## Ensembles inductifs — Épisode précédent

Ensemble inductif : plus petite partie close par règles

Preuve par induction : établir comme close la partie pertinente

Fonctions $f$ sur E inductif : établir comme clos le domaine où $f$ correcte

« **Construction** » des éléments ?

Ex. $\mathbb{N}$ avec Z et S

Ex. $\mathcal{L}$ avec [ ] et ::



## Ensembles inductifs — Caractérisation 2

**Proposition.**

$X \subseteq E$ induit de $(E, R)$ :

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \qquad \text{avec } X_0 = B, X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$$

$X \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ par induction sur $X$ : règles de construction de $X$

- $B = X_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$
- Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ alors $\in X_{i_0}$ donc image $\in X_{i_0+1} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$

donc $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ close donc contient la plus petite partie close c.-à-d. $X$

$X \supseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ par induction sur $\mathbb{N}$ : règles de construction de $\mathbb{N}$

- $X_0 = B \subseteq X$
- Si $X_i \subseteq X$, $R(X_i) \subseteq X$ car $X$ clos par $R$ donc $X_{i+1} \subseteq X$

donc $\{i \in \mathbb{N} \mid X_i \subseteq X\}$ clos par $\{\to 0; n \to n+1\}$ donc $\supseteq$ plus petite : $\mathbb{N}$



## Ensembles inductifs — Caractérisation 2

**Proposition.**

$X \subseteq E$ induit de $(E, R)$ :

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \qquad \text{avec } X_0 = B, X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$$

Idée : $X$ = éléments *accessibles* depuis $B$ par nombre fini d'étapes de $R$

Idée' : $X$ = éléments permettant de « descendre » et atteindre $B$ en nombre fini d'étapes de $R$ à l'envers



## Ensembles inductifs — Caractérisation 2

Ordre strict sur $E$ : relation binaire sur $E$, antiréflexive et transitive

Ordre strict $<$ bien fondé : il n'y a pas de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ t.q. pour tout $i$, $x_{i+1} < x_i$

$\mathbb{N}$ et $<$ usuel ? $\mathbb{Z}$ et $<$ usuel ? $\mathbb{R}^+$ et $<$ usuel ? ordre du dictionnaire ?

Idée : « descendre » et atteindre minimum en nombre fini d'étapes

$E$ et $<$ bien fondé sur $E$

$$\begin{cases} & \to \quad u \quad \text{pour tout } u \text{ minimal pour } < \\ u_1, \ldots, u_n & \to \quad v \quad \text{pour tous } u_i < v \end{cases}$$

schéma inductif définissant $E$

$\rightsquigarrow$ fonctions... $\rightsquigarrow$ preuves...

## Ensembles inductifs — Caractérisation 2

$E$ et $<$ bien fondé sur $E$

Fonctions récursives : appels sur valeurs décroissantes pour $<$
pour un $<$ bien choisi

Preuve par *induction bien fondée* : comme avant clos par schéma…
Reformulation : soit $F \subseteq E$ les éléments satisfaisant la propriété

Si pour tout $x \in E$, lorsque tous $y \in F$ pour $y < x$ alors $x \in F$
alors pour tout $x \in E$, $x \in F$

EX. factorisation



## Logique propositionnelle — Syntaxe

$X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ un ensemble infini de variables propositionnelles
Ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul propositionnel : ensemble inductif

- (B.1) : $x$ variable propositionnelle alors $x \in \mathcal{F}$
- (B.2) : $\bot \in \mathcal{F}$
- (I.1) : si $F \in \mathcal{F}$ alors $\neg F \in \mathcal{F}$
- (I.2) : si $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $F \diamond G \in \mathcal{F}$ où $\diamond \in \{\Rightarrow, \vee, \wedge\}$

Arbres $\rightsquigarrow$ parenthèses (*mais pas trop !*)
Précédence : $\neg$ plus forte priorité, puis $\wedge$, puis $\vee$, puis $\Rightarrow$
Associativité : à gauche pour $\vee$ et $\wedge$, à droite pour $\Rightarrow$

Notation : $F \Leftrightarrow G : (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$



## Logique propositionnelle — Sémantique

Sens des formules $\rightsquigarrow$ interprétation dans algèbre de Boole

Interprétation (du calcul propositionnel) : fonction $I : X \mapsto \mathbb{B}$
Étendue $I$ à $\mathcal{F}$ :

- Cas des variables déjà traité,
- $I(\bot) = 0$,
- $F \in \mathcal{F}$ alors $I(\neg F) = \overline{I(F)}$
- $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $I(F \vee G) = I(F) + I(G)$
- $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $I(F \wedge G) = I(F) \cdot I(G)$
- $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $I(F \Rightarrow G) = I(F) \dot{\Rightarrow} I(G)$

Seule vérité autorisée



## Algèbre de Boole — G. Boole 1815-1864

Booléens : oui, non ; 0, 1 ; haut, bas ; bleu, rouge ; ☺, ☹, etc.
Relation d'ordre : 0 < 1
Opérations classiques :

- $\bar{} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — complément
- $+ : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — $\bigcup$, ou, $\max$
- $\cdot : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — $\bigcap$, et, $\min$
- …

