

## TD 1

**Exercice 1** [Mots, langages]

- Soit  $V = \{a, b\}$  et les mots  $u = ab$  et  $v = aba$ , calculer  $uv, u^2, u^3$  et  $v^2$ .
- Soient deux langages sur  $V$  définis par  $L_1 = \{a, ba\}$  et  $L_2 = \{\varepsilon, b, aa\}$ , calculer  $L_1 \circ L_2, L_2 \circ L_1, L_1^2, L_2^2, L_1^*, L_2^*$ .
- Soient les langages sur  $V$  définis par  $L_1 = \{a\}^* \circ \{b\}^*, L_2 = (\{a\} \cup \{b\})^*, L_3 = \{ab\}^*, L_4 = \{a\}^* \cup \{b\}^*, L_5 = (\{ab\} \cup \{a\})^*$ .
  - Déterminer si les mots suivants appartiennent à ces langages :  $a, b, aa, ab, ba, aab, abab$ .
  - Trouver la forme générale des mots de chacun de ces langages.
  - Comparer ces langages (égalités, inclusions).

**Exercice 2** [Grammaires] On considère  $L_0$  sur  $V_t = \{a, b, c, d\}$  défini par :

$$L \rightarrow a \mid b \mid cL \mid dLL$$

- Montrer que  $ca, dba, cdccab$  sont dans  $L_0$ .
- Trouver tous les mots (de  $L_0$ ) d'au plus quatre lettres.
- Donner une méthode pour trouver l'ensemble  $E_n$  des mots ayant  $n$  lettres à partir des mots de moins de  $n$  lettres. En déduire une formule de récurrence.
- En déduire une méthode pour décider si un mot est dans  $L_0$ , quelle est sa complexité ? (facile ? pas facile ?)
- Montrer que  $adcdba$  n'est pas dans  $L_0$  (raisonner sur la première lettre).
- Montrer que  $cdbadc$  n'est pas dans  $L_0$  (raisonner sur la dernière lettre).

**Exercice 3** [Grammaires]

1. Pour chacun des langages suivants, donner une grammaire qui le génère.
  - Entiers relatifs en base 10, signe optionnel pour les positifs ; on accepte les entiers commençant par un ou plusieurs 0.
  - Nombres en virgule flottante avec exposants. Exemples :  $0.0, -1.33, +20.13e+4$
2. Donner des grammaires pour les langages suivants sur  $\{a, b\}$  :
  - Mots de longueur paire,
  - Suites de  $a$  et  $b$  ne contenant pas deux  $a$  consécutifs,

- Suites de  $a$  et  $b$  ne contenant ni deux  $a$  ni deux  $b$  consécutifs,
- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,
- $\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ ,
- Palindromes.

**Exercice 4** [Grammaires encore. . .] Soit  $L_1$  le langage généré par :

$$S \rightarrow (S) \mid SS \mid \varepsilon$$

Soit  $L_2$  le langage généré par :

$$T \rightarrow (T)T \mid \varepsilon$$

- Monter que  $L_2 \subseteq L_1$ .
- Monter que  $L_2$  est stable par concaténation ( $w_1, w_2 \in L_2$  alors  $w_1 w_2 \in L_2$ ).
- En déduire que  $L_1 \subseteq L_2$ .

**Exercice 5** [Grammaires régulières, automates]

- Donner une grammaire régulière décrivant les réels en virgule flottante, d'écriture finie, signe éventuel.
- Donner une grammaire régulière réduite équivalente à la première.
- Dessiner un automate fini reconnaissant les réels d'écriture finie en virgule flottante.

**Exercice 6** [Automates finis] Trouver des automates pour :

1.  $\{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ,
2. Mots contenant 001 et 11,
3. Mots tels que chaque bloc de 4 lettres contient au moins deux fois 0,
4. Mots représentant en binaire les naturels divisibles par 3.

**Exercice 7** [Barman aveugle (et boxeur). . .] Sur un plateau circulaire sont disposés de façon symétrique quatre verres identiques. Certains verres sont retournés. Le barman joue au jeu suivant : on fait tourner le plateau puis il a le droit de retourner un ou deux verres de son choix. Si les 4 verres sont tous dans le même sens, le barman a gagné, sinon l'opération recommence après avoir fait tourner le plateau. Bien sûr le barman porte des gants de boxe et ne sait pas identifier le sens d'un verre. Donner une stratégie gagnante pour le barman.