

Dessins Mots Phrases → Sens → Bin./Exéc

Analyse sémantique + éval

Sémantique

Définir si une expression/programme a un sens **avant** de l'évaluer

- ↪ règles d'évaluation
- ↪ règles de typage
- ... ↪ environnements
- ... ↪ fonctions

Sémantique

Expressions arithmétiques

Ensemble \mathcal{A} **inductif** pour changer...

- → **Cte**(n)
- A_1, A_2 → **+**(A_1, A_2)
- A_1, A_2 → *****(A_1, A_2)

(syntaxe abstraite)

$$\frac{}{\mathbf{Cte}(n) \rightsquigarrow n}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{+}(e_1, e_2) \rightsquigarrow v_1 +_{\mathbb{N}} v_2}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{*}(e_1, e_2) \rightsquigarrow v_1 \times_{\mathbb{N}} v_2}$$

Sémantique

Expressions logiques

Ensemble \mathcal{B} **inductif**

- → **faux** → **vrai**
- B_1, B_2 → **ou**(B_1, B_2)
- B_1, B_2 → **et**(B_1, B_2)
- B_1 → **non**(B_1)

(syntaxe abstraite)

$$\frac{}{\mathbf{vrai} \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}} \quad \frac{}{\mathbf{faux} \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}} \quad \frac{e \rightsquigarrow v}{\mathbf{non}(e) \rightsquigarrow \bar{v}}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{et}(e_1, e_2) \rightsquigarrow \min_{\mathbb{B}}(v_1, v_2)} \quad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{ou}(e_1, e_2) \rightsquigarrow \max_{\mathbb{B}}(v_1, v_2)}$$

Ensemble \mathcal{E} inductif

- \rightarrow **faux** \rightarrow **vrai** \rightarrow **Cte**(n)
- $E_1 \rightarrow$ **non**(E_1) $E_1, E_2 \rightarrow$ **ou**(E_1, E_2) $E_1, E_2 \rightarrow$ **et**(E_1, E_2)
- $E_1, E_2 \rightarrow$ **+**(E_1, E_2) $E_1, E_2 \rightarrow$ *****(E_1, E_2) $E_1, E_2 \rightarrow$ **eq**(E_1, E_2)
- $E_1, E_2 \rightarrow$ **gt**(E_1, E_2) $E_1, E_2, E_3 \rightarrow$ **if**(E_1, E_2, E_3)

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{eq}(e_1, e_2) \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}} \quad v_1 =_{\mathbb{N}} v_2 \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{eq}(e_1, e_2) \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}} \quad v_1 \neq_{\mathbb{N}} v_2$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{gt}(e_1, e_2) \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}} \quad v_1 >_{\mathbb{N}} v_2 \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{gt}(e_1, e_2) \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}} \quad v_1 \not>_{\mathbb{N}} v_2$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}} \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathbf{if}(e_1, e_2, e_3) \rightsquigarrow v_2} \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}} \quad e_3 \rightsquigarrow v_3}{\mathbf{if}(e_1, e_2, e_3) \rightsquigarrow v_3}$$

Quid de **+**(**vrai**, **Cte**(7)) ? \rightsquigarrow garantir possibilité d'évaluationLangage **fortement typé** si évaluation pour toute dérivation de typage

$$\frac{}{\mathbf{vrai} : B} \qquad \frac{}{\mathbf{faux} : B} \qquad \frac{e : B}{\mathbf{non}(e) : B}$$

$$\frac{e_1 : B \quad e_2 : B}{\mathbf{ou}(e_1, e_2) : B} \qquad \frac{e_1 : B \quad e_2 : B}{\mathbf{et}(e_1, e_2) : B}$$

$$\frac{}{\mathbf{Cte}(n) : N} \qquad \frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\mathbf{+}(e_1, e_2) : N} \qquad \frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\mathbf{*}(e_1, e_2) : N}$$

$$\frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\mathbf{eq}(e_1, e_2) : B} \qquad \frac{e_1 : N \quad e_2 : N}{\mathbf{gt}(e_1, e_2) : B}$$

$$\frac{e_1 : B \quad e_2 : N \quad e_3 : N}{\mathbf{if}(e_1, e_2, e_3) : N}$$

Introduction de la construction « let $id = e_1$ in e_2 »Dans e_2 le nom id représente e_1 Ensemble \mathcal{AV} inductif...

- \rightarrow **Cte**(n) $A_1, A_2 \rightarrow$ **+**(A_1, A_2) $A_1, A_2 \rightarrow$ *****(A_1, A_2)
- $A_1, A_2 \rightarrow$ **let**(id, A_1, A_2) où id un nom \rightarrow **Var**(id)
(syntaxe abstraite)

Conserver (**assurer**) lien nom \leftrightarrow expression ? \rightsquigarrow **environnement****Environnement de typage** : **pile** de couples $id : t$

tête à droite

Jugement de typage : $\Gamma \vdash e : t$

Ensemble \mathcal{AV} inductif...

- $\rightarrow \mathbf{Cte}(n)$ $A_1, A_2 \rightarrow \mathbf{+}(A_1, A_2)$ $A_1, A_2 \rightarrow \mathbf{*}(A_1, A_2)$
- $A_1, A_2 \rightarrow \mathbf{let}(id, A_1, A_2)$ où id un nom $\rightarrow \mathbf{Var}(id)$
(syntaxe abstraite)

Environnement de typage : **pile** de couples $id : t$ tête à droite $l \cdot e$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{Var}(x) : N} \quad x : N \in \Gamma \quad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{Cte}(n) : N}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : N \quad \Gamma \vdash e_2 : N}{\Gamma \vdash \mathbf{+}(e_1, e_2) : N} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : N \quad \Gamma \vdash e_2 : N}{\Gamma \vdash \mathbf{*}(e_1, e_2) : N}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : N \quad \Gamma \cdot (x : N) \vdash e_2 : N}{\Gamma \vdash \mathbf{let}(x, e_1, e_2) : N}$$

Ensemble \mathcal{AV} inductif...

- $\rightarrow \mathbf{Cte}(n)$ $A_1, A_2 \rightarrow \mathbf{+}(A_1, A_2)$ $A_1, A_2 \rightarrow \mathbf{*}(A_1, A_2)$
- $A_1, A_2 \rightarrow \mathbf{let}(id, A_1, A_2)$ où id un nom $\rightarrow \mathbf{Var}(id)$
(syntaxe abstraite)

Environnement d'évaluation : **pile** de couples $id = v$ tête à droite $l \cdot e$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{Var}(x) \rightsquigarrow v} \quad x = v \in \Gamma \quad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{Cte}(n) \rightsquigarrow n}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{+}(e_1, e_2) \rightsquigarrow v_1 +_{\mathbb{N}} v_2} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{*}(e_1, e_2) \rightsquigarrow v_1 \times_{\mathbb{N}} v_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{let}(x, e_1, e_2) \rightsquigarrow v_2}$$

Portée des définitions

$$[] \vdash \mathbf{let}(n, \mathbf{Cte}(2), \mathbf{+}(\mathbf{let}(n, \mathbf{+}(\mathbf{Var}(n), \mathbf{Cte}(2)), \mathbf{Var}(n)), \mathbf{Var}(n))) \rightsquigarrow ?$$

...et maintenant : les fonctions !

\mathcal{EV} en exo.

(Pour simplifier : un argument seulement)

Types :

$$\bullet \rightarrow B \quad \rightarrow N \quad T_1, T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2$$

Fonctions...

$$\bullet E_1, E_2 \rightarrow \mathbf{letFun}(id_1, id_2, T_1, T_2, E_1, E_2) \quad E \rightarrow \mathbf{App}(id, E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : t_1}{\Gamma \vdash \mathbf{App}(f, e) : t_2} \quad \text{si } f : t_1 \rightarrow t_2 \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \cdot (x : t_1) \vdash e_1 : t_2 \quad \Gamma \cdot (f : t_1 \rightarrow t_2) \vdash e_2 : t_3}{\Gamma \vdash \mathbf{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) : t_3}$$

Idée : associer nom et corps dans env.

Types :

- $\rightarrow B \quad \rightarrow N \quad T_1, T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2$

Fonctions...

- $E_1, E_2 \rightarrow \mathbf{letFun}(id_1, id_2, T_1, T_2, E_1, E_2) \quad E \rightarrow \mathbf{App}(id, E)$

$$\frac{\Gamma \cdot (f = (x, e_1)) \vdash e_2 \rightsquigarrow v}{\Gamma \vdash \mathbf{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) \rightsquigarrow v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{App}(f, e_1) \rightsquigarrow v_2} \text{ si } f = (x, e_2) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \cdot (f = (x, e_1)) \vdash e_2 \rightsquigarrow v}{\Gamma \vdash \mathbf{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) \rightsquigarrow v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{App}(f, e_1) \rightsquigarrow v_2} \text{ si } f = (x, e_2) \in \Gamma$$

`let x=1 in let fun f(y:N):N = x+y in let x=2 in f(3) ?`

$$\frac{\Gamma \cdot (f = (x, e_1)) \vdash e_2 \rightsquigarrow v}{\Gamma \vdash \mathbf{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) \rightsquigarrow v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{App}(f, e_1) \rightsquigarrow v_2} \text{ si } f = (x, e_2) \in \Gamma$$

Dynamique \uparrow ... et statique \downarrow

$$\frac{\Gamma \cdot (f = (x, e_1, \Gamma)) \vdash e_2 \rightsquigarrow v}{\Gamma \vdash \mathbf{letFun}(f, x, t_1, t_2, e_1, e_2) \rightsquigarrow v}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad \Gamma \vdash \Delta \cdot (x = v_1) \vdash e_2 \rightsquigarrow v_2}{\Gamma \vdash \mathbf{App}(f, e_1) \rightsquigarrow v_2} \text{ si } f = (x, e_2, \Delta) \in \Gamma$$