LIFLC – TD1

Ensembles inductifs, fonctions

Question 1. Montrer par induction sur les entiers que $\Sigma_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.

Question 2. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par les règles :

$$\left\{ \begin{array}{ccll} & \rightarrow & (n,0) & \text{(c'est-à-dire : } (n,0) \in D) \\ (n,n') & \rightarrow & (n, n+n') & \end{array} \right.$$

1. Donner quelques éléments de D.
2. Montrer que pour deux entiers naturels n et n' on a $(n,n') \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $n' = kn$.

Question 3. Soit V un ensemble de lettres. Donner une définition inductive des palindromes sur V.

Question 4. On définit inductivement l'ensemble X de la façon suivante :
— $\varepsilon \in X$,
— si $u \in X$ alors $aub \in X$.
Montrer que $X = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}(= Y)$.
Par convention $a^0 = \varepsilon$.

Question 5. On rappelle la définition inductive de l'ensemble $\mathcal{L}$ des listes finies d'entiers vue en cours :

$$\left\{ \begin{array}{cclll} & \rightarrow & [\,] & \text{c.-à-d. } [\,] \in \mathcal{L} \\ l & \rightarrow & e :: l, e \in \mathbb{N} & \text{c.-à-d. } e :: l \in \mathcal{L} \text{ si } l \in \mathcal{L} \text{ pour } e \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Prouver que la fonction f suivante calcule bien la longueur de toute liste l (d'entiers…) passée en argument.

$$f(l) = \left\{ \begin{array}{cll} 0 & \text{si } l \text{ est de la forme } [\,] & \text{c.-à-d. liste vide} \\ 1 + f(l') & \text{si } l \text{ est de la forme } e :: l' & \text{c.-à-d. liste construite par ajout de } e \text{ en tête de } l' \end{array} \right.$$