## Algèbre de Boole — G. Boole 1815-1864

| $\cdot$ | a | b | a $\cdot$ b |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 |

| $+$ | a | b | a + b |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 |

| $\dot{\Rightarrow}$ | a | b | a $\dot{\Rightarrow}$ b |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 |

| $\overline{\phantom{a}}$ | a | $\overline{\text{a}}$ |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |
| | 0 | 1 |



## Algèbre de Boole — G. Boole 1815-1864

Propriétés :

- 0 minimum, 1 maximum
- $x \cdot 1 = x \quad x \cdot 0 = 0$
- $x + 0 = x \quad x + 1 = 1$
- Complément : $x \cdot \overline{x} = 0 \quad x + \overline{x} = 1$
- Commutativité de $\min$ et $\max$
- Associativité de $\min$ et $\max$
- Distributivité
- Morgan : $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x + y} \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x \cdot y}$



## Algèbre de Boole — Tables de vérité

Idée : notation par extension

- Une ligne par valeurs possibles des variables
- Présentation des sous fonctions en colonnes

Fonctions booléennes : par extention $\rightsquigarrow$ une par table combien ?

Table de vérité :

- Première ligne sous-formules
- En dessous : table des interprétations



## Interprétation — Satisfaction, déduction…

- $I(F) = 1$ : $I$ satisfait $F$, noté $I \models F$.
- Si $\Sigma$ ens. de formules, si $I \models F$ pour toute $F \in \Sigma$ : $I$ satisfait $\Sigma$ ($I \models \Sigma$)
- $F$ tautologie ( $\models F$) si pour toute interprétation $I$, $I \models F$
- $\Sigma$ contradictoire si aucune interprétation $I$ telle que $I \models \Sigma$
- $\Sigma$ déduit sémantiquement $F$ ($\Sigma \models F$) si toute interprétation satisfaisant $\Sigma$ satisfait aussi $F$
- $F$, $G$ sémantiquement équivalentes ($F \equiv G$) si $\{F\} \models G$ et $\{G\} \models F$.

## Interprétation — Satisfaction, déduction...

Si $I(p) = I(q) = I(r) = 0$ alors $I \models p \vee q \Rightarrow r$

Si $I(p) = I(r) = 0$ et $I(q) = 1$ alors $I$ ne satisfait pas $p \vee q \Rightarrow r$

Si $I(p) = 1$ alors $I \models \{p \vee q, \neg p \Rightarrow r\}$

Si $I(p) = 1$ alors $I$ ne satisfait pas $\{p \vee q, \neg p\}$

$p \vee \neg p, \quad p \Rightarrow p, \quad (p \Rightarrow r) \vee (\neg p \Rightarrow r)$ sont des tautologies.

$(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$ n'est pas une tautologie.

$\{p \wedge \neg p\}, \{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$ sont contradictoires.

$\{p \wedge q\}, \{p, q, p \Rightarrow q\}$ ne sont pas contradictoires.

$\{p, p \Rightarrow q\} \models q, \quad \{p \vee q, p \Rightarrow q\} \models q,$

$\{p, q \Rightarrow p\}$ ne permet pas de déduire $q$.

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q, \quad p \equiv \neg\neg p,$

$p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p, \quad (p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) \not\equiv q.$



## Logique propositionnelle — Modélisation

Un logicien écoute un de ses étudiants énumérer ses sentiments à propos des cours que ce dernier suit :

- « J'aime la logique ou j'aime l'informatique »,
- « Si j'aime l'informatique alors j'aime la logique ».

Le logicien conclut que l'étudiant aime la logique.

Pourquoi ?



## Logique propositionnelle — Modélisation

$a$ et $b$ deux variables *représentant* respectivement "j'aime la logique" et "j'aime l'informatique"

Les deux phrases de l'étudiant *représentées* par :

- $a \vee b$
- $b \Rightarrow a$

Déduction du logicien *représentée* par : $a$

Démontrer $a \vee b, b \Rightarrow a \models a$ ? plusieurs façons...

- Par table de vérité...
- Par raisonnement sémantique :
  Trouver $I$ telle que $I \models \{a \vee b, b \Rightarrow a\}$ et montrer $I \models a$.
  - Si $I \models a$ alors fini. • Si $I \models b$, alors puisque $I \models b \Rightarrow a$, on a $I \models a$.



## Logique propositionnelle — Qq. résultats

**Proposition.**

$F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$, $\Sigma$ ensemble de formules.

- $\Sigma \models F \Rightarrow G$ si et seulement si $\Sigma, F \models G$
- $\Sigma \models F$ si et seulement si $\Sigma, \neg F$ contradictoire.

$$\begin{array}{llll}
F \wedge F & \equiv F & F \vee F & \equiv F \\
F \wedge G & \equiv G \wedge F & F \vee G & \equiv G \vee F \\
F \wedge (G \wedge H) & \equiv (F \wedge G) \wedge H & F \vee (G \vee H) & \equiv (F \vee G) \vee H \\
F \wedge (G \vee H) & \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) & F \vee (G \wedge H) & \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\
\neg(F \wedge G) & \equiv \neg F \vee \neg G & \neg(F \vee G) & \equiv \neg F \wedge \neg G \\
F \Rightarrow G & \equiv \neg F \vee G & \neg(F \Rightarrow G) & \equiv F \wedge \neg G \\
\bot \wedge F & \equiv \bot & \bot \vee F & \equiv F \\
\neg\neg F & \equiv F & &
\end{array}$$