Numéro d'anonymat : **CE N'EST PAS votre numéro d'étudiant**

LIFLC – ECA

Lire ATTENTIVEMENT les questions. Il est possible d'admettre des réponses pour ne pas rester bloqué dans un problème. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Seule une PAGE A4 manuscrite de documents est autorisée

1 Induction

Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par :
— $(0, 1) \in D$,
— si $(n, m) \in D$ alors $(n + 1, m \times (n + 1)) \in D$

Question 1. Donner cinq éléments de D.

$(1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), (5, 120) \dots$

Question 2. Soit $F = \{(n, n!) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $n!$ désigne la factorielle de n (on rappelle que $0! = 1$). Montrer que $D = F$.

C'est une égalité d'ensembles on va donc montrer une double inclusion.

$\underline{D \subset F}$

par induction sur la définition de D.

— $(0, 1) = (0, 0!)$
— Si $(n, m) \in D$ alors par hypothèse d'induction on a un k tel que $(n, m) = (k, k!)$ et donc $(k + 1, k! \times (k + 1)) = (k + 1, (k + 1)!) \in F$

$\underline{F \subset D}$

Par induction sur n.

— $(0, 0!) = (0, 1) \in D$
— Si $(n, n!) \in D$ alors $(n + 1, (n + 1)!) = (n + 1, n! \times (n + 1)) \in D$.

2 Logique propositionnelle

On considère les énoncés suivants :

1. Mon chat dort ou mange.
2. S'il mange alors il n'a pas faim.
3. S'il dort alors il n'est pas embêtant.
4. S'il n'est pas embêtant et que je le gratouille alors il ronronne.
5. S'il n'a pas faim alors il n'est pas embêtant.

Question 3. Modéliser le problème en logique propositionnelle.

D : dort, M : mange, PF : pas faim, PE : pas embêtant, G : gratouillé, R : ronronne.

$\Gamma = \{D \vee M,\ M \Rightarrow PF,\ D \Rightarrow PE,\ PE \wedge G \Rightarrow R,\ PF \Rightarrow PE\}$

Question 4. À l'aide d'une méthode sémantique montrer que mon chat ronronne si je le gratouille.

On veut $\Gamma \models G \Rightarrow R$. Soit $I \models \Gamma$ telle que $I \models G$.
$I(D \vee M) = 1$ donc soit $I(D) = 1$ soit $I(M) = 1$.
Si $I(D) = 1$ alors $I(PE) = 1$ car $I(D \Rightarrow PE) = 1$. Si $I(M) = 1$ alors $I(PF) = 1$ car $I(M \Rightarrow PF) = 1$ et $I(PE) = 1$ car $I(PF \Rightarrow PE) = 1$. Dans les deux cas on a $I(PE) = 1 = I(G)$ donc $I(PE \wedge G) = 1$ et finalement $I(R) = 1$ car $I(PE \wedge G) \Rightarrow R = 1$.

Question 5. À l'aide de la déduction naturelle montrer que mon chat ronronne si je le gratouille.

Brutalement en suivant notre preuve sémantique…

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash D \vee M$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash PE \wedge G \Rightarrow R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash D \Rightarrow PE$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash D$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma' \vdash PE$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash G$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\Gamma' \vdash PE \wedge G$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma' = \Gamma, G, D \vdash R$}
\AxiomC{$\dots$}
\AxiomC{$\dots$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'' \vdash PF \Rightarrow PE$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'' \vdash M \Rightarrow PF$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'' \vdash M$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma'' \vdash PF$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma'' \vdash PE$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\Gamma'' \vdash PE \wedge G$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma'' = \Gamma, G, M \vdash R$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma, G \vdash R$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash G \Rightarrow R$}
\end{prooftree}
$$

Ou bien en factorisant un peu la recherche de PE (on pose $\Gamma' = \Gamma, G, D$ et $\Gamma'' = \Gamma, G, M$)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash PE \wedge G \Rightarrow R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash G$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash D \vee M$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash D \Rightarrow PE$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash D$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma' \vdash PE$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'' \vdash PF \Rightarrow PE$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'' \vdash M \Rightarrow PF$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'' \vdash M$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma'' \vdash PF$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma'' \vdash PE$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma, G \vdash PE$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\Gamma, G \vdash PE \wedge G$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, G \vdash R$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash G \Rightarrow R$}
\end{prooftree}
$$

3 Logique du premier ordre

Le monde se divise en deux catégories incompatibles : les Jedis et les Siths. Chaque personne peut être formée par une autre personne suivant les deux règles suivantes : les Siths ne peuvent former que des Siths, et les Jedis ne peuvent être formés que par des Jedis. Si deux personnes se combattent et que l'une est le fils de l'autre, alors le père est un Sith et le fils un Jedi.

Question 6. Formaliser le monde décrit ci-dessus, bien préciser les différents symboles et pour chacun son arité et sa signification avec soin.

