Automates finis

Automate fini non déterministe : $(V_t, Q, q_0, F, T : Q \times V_t \to \mathcal{P}(Q))$ où

- V_t vocabulaire fini
- Q ensemble fini d'état
- $q_0 \in Q$ état initial
- $F \subseteq Q$ ensemble d'états finals (ou acceptants)
- T fonction de transition, application $Q \times V_t \to \mathcal{P}(Q)$

w est reconnu s'il existe une exécution de A qui se termine en ayant lu w et telle que l'état atteint soit acceptant.

$\mathcal{L}(A)$ ensemble des mots reconnus

Automates finis

Det(A) : $(V_t, \mathcal{P}(Q), \{q_0\}, F_{\text{det}}, T_{\text{det}})$ où

- $F_{\text{det}} = \{K \in \mathcal{P}(Q) \mid K \cap F \neq \varnothing\}$
- $T_{\text{det}}(K, \alpha) = \bigcup_{q \in K} T(q, \alpha)$

Théorème.
Det(A) est déterministe et reconnaît le même langage que A

Preuve. Même langage : par récurrence sur $|w|$
$q \xrightarrow{w\ \star} q_f \in F$ ssi $\forall S \subseteq Q, q \in S \Longrightarrow S \xrightarrow{w\ \star} S_f \in F_{\text{det}}$

- $|w| = 0$ $q \in F$ donc $\forall S \subseteq Q, q \in S \Longrightarrow S \in F_{\text{det}}$
  Si $(\forall S \subseteq Q, q \in S \Longrightarrow S \in F_{\text{det}})$ en particulier $\{q\} \in F_{\text{det}}$ donc $q \in F$

Automates finis

Det(A) : $(V_t, \mathcal{P}(Q), \{q_0\}, F_{\text{det}}, T_{\text{det}})$ où

- $F_{\text{det}} = \{K \in \mathcal{P}(Q) \mid K \cap F \neq \varnothing\}$
- $T_{\text{det}}(K, \alpha) = \bigcup_{q \in K} T(q, \alpha)$

Preuve. Même langage : par récurrence sur $|w|$
$q \xrightarrow{w\ \star} q_f \in F$ ssi $\forall S \subseteq Q, q \in S \Longrightarrow S \xrightarrow{w\ \star} S_f \in F_{\text{det}}$

- $|w| = n + 1$ et donc $w = \alpha v$
  $q \xrightarrow{w\ \star} q_f \in F$ ssi $q \xrightarrow{\alpha} p \xrightarrow{v\ \star} q_f \in F$
  ssi $q \xrightarrow{\alpha} p$ et $\forall S' \subseteq Q, p \in S' \Rightarrow S' \xrightarrow{v\ \star} S_f \in F_{\text{det}}$ (H.R.)
  $\forall S \subseteq Q, q \in S \Rightarrow S \xrightarrow{\alpha} S'' =_{\text{déf.}} \{q' \in Q \mid \exists r \in S, r \xrightarrow{\alpha} q'\}$ donc $p \in S''$
  $S \xrightarrow{\alpha} S'' \xrightarrow{v\ \star} S_f \in F_{\text{det}}$ exo : autre sens

Automates finis

Det(A) : $(V_t, \mathcal{P}(Q), \{q_0\}, F_{\text{det}}, T_{\text{det}})$ où

- $F_{\text{det}} = \{K \in \mathcal{P}(Q) \mid K \cap F \neq \varnothing\}$
- $T_{\text{det}}(K, \alpha) = \bigcup_{q \in K} T(q, \alpha)$

Preuve. Même langage : par récurrence sur $|w|$
$q \xrightarrow{w\ \star} q_f \in F$ ssi $\forall S \subseteq Q, q \in S \Longrightarrow S \xrightarrow{w\ \star} S_f \in F_{\text{det}}$

- $|w| = 0$
- $|w| = n + 1 \ldots$

Enfin $S \xrightarrow{\alpha} S' = \{p \in Q \mid \exists q \in S, q \xrightarrow{\alpha} p\}$ uniquement déterminé
$\rightsquigarrow$ Déterministe

