

## Déduction naturelle

Preuve

Séquent prouvable ?  $\emptyset \vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\{p, p \Rightarrow q\} \vdash p \Rightarrow q} \text{ (ax)}}{\{p, p \Rightarrow q\} \vdash q} \text{ (}\Rightarrow_i\text{)}}{\{p\} \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow_i\text{)}}{\emptyset \vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \text{ (}\Rightarrow_e\text{)}$$

## Déduction naturelle

Preuve

Ajouter une règle sans risque ? (sans nouveau séquent prouvable)

Règle dérivable : but dérivable des prémisses

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B, C \vdash A} \text{ (aff}_2\text{)}$$

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, C \vdash A} \text{ (aff)}}{\Gamma, B, C \vdash A} \text{ (aff)}$$

« Nouvelle » règle (aff<sub>2</sub>) utilisable

Comme dérivable dans partie **close**  $\rightsquigarrow$  pas de **nouveau** prouvable !

## Déduction naturelle

Preuve

### Théorème.

$\Gamma \vdash F$  prouvable par *déduction naturelle* si et seulement si  $\Gamma \models F$

[Seulement si] par induction sur  $\Gamma \vdash F$

[Si] un peu plus de sport. . .

Preuve comme manipulation **syntactique**