\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{}{Cr(x), \Gamma_1 \vdash Cr(x)}\;ax \quad \dfrac{}{Cr(x), \Gamma_1 \vdash \neg Cr(x)}\;ax}{Cr(x), \Gamma_1 \vdash \bot}\;\neg_e \quad \dfrac{\dfrac{}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash \neg \exists x, Pel(x) \land Pis(x)}\;ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash Pel(x)}\;ax \quad \dfrac{}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash Pis(x)}\;ax}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash Pel(x) \land Pis(x)}\;\land_i}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash \exists x, Pel(x) \land Pis(x)}\;\exists_i}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash \bot}\;\neg_e}{\underbrace{\neg Cr(x), Pel(x), \Gamma}_{\Gamma_1} \vdash \bot}\;\lor_e}{Pel(x), \Gamma \vdash Cr(x)}\;\bot_c}{\Gamma \vdash Pel(x) \Rightarrow Cr(x)}\;\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall x, Pel(x) \Rightarrow Cr(x)}\;\forall_i$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\text{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \land G}\ (\land_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \land G}{\Gamma \vdash F}\ (\land_e^g) \quad \frac{\Gamma \vdash F \land G}{\Gamma \vdash G}\ (\land_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \lor G}\ (\lor_i^g) \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \lor G}\ (\lor_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \lor G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\lor_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre } \textit{ni} \text{ dans } \Gamma \textit{ ni} \text{ dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$