Grammaires régulières : vers régulières réduites

$G = (V_t, V_n, S, R)$ régulière si toutes règles de la forme $N \to w$ avec :

$w \in V_t^\star$ ou bien $w = uM$ pour $u \in V_t^\star, M \in V_n$

$\leadsto \mathcal{L}(G)$ régulier — Structures simples uniquement

Contrainte 1 : max un seul terminal à droite

Facile : ajouts de non terminaux intermédiaires

Contrainte 2 : élimination de $N \to M \quad (M \in V_n)$

Ajout de $N \to w$ $(w \notin V_n)$ pour tout $M \to w$ telle que $M \neq N$ et $N \to^\star M$

$$\begin{array}{lcl} N & \to & M \mid T \\ M & \to & a \\ T & \to & bM \mid N \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{lcl} N & \to & a \mid bM \\ M & \to & a \\ T & \to & bM \mid a \end{array}$$

Contrainte 3 : élimination des $N \to \alpha \quad (\alpha \in V_t)$

Facile : ajout de $E \to \varepsilon$ et remplacement par $N \to \alpha E$

$\leadsto$ Grammaire régulière réduite : règles $N \to \alpha M$ ou $N \to \varepsilon$

Grammaires régulières : exemple simplification

$$\begin{array}{lcl} \underline{S} & \to & ab \mid T \\ T & \to & cdT \mid U \\ U & \to & e \mid S \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \underline{S} & \to & aS_1 \mid cT_1 \mid eE \\ T & \to & cT_1 \mid aS_1 \mid eE \\ U & \to & eE \mid aS_1 \mid cT_1 \\ S_1 & \to & bE \\ T_1 & \to & dT \\ E & \to & \varepsilon \end{array}$$

Grammaires régulières : un seul moyen ?

$$\begin{array}{lcl} \underline{N} & \to & 0E \mid 1E \mid 1M \\ M & \to & \varepsilon \mid 0M \mid 1M \\ E & \to & \varepsilon \end{array}$$

Ambiguïté : $N \to 1E \to 1 \leftarrow 1M \leftarrow N$

Reconnaître : automates

Ensemble défini par fonction caractéristique

Besoin d'un outil qui répond oui/non : automate (si possible)

Cas facile : automate à états fini

Automates finis

Automate fini déterministe : $(V_t, Q, q_0, F, T : Q \times V_t \to Q)$ où

- V_t vocabulaire fini
- Q ensemble fini d'états
- $q_0 \in Q$ état initial — notation
- $F \subseteq Q$ ensemble d'états finals (ou acceptants) — notation
- T fonction de transition $Q \times V_t \to Q$

$T(q, \alpha) = q'$ noté $q \xrightarrow{\alpha} q'$ Si T application $\rightsquigarrow$ automate complet

Reconnaissance : d'un état à l'autre, lecture de gauche à droite

Automates finis

Soit $A = (V_t, Q, q_0, F, T)$,

Exécution : séquence (évt $\varnothing$) $q_0 \xrightarrow{\alpha_1} q_1 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} q_n$ $q_0 \xrightarrow{w\ \star} q_n$

Lecture de $w = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ q_n état atteint par exéc. de A sur w

w est reconnu s'il existe une exécution de A qui se termine en ayant lu w et telle que l'état atteint soit acceptant.

$\mathcal{L}(A)$: ensemble des mots reconnus

Si pour L il existe A tel que $L = \mathcal{L}(A) \rightsquigarrow L$ reconnaissable

Automates finis : pompage

Lemme.

Si L reconnaissable, $\exists k > 0,\ \forall x \in L, |x| > k \Rightarrow \exists u, v, w \in V_t^\star$ tels que $x = uvw,\ v \neq \varepsilon, |v| < k$ et $\forall n \in \mathbb{N}, uv^n w \in L$

Preuve.

A acceptant L, $k = \#(A) + 1$, $x = x_0 \cdots x_{N-1}$ tel que $|x| = N > k$

$q_0 \xrightarrow{x_0} q_1 \xrightarrow{x_1} \cdots q_{N-1} \xrightarrow{x_{N-1}} q_f$ $\exists i$ tel que $q_i = q_{i+p}$ avec $0 < p < k$

$$q_i \xrightarrow{x_i \cdots x_{i+p-1}} q_{i(+p)}$$

$x = ux_i \cdots$ $x_i \cdots = vx_{i+p} \cdots$ $w = x_{i+p} \cdots$

Récurrence sur n

- $uw \in L$
- Hyp. : $q_0 \xrightarrow{uv^n} q_i$, or $q_0 \xrightarrow{uv^{n+1}} q_? \equiv q_0 \xrightarrow{uv^n} q_i \xrightarrow{v} q_i$ et $q_0 \xrightarrow{uv^n w} q_f$ donc...

Automates finis

Non reconnaissables :

- $\alpha^n \beta^n$
- Autant de α que de β
- ww
- ...

Automates finis

Exemple grammaire et automate :

$$\begin{array}{lcl} N & \to & 0E \mid 1M \\ M & \to & \varepsilon \mid 0M \mid 1M \\ E & \to & \varepsilon \end{array}$$

Automates finis

- De $A = (V_t, Q, q_0, F, T)$ on a $G = (V_t, Q, q_0, R)$ régulière réduite t.q.
  - $V_n = Q$
  - Source = q_0
  - $R = \{q \to \alpha q' \mid T(q, \alpha) = q'\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in F\}$
- De $G = (V_t, V_n, S, R)$ on a $A = (V_t, V_n, S, F, T)$ tel que
  - $F = \{M \mid M \to \varepsilon \in R\}$
  - Transitions : $M \xrightarrow{\alpha} N$ si et seulement si $M \to \alpha N \in R$

Oups ambiguë $\rightsquigarrow$ pas fonction $V_t \times Q \to Q$!