Langages rationnels

Expressions régulières sur V_t fini

Plus petit ensemble E tel que

- $\varnothing \in E$
- $\varepsilon \in E$
- $\alpha \in V_t$ alors $\alpha \in E$
- $e_1, e_2 \in E$ alors $e_1 + e_2 \in E$ et $e_1 \cdot e_2 \in E$
- $e \in E$ alors $(e) \in E$, $e^\star \in E$ et $e^+ \in E$

Priorité : $\star > \cdot > +$ (assoc. gauche $+, \cdot$)

$V_t = \{\alpha, \beta\}$ $\quad (\alpha + \alpha \cdot \beta)^\star \cdot \alpha^\star + \varepsilon$

Langages rationnels

Langage représenté

- $[[\varnothing]] = \varnothing$
- $[[\varepsilon]] = \{\varepsilon\}$
- $[[\alpha]] = \{\alpha\}$ pour $\alpha \in V_t$
- $[[e_1 + e_2]] = [[e_1]] \cup [[e_2]]$
- $[[e_1 \cdot e_2]] = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in [[e_1]], w_2 \in [[e_2]]\}$
- $[[e^\star]] = \bigcup_{n=0}^{\infty} [[e^n]]$ où $e^{n+1} = e \cdot e^n, e^0 = \{\varepsilon\}$
- $[[e^+]] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [[e^n]]$

Langages rationnels

Exemples

$0 + 1 \cdot (0+1)^\star$: entiers en binaire

$0 + 1 \cdot (0+1)^\star \cdot 0$: entiers pairs en binaire

Mots sur $\{0,1\}$ sans 1 consécutifs : $0^\star \cdot (1 \cdot 0^+)^\star (1 + \varepsilon)$

Langages rationnels

Système d'équations linéaires gauche

$$\begin{cases} X_1 = e_1^1 X_1 + \dots + e_n^1 X_n + f^1 \\ \vdots \\ X_n = e_1^n X_1 + \dots + e_n^n X_n + f^n \end{cases}$$

avec e_i^j expressions régulières $\in \{\varepsilon\} \cup V_t \cup \varnothing$

Solution : $X_1, \cdots, X_n$ si $X_1 = [[e_1^1]] \circ X_1 \cup \cdots \cup [[e_n^1]] \circ X_n \cup [[f^1]]$, etc.

Langages rationnels

Exemple

$$\begin{cases} X_1 & = & \alpha X_2 + \beta X_3 + \varepsilon \\ X_2 & = & \alpha X_1 + \beta X_4 \\ X_3 & = & \beta X_1 + \alpha X_4 \\ X_4 & = & \alpha X_3 + \beta X_2 \end{cases}$$

X_1 = {mots ayant un nombre pair de α et pair de β}
X_2 = {mots ayant un nombre impair de α et pair de β}
X_3 = {mots ayant un nombre pair de α et impair de β}
X_4 = {mots ayant un nombre impair de α et impair de β}

Langages rationnels

Système d'équations linéaires gauche

$$\begin{cases} X_1 & = & e_1^1 X_1 + \cdots + e_n^1 X_n + f^1 \\ & \vdots & \\ X_n & = & e_1^n X_1 + \cdots + e_n^n X_n + f^n \end{cases}$$

avec e_i^j expressions régulières $\in \{\varepsilon\} \cup V_t \cup \varnothing$

Solution : $X_1 \cdots X_n$ si $X_1 = [[e_1^1]] \circ X_1 \cup \cdots \cup [[e_n^1]] \circ X_n \cup [[f^1]]$

L rationnel si $\exists S$ tel que $(L, L_1, \cdots, L_n)$ est solution minimale de S

Langages rationnels

Lemme.

$X = eX + f$

- $\varepsilon \notin e$, unique solution : $e^\star \cdot f$
- $\varepsilon \in e$, solution minimale : $e^\star \cdot f$

Preuve.

- $e^\star \cdot f = (e^+ + \varepsilon) \cdot f = (e \cdot e^\star + \varepsilon) \cdot f = e \cdot (e^\star \cdot f) + f$ Solution
- Si X solution alors $(e^n \cdot f) \subseteq X$ par récurrence sur n Minimale

Langages rationnels

Lemme.

$X = eX + f$

- $\varepsilon \notin e$, unique solution : $e^\star \cdot f$
- $\varepsilon \in e$, solution minimale : $e^\star \cdot f$

Preuve.

- $e^\star \cdot f = (e^+ + \varepsilon) \cdot f = (e \cdot e^\star + \varepsilon) \cdot f = e \cdot (e^\star \cdot f) + f$ Solution
- Si X solution alors $(e^n \cdot f) \subseteq X$ par récurrence sur n Minimale
- Si $\varepsilon \notin e$, comme $X \subseteq eX + f$, si $w \in X$ alors
  $w \in f$ ou $w = w_1 w_2, w_1 \in e, w_2 \in X$ On veut $w \in e^\star \cdot f$

Langages rationnels

Lemme.

$X = eX + f$

- $\varepsilon \notin e$, unique solution : $e^\star \cdot f$ • $\varepsilon \in e$, solution minimale : $e^\star \cdot f$

Preuve.

- $e^\star \cdot f = (e^+ + \varepsilon) \cdot f = (e \cdot e^\star + \varepsilon) \cdot f = e \cdot (e^\star \cdot f) + f$ Solution
- Si X solution alors $(e^n \cdot f) \subseteq X$ par récurrence sur n Minimale
- Si $\varepsilon \notin e$, comme $X \subseteq eX + f$, si $w \in X$ alors
  $w \in f$ ou $w = w_1 w_2, w_1 \in e, w_2 \in X$ On veut $w \in e^\star \cdot f$
  Réc. sur $|w|$: • $|w| = 0$ alors $w \in f \subseteq e^\star \cdot f$ $\varepsilon \notin e$

Langages rationnels

Lemme.

$X = eX + f$

- $\varepsilon \notin e$, unique solution : $e^\star \cdot f$ • $\varepsilon \in e$, solution minimale : $e^\star \cdot f$

Preuve.

- $e^\star \cdot f = (e^+ + \varepsilon) \cdot f = (e \cdot e^\star + \varepsilon) \cdot f = e \cdot (e^\star \cdot f) + f$ Solution
- Si X solution alors $(e^n \cdot f) \subseteq X$ par récurrence sur n Minimale
- Si $\varepsilon \notin e$, comme $X \subseteq eX + f$, si $w \in X$ alors Unicité
  $w \in f$ ou $w = w_1 w_2, w_1 \in e, w_2 \in X$ On veut $w \in e^\star \cdot f$
  Réc. sur $|w|$: • $|w| = 0$ • $|w| = n + 1$,
  - $w \in f$
  - $w = w_1 w_2$, $\varepsilon \notin e, |w| > |w_2|$ et $w_2 \in e^\star \cdot f$ (H.R.) donc $w \in e \cdot e^\star \cdot f$

Langages rationnels

$A = \{0, 1\}$

$$\begin{cases} X_0 &= \varepsilon + 1X_0 + 1X_1 \\ X_1 &= 0X_0 \\ X_2 &= 0X_1 + 0X_2 + 1X_2 \end{cases}$$

Solution ?

$$\begin{aligned} X_0 &= (1+10)^\star \\ X_1 &= 0(1+10)^\star \\ X_2 &= (0+1)^\star 00(1+10)^\star \end{aligned}$$

Langages rationnels

Système d'équations linéaires gauche

$$\begin{cases} X_1 &= e_1^1 X_1 + \cdots + e_n^1 X_n + f^1 \\ &\vdots \\ X_n &= e_1^n X_1 + \cdots + e_n^n X_n + f^n \end{cases}$$

avec e_i^j expressions régulières $\in \cancel{\{\varepsilon\} \cup}\ V_t \cup \varnothing$

Solution : $X_1 \cdots X_n$ si $X_1 = [[e_1^1]] \circ X_1 \cup \cdots \cup [[e_n^1]] \circ X_n \cup [[f^1]]$

L rationnel si $\exists S$ tel que $(L, L_1, \cdots, L_n)$ est solution minimale de S

Remplacement... $\rightsquigarrow$ solution $\in$ expressions régulières !

Théorème.

Rationnel $\Rightarrow$ Défini par expression régulière. (par réc. sur n)

Langages rationnels

Théorème.

Reconnaissable $\Rightarrow$ rationnel.

Idée de la preuve

$$\left\{\begin{array}{c} q \xrightarrow{\alpha_1} q_1 \\ \vdots \\ q \xrightarrow{\alpha_n} q_n \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \qquad X_q = \alpha_1 X_{q_1} + \cdots + \alpha_n X_{q_n} + \varepsilon$$