Prédicats : $\{J : 1,\ S : 1,\ F : 2,\ C : 2,\ P : 2\}$
$J(x)$: x est un Jedi, $S(x)$: x est un Sith, $F(x,y)$: x a formé y, $C(x,y)$: x combat y, $P(x,y)$: x est le père de y.

$$
\begin{array}{l}
\forall x, J(x) \vee S(x) \\
\forall x, J(x) \Rightarrow \neg S(x) \\
\forall x, S(x) \Rightarrow \neg J(x) \\
\forall x, \forall y, S(x) \Rightarrow F(x,y) \Rightarrow S(y) \\
\forall x, \forall y, F(x,y) \Rightarrow J(y) \Rightarrow J(x) \\
\forall x, \forall y, C(x,y) \Rightarrow P(x,y) \Rightarrow (S(x) \wedge J(y))
\end{array}
$$

Numéro anonymat :

Question 7. Comme chacun le sait, Yoda est le formateur de ObiWan qui lui-même a formé Luke. Luke et Vador se combattent et Vador est le père de Luke, Vador est formé par ObiWan.

En étendant le langage de la question précédente avec des constantes appropriées, formaliser ces faits.

Termes : $\{Y : 0,\ O : 0,\ L : 0,\ V : 0\}$
Y : Yoda, L : Luke, V : Vador, O : ObiWan.

$$\{F(Y,O),\ F(O,L),\ F(O,V),\ C(V,L),\ P(V,L)\}$$

Question 8. Montrer, à l'aide de la déduction naturelle, que Luke est un Jedi et Vador un Sith.

On pose Γ l'ensemble des formules déjà définies dans cet exercice.
On cherche à montrer : $\Gamma \vdash S(V) \wedge J(L)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, \forall y, C(x,y) \Rightarrow P(x,y) \Rightarrow (S(x) \wedge J(y))}\,ax}{\Gamma \vdash C(V,L) \Rightarrow P(V,L) \Rightarrow (S(V) \wedge J(L))}\,\forall_e \times 2 \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash C(V,L)}\,ax}{\Gamma \vdash P(V,L) \Rightarrow (S(V) \wedge J(L))}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash P(V,L)}\,ax}{\Gamma \vdash S(V) \wedge J(L)}\,\Rightarrow_e$$

Question 9. En déduire, toujours à l'aide de la déduction naturelle, que Yoda est un Jedi (on pourra chercher à montrer au passage que ObiWan est un Jedi). (Attention : assez difficile)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x, \forall y, F(x,y) \Rightarrow J(y) \Rightarrow J(x)}\,ax}{\Gamma \vdash F(Y,O) \Rightarrow J(O) \Rightarrow J(Y)}\,\forall_e \times 2 \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash F(Y,O)}\,ax}{\Gamma \vdash J(O) \Rightarrow J(Y)}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, \forall y, F(x,y) \Rightarrow J(y) \Rightarrow J(x)}\,ax}{\Gamma \vdash F(O,L) \Rightarrow J(L) \Rightarrow J(O)}\,\forall_e \times 2}{\Gamma \vdash J(L) \Rightarrow J(O)} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Question 8}}{\Gamma \vdash S(V) \wedge J(L)}}{\Gamma \vdash J(L)}\,\wedge_e^d}{\Gamma \vdash J(O)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash J(Y)}\,\Rightarrow_e$$

Question 10. Montrer que Luke n'est pas formé par Vador. (Difficile)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F(V,L),\Gamma \vdash \forall x, \forall y, S(x) \Rightarrow F(x,y) \Rightarrow S(y)}\,ax}{F(V,L),\Gamma \vdash S(V) \Rightarrow F(V,L) \Rightarrow S(L)}\,\forall_e \times 2 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Question 8}}{F(V,L),\Gamma \vdash S(V) \wedge J(L)}}{F(V,L),\Gamma \vdash S(V)}\,\wedge_e}{F(V,L),\Gamma \vdash F(V,L) \Rightarrow S(L)}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{F(V,L),\Gamma \vdash F(V,L)}\,ax}{F(V,L),\Gamma \vdash S(L)}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F(V,L),\Gamma \vdash \forall x, J(x) \Rightarrow \neg S(x)}\,ax}{F(V,L),\Gamma \vdash J(L) \Rightarrow \neg S(L)}\,\forall_e \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Question 8}}{F(V,L),\Gamma \vdash S(V) \wedge J(L)}}{F(V,L),\Gamma \vdash J(L)}\,\wedge_e}{F(V,L),\Gamma \vdash \neg S(L)}\,\Rightarrow_e}{F(V,L),\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma \vdash \neg F(V,L)}\,\neg_i
$$

$$\dfrac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\text{aff})$$

$$\dfrac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \quad \dfrac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \quad \dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\dfrac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \dfrac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre } \textit{ni} \text{ dans } \Gamma \ \textit{ni} \text{ dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$