

LIFLC – TD2

Notions abordées : induction, formules propositionnelles, interprétations

1 Induction

On se propose de regarder un sens du lemme de Newman. Une relation binaire \rightarrow_R sur E est dite :

- *Confluente* si pour tout $x, y, z \in E$, si $y \leftarrow_R^* x \rightarrow_R^* z$ alors il existe $v \in E$, $y \rightarrow_R^* v \leftarrow_R^* z$.
- *Localement confluente* si pour tout $x, y, z \in E$, si $y \leftarrow_R x \rightarrow_R z$ alors il existe $v \in E$, $y \rightarrow_R^* v \leftarrow_R^* z$.

Question 1. Montrer que si \rightarrow_R est localement confluente et que son inverse est *bien fondée* (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de suites infinies $x_i \rightarrow_R x_{i+1} \rightarrow_R x_{i+2} \rightarrow_R \dots$) alors elle est confluente.

2 Formules propositionnelles

Question 2. Les expressions suivantes sont-elles des formules propositionnelles ? Le cas échéant préciser les symboles de tête (racine de l'arbre).

$$a \vee b \wedge c \vee a \quad a \vee \neg b \Rightarrow \neg a \quad a \Rightarrow \wedge b \Rightarrow \neg c \quad a \neg \Rightarrow b \quad (a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow c) \Rightarrow a \Rightarrow c$$

Question 3. On se donne deux formules $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$, p une variable propositionnelle, I une interprétation.

Soit I' définie comme :

$$\begin{cases} I'(p) = I(G) \\ I'(q) = I(q) \text{ si } q \neq p \end{cases}$$

Montrer que $I'(F) = I(H)$ où H représente la formule F dont toutes les occurrences de p ont été remplacées par G .

3 Modélisation, interprétations

Question 4. On considère les propositions suivantes :

- Si Alice et Julie viennent à Paris, Zoé viendra aussi,
- Si Julie vient à Paris, Alice viendra aussi,
- Julie ou Zoé, l'une des deux au moins, viendra à Paris.

1. Modéliser ces 3 propositions en logique propositionnelle.
2. Démontrer que Zoé viendra à Paris en faisant une démonstration sémantique.

Question 5.

1. Formaliser en logique propositionnelle le problème suivant :
 - Si Frodon ne va pas au Mordor, Sauron prend le pouvoir ;
 - Si Sauron prend le pouvoir, Frodon est triste ;
 - Si Frodon va au Mordor, il ne possède pas l'anneau ;
 - Si Frodon ne possède pas l'anneau, il est triste ;
2. Montrer que Frodon est triste en utilisant un raisonnement sémantique.