Sémantique

Définir si une expression/programme a un sens avant de l'évaluer

$\rightsquigarrow$ règles d'évaluation
$\rightsquigarrow$ règles de typage
. . . $\rightsquigarrow$ environnements
. . . . . . $\rightsquigarrow$ fonctions

Sémantique — Expressions arithmétiques

Ensemble $\mathcal{A}$ inductif pour changer. . .

- $\to \texttt{Cte}(n)$
- $A_1,\, A_2 \to \texttt{+}(A_1, A_2)$
- $A_1,\, A_2 \to \star(A_1, A_2)$ (syntaxe abstraite)

$$\frac{}{\texttt{Cte}(n) \rightsquigarrow n}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{+}(e_1, e_2) \rightsquigarrow v_1 +_{\mathbb{N}} v_2}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\star(e_1, e_2) \rightsquigarrow v_1 \times_{\mathbb{N}} v_2}$$

Sémantique — Expressions logiques

Ensemble $\mathcal{B}$ inductif

- $\to \texttt{faux} \qquad \to \texttt{vrai}$
- $B_1,\, B_2 \to \texttt{ou}(B_1, B_2)$
- $B_1,\, B_2 \to \texttt{et}(B_1, B_2)$
- $B_1 \to \texttt{non}(B_1)$ (syntaxe abstraite)

$$\frac{}{\texttt{vrai} \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}} \qquad \frac{}{\texttt{faux} \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}} \qquad \frac{e \rightsquigarrow v}{\texttt{non}(e) \rightsquigarrow \overline{v}}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{et}(e_1, e_2) \rightsquigarrow \min_{\mathbb{B}}(v_1, v_2)} \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{ou}(e_1, e_2) \rightsquigarrow \max_{\mathbb{B}}(v_1, v_2)}$$

Sémantique — arith. + logiques

Ensemble $\mathcal{E}$ inductif

- $\to \texttt{faux} \qquad \to \texttt{vrai} \qquad \to \texttt{Cte}(n)$
- $E_1 \to \texttt{non}(E_1) \qquad E_1,\, E_2 \to \texttt{ou}(E_1, E_2) \qquad E_1,\, E_2 \to \texttt{et}(E_1, E_2)$
- $E_1,\, E_2 \to \texttt{+}(E_1, E_2) \qquad E_1,\, E_2 \to \star(E_1, E_2) \qquad E_1,\, E_2 \to \texttt{eq}(E_1, E_2)$
- $E_1, E_2 \to \texttt{gt}(E_1, E_2) \qquad E_1, E_2, E_3 \to \texttt{if}(E_1, E_2, E_3)$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{eq}(e_1, e_2) \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}}\ v_1 =_{\mathbb{N}} v_2 \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{eq}(e_1, e_2) \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}}\ v_1 \neq_{\mathbb{N}} v_2$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{gt}(e_1, e_2) \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}}\ v_1 >_{\mathbb{N}} v_2 \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{gt}(e_1, e_2) \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}}\ v_1 \not>_{\mathbb{N}} v_2$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}} \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\texttt{if}(e_1, e_2, e_3) \rightsquigarrow v_2} \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}} \quad e_3 \rightsquigarrow v_3}{\texttt{if}(e_1, e_2, e_3) \rightsquigarrow v_3}$$

Quid de $\texttt{+}(\texttt{vrai}, \texttt{Cte}(7))$?

$\rightsquigarrow$ garantir possibilité d'évaluation

Langage fortement typé si évaluation pour toute dérivation de typage

$$\frac{}{\texttt{vrai} : B} \qquad \frac{}{\texttt{faux} : B} \qquad \frac{e : B}{\texttt{non}(e) : B}$$

$$\frac{e_1 : B \quad e_2 : B}{\texttt{ou}(e_1, e_2) : B} \qquad \frac{e_1 : B \quad e_2 : B}{\texttt{et}(e_1, e_2) : B}$$

$$\frac{}{\texttt{Cte}(n) : N} \qquad \frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\texttt{+}(e_1, e_2) : N} \qquad \frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\star(e_1, e_2) : N}$$

$$\frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\texttt{eq}(e_1, e_2) : B} \qquad \frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\texttt{gt}(e_1, e_2) : B}$$

$$\frac{e_1 : B \quad e_2 : N \quad e_3 : N}{\texttt{if}(e_1, e_2, e_3) : N}$$

Introduction de la construction « $\texttt{let}\ id = e_1\ \texttt{in}\ e_2$ »

Dans e_2 le nom id représente e_1

Ensemble $\mathcal{AV}$ inductif...

- $\to \texttt{Cte}(n) \qquad A_1, A_2 \to \texttt{+}(A_1, A_2) \qquad A_1, A_2 \to \star(A_1, A_2)$
- $A_1, A_2 \to \texttt{let}(id, A_1, A_2)$ où id un nom $\qquad \to \texttt{Var}(id)$

(syntaxe abstraite)

Conserver (assurer) lien nom $\leftrightarrow$ expression ? $\rightsquigarrow$ environnement

Environnement de typage : pile de couples $id : t$ tête à droite

Jugement de typage : $\Gamma \vdash e : t$

Ensemble $\mathcal{AV}$ inductif...

- $\to \texttt{Cte}(n) \qquad A_1, A_2 \to \texttt{+}(A_1, A_2) \qquad A_1, A_2 \to \star(A_1, A_2)$
- $A_1, A_2 \to \texttt{let}(id, A_1, A_2)$ où id un nom $\qquad \to \texttt{Var}(id)$

(syntaxe abstraite)

Environnement de typage : pile de couples $id : t$ tête à droite $l \cdot e$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \texttt{Var}(x) : N}\ x : N \in \Gamma \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \texttt{Cte}(n) : N}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : N \quad \Gamma \vdash e_2 : N}{\Gamma \vdash \texttt{+}(e_1, e_2) : N} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : N \quad \Gamma \vdash e_2 : N}{\Gamma \vdash \star(e_1, e_2) : N}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : N \quad \Gamma \cdot (x : N) \vdash e_2 : N}{\Gamma \vdash \texttt{let}(x, e_1, e_2) : N}$$

Sémantique — Variables

Ensemble $\mathcal{AV}$ inductif...

- $\to \texttt{Cte}(n)$ $A_1, A_2 \to \texttt{+}(A_1, A_2)$ $A_1, A_2 \to \texttt{*}(A_1, A_2)$
- $A_1, A_2 \to \texttt{let}(id, A_1, A_2)$ où id un nom $\to \texttt{Var}(id)$

(syntaxe abstraite)

Environnement d'évaluation : pile de couples $id = v$ tête à droite $l \cdot e$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \texttt{Var}(x) \leadsto v}\ x = v \in \Gamma \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \texttt{Cte}(n) \leadsto n}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \leadsto v_1 \quad \Gamma \vdash e_2 \leadsto v_2}{\Gamma \vdash \texttt{+}(e_1, e_2) \leadsto v_1 +_{\mathbb{N}} v_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 \leadsto v_1 \quad \Gamma \vdash e_2 \leadsto v_2}{\Gamma \vdash \texttt{*}(e_1, e_2) \leadsto v_1 \times_{\mathbb{N}} v_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \leadsto v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \leadsto v_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}(x, e_1, e_2) \leadsto v_2}$$

Sémantique — Variables

Portée des définitions

$[\,] \vdash \texttt{let}(n, \texttt{Cte}(2), \texttt{+}(\texttt{let}(n, \texttt{+}(\texttt{Var}(n), \texttt{Cte}(2)), \texttt{Var}(n)), \texttt{Var}(n))) \leadsto ?$

...et maintenant : les fonctions !

$\mathcal{EV}$ en exo.

Sémantique — Fonctions ?

(Pour simplifier : un argument seulement)

Types :

- $\to B$ $\to N$ $T_1, T_2 \to T_1 \to T_2$

Fonctions...

- $E_1, E_2 \to \texttt{letFun}(id_1, id_2, T_1, T_2, E_1, E_2)$ $E \to \texttt{App}(id, E)$

$$\frac{\Gamma \vdash e : t_1}{\Gamma \vdash \texttt{App}(f, e) : t_2}\ \text{si } f : t_1 \to t_2 \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \cdot (x : t_1) \vdash e_1 : t_2 \quad \Gamma \cdot (f : t_1 \to t_2) \vdash e_2 : t_3}{\Gamma \vdash \texttt{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) : t_3}$$

Sémantique — Fonctions ?

Idée : associer nom et corps dans env.

Types :

- $\to B$ $\to N$ $T_1, T_2 \to T_1 \to T_2$

Fonctions...

- $E_1, E_2 \to \texttt{letFun}(id_1, id_2, T_1, T_2, E_1, E_2)$ $E \to \texttt{App}(id, E)$

$$\frac{\Gamma \cdot (f = (x, e_1)) \vdash e_2 \leadsto v}{\Gamma \vdash \texttt{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) \leadsto v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \leadsto v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \leadsto v_2}{\Gamma \vdash \texttt{App}(f, e_1) \leadsto v_2}\ \text{si } f = (x, e_2) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \cdot (f = (x, e_1)) \vdash e_2 \rightsquigarrow v}{\Gamma \vdash \texttt{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) \rightsquigarrow v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \texttt{App}(f, e_1) \rightsquigarrow v_2} \text{ si } f = (x, e_2) \in \Gamma$$

`let x=1 in let fun f(y:N):N = x+y in let x=2 in f(3)` ?