Automates finis clôtures

Théorème.

L_1 et L_2 reconnaissables :

- $V_t^\star - L_1$?

  reconnaissable

  si déterministe $(V_t, Q, q_0, Q - F, T)$
- $L_1 \cap L_2$?

  reconnaissable

  $(V_t, Q_1 \times Q_2, (q_0^1, q_0^2), F_1 \times F_2, T)$ $\quad (p,q) \xrightarrow{a} (p', q')$ ssi $p \xrightarrow[A_1]{a} p'$ et $q \xrightarrow[A_2]{a} q'$
- $L_1 \cup L_2$?
- $L_1 \circ L_2$?

Automates finis clôtures

Automate fini non déterministe avec transitions vides : (V_t, Q, q_0, F, T) où

- V_t vocabulaire fini
- Q ensemble fini d'état
- $q_0 \in Q$ état initial
- $F \subseteq Q$ ensemble d'états finals (ou acceptants)
- T fonction de transition, application $Q \times (V_t \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

Lecture de w en n étapes, $n \geq |w|$

Automates finis clôtures

ε-clôture : $\mathcal{E}(q) = \{p \in Q \mid q \xrightarrow{\varepsilon\ \star} p\}$

Théorème.

Pour $A = (V_t, Q, q_0, F, T)$ avec ε transitions,

soit $A_\varepsilon = (V_t, Q, q_0, E(F), E(T))$ où

$$\begin{aligned} E(T)(q,\alpha) &= \textstyle\bigcup_{p \in \mathcal{E}(q)} T(p,\alpha) \text{ pour chaque } q \in Q, \alpha \in V_t \\ E(F) &= \{q \in Q \mid \mathcal{E}(q) \cap F \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

A_ε sans ε et $\mathcal{L}(A_\varepsilon) = \mathcal{L}(A)$

Automates finis clôtures

Théorème.

L_1 et L_2 reconnaissables :

- $V_t^\star - L_1$ reconnaissable
- $L_1 \cap L_2$ reconnaissable
- $L_1 \cup L_2$ reconnaissable
- $L_1 \circ L_2$ reconnaissable

Automates finis

Théorème.
Défini par expression régulière $\Rightarrow$ reconnaissable.

Théorème.
Propriétés équivalentes

- Reconnaissable,
- Régulier,
- Rationnel.

Automates finis : pb. de taille ?

Nettoyage

Inaccessible : q tel que $\nexists\, w \mid q_0 \xrightarrow{w\ \star} q$

Improductif : q tel que $\nexists\, w \mid q \xrightarrow{w\ \star} q_f \in F$

Élimination des inaccessibles et improductifs sans danger

$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ ssi $(\mathcal{L}(A) \cap \overline{\mathcal{L}(B)}) \cup (\overline{\mathcal{L}(A)} \cap \mathcal{L}(B)) = \emptyset$ Coûteux

$\rightsquigarrow$ Automate minimal

Automates finis : pb. de taille ?

Relation d'équivalence sur états d'automates déterministes complets

$$p \equiv q \text{ ssi } \forall w, (\exists q_f \in F,\ p \xrightarrow{w\ \star} q_f) \iff (\exists q_f \in F,\ q \xrightarrow{w\ \star} q_f)$$

p et q indistinguables

$p \equiv_k q$ ssi $\forall w$ tel que $|w| \leq k, (\exists q_f \in F,\ p \xrightarrow{w\ \star} q_f) \iff (\exists q_f \in F,\ q \xrightarrow{w\ \star} q_f)$

$Q \times Q\ \supseteq \equiv_0\ \supseteq \equiv_1\ \supseteq \equiv_2\ \supseteq\ \cdots\ \supseteq \equiv_{k-1}\ \supseteq \equiv_k$ $\exists k_j,\ \equiv_{k_j} = \equiv_{k_{j+1}}$

Lemme.

Si $\equiv_k = \equiv_{k+1}$ alors $\equiv = \equiv_k$

Preuve. $q \equiv_{k+1} q' : \forall w, |w| \leq k+1, (q \xrightarrow{w} q_f) \Leftrightarrow (q' \xrightarrow{w} q'_f)$ $\equiv_{k+1} = \equiv_{k+2}$?

$|\alpha w| = k+2, q \xrightarrow{\alpha} q_1$ et $q' \xrightarrow{\alpha} q'_1$ alors $q \equiv_{k+1} q' \Rightarrow q_1 \equiv_k q'_1 \Rightarrow q_1 \equiv_{k+1} q'_1$

donc $(q_1 \xrightarrow{w} q_f) \Leftrightarrow (q'_1 \xrightarrow{w} q'_f)$ donc $(q \xrightarrow{aw} q_f) \Leftrightarrow (q' \xrightarrow{aw} q'_f)$

Automates finis : pb. de taille ?

Relation d'équivalence sur états d'automates déterministes complets

$$p \equiv q \text{ ssi } \forall w, (\exists q_f \in F,\ p \xrightarrow{w\ \star} q_f) \iff (\exists q_f \in F,\ q \xrightarrow{w\ \star} q_f)$$

p et q indistinguables

$p \equiv_k q$ ssi $\forall w$ tel que $|w| \leq k, (\exists q_f \in F,\ p \xrightarrow{w\ \star} q_f) \iff (\exists q_f \in F,\ q \xrightarrow{w\ \star} q_f)$

$Q \times Q\ \supseteq \equiv_0\ \supseteq \equiv_1\ \supseteq \equiv_2\ \supseteq\ \cdots\ \supseteq \equiv_{k-1}\ \supseteq \equiv_k$ $\exists k_j,\ \equiv_{k_j} = \equiv_{k_{j+1}}$

Théorème.

$A_m = (V_t, Q_{/\equiv}, [q_0], F_{/\equiv}, T_m)$ où $T_m : [p] \xrightarrow[A_m]{\alpha} [q]$ ssi $p \xrightarrow[A]{\alpha} q$

- A_m déterministe minimal complètement spécifié • $\mathcal{L}(A_m) = \mathcal{L}(A)$
- Si A_m et B (dét. compl. $\mid \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A)$) autant d'états alors $B \sim A_m$

Automates finis : implantation

Type abstrait : (V_t, Q) *Automate*

Spécification :

initial : (V_t, Q) *Automate* $\rightarrow Q$

acceptant : (V_t, Q) *Automate* $\times Q \rightarrow$ booléen

transition : (V_t, Q) *Automate* $\times Q \times V_t \rightarrow Q$

Fonctions :

exécute : (V_t, Q) *Automate* $\times Q \times V_t^\star \rightarrow Q$

reconnaît : (V_t, Q) *Automate* $\times V_t^\star \rightarrow$ booléen

Automates finis : implantation

Priorité : vitesse ou mémoire

	α_0	α_1	$\dots$
q_0	q_j	q_i	$\dots$
q_1	q_k	q_l	$\dots$
	$\vdots$		
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\dots$

Par convention états de 1 à n et symboles de 1 à p

Si trop gros : matrices creuses...

Automates finis : implantation

Priorité : vitesse ou mémoire

q_0	$[(\alpha_0, q_j); (\alpha_1, q_i), \dots]$
q_1	$[(\alpha_0, q_k); (\alpha_1, q_l), \dots]$
	$\vdots$
$\perp$	$[\,]$

Transition un peu plus complexe car recherche

Automates finis $\leadsto$ transducteurs

Transducteurs rationnels :

Automates finis avec transitions étiquetées par une sorte

$\leadsto$ génération de tokens

Convention : si choix alors plus grand préfixe $(\alpha$ vs $\alpha\alpha)$

Erreurs jusqu'ici : LEXICALES