

# L'étrange convection d'un manteau solide

**Yanick Ricard**  
[ricard@ens-lyon.fr](mailto:ricard@ens-lyon.fr)



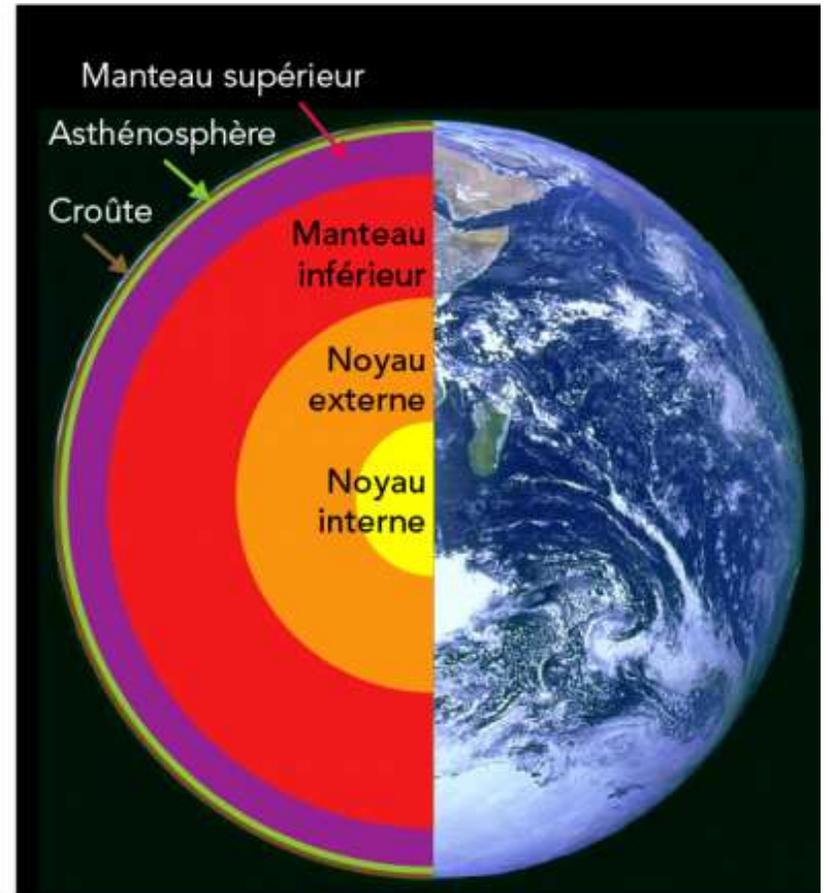
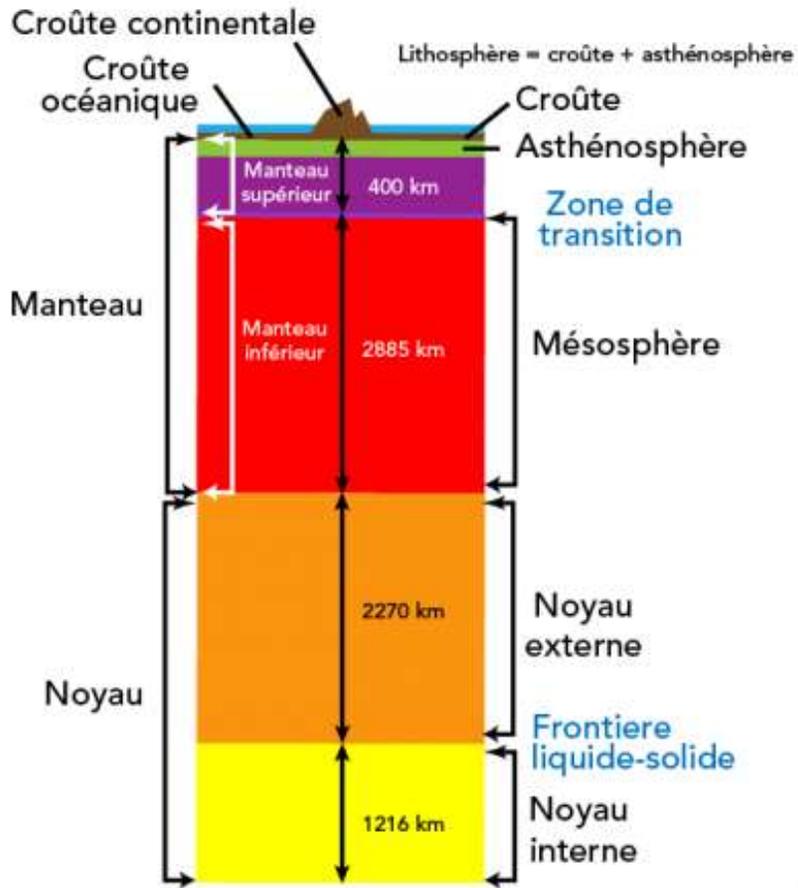
**Le périmètre = 40 000, 000 km  
(ce fut une constante universelle)**

**Le rayon = 6371 km**

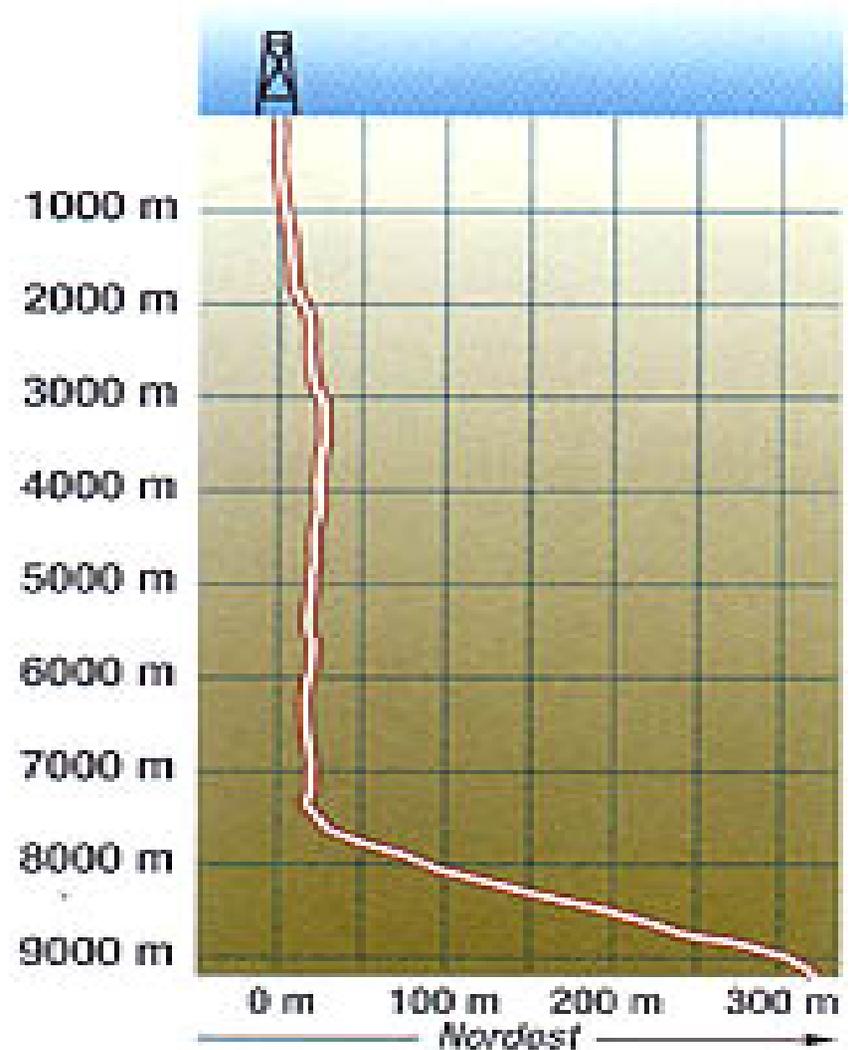
**Etat  
cristallin**

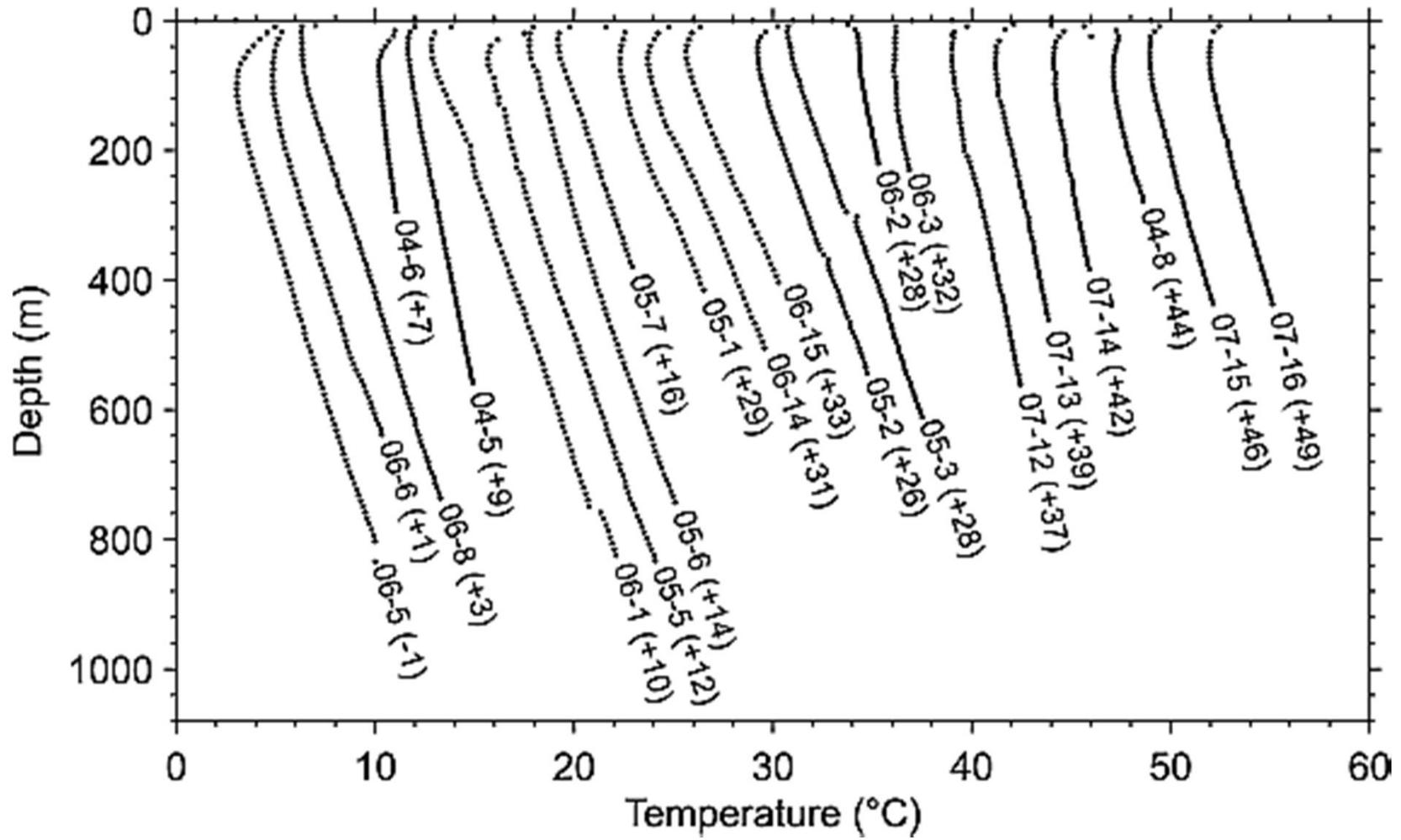
**Etat  
liquide**

**Etat  
cristallin**



Notre connaissance de l'intérieur de la Terre va être forcément indirecte !

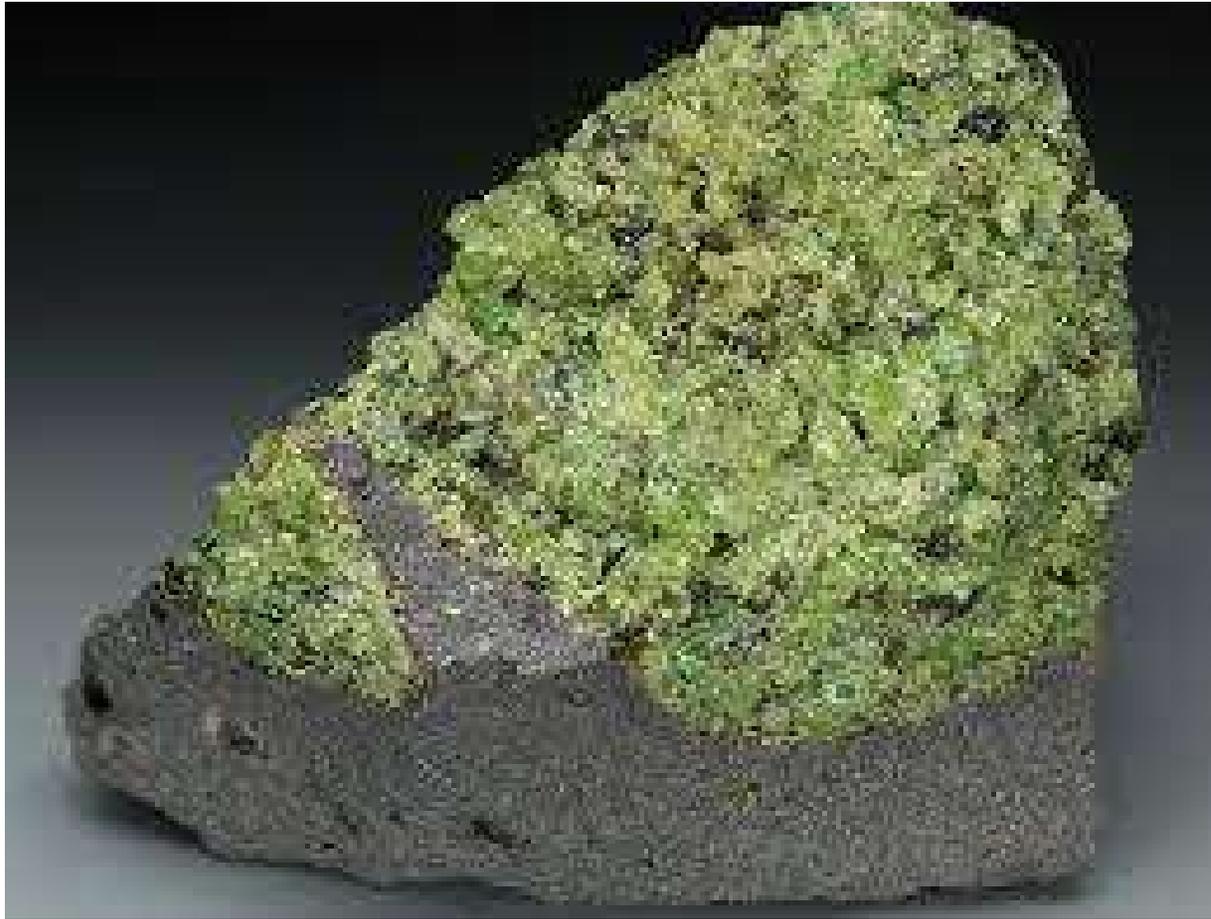


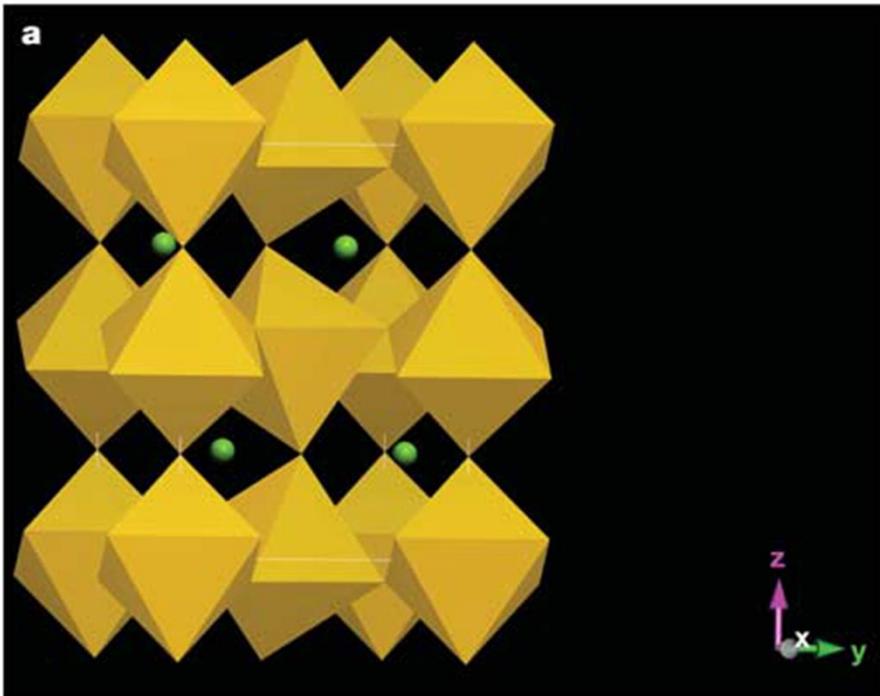


La température augmente avec la profondeur 10-30 K/km

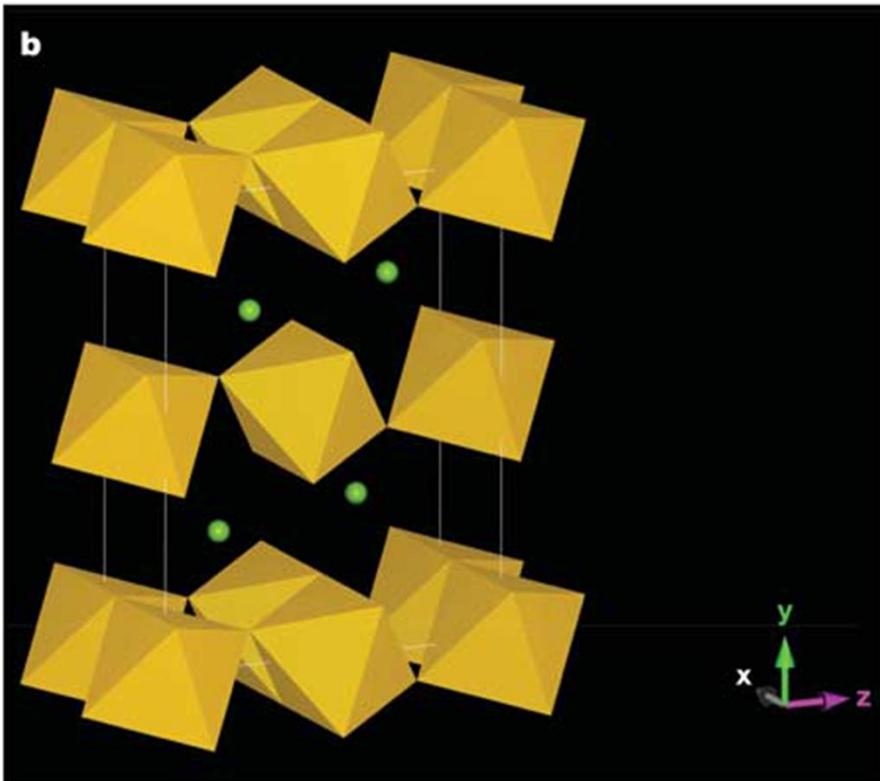
**Le manteau :  
C'est fait de quoi ?**

Le manteau :  
 $\text{Mg}_2\text{SiO}_4$   
 $\text{MgSiO}_3$   
 $\text{MgO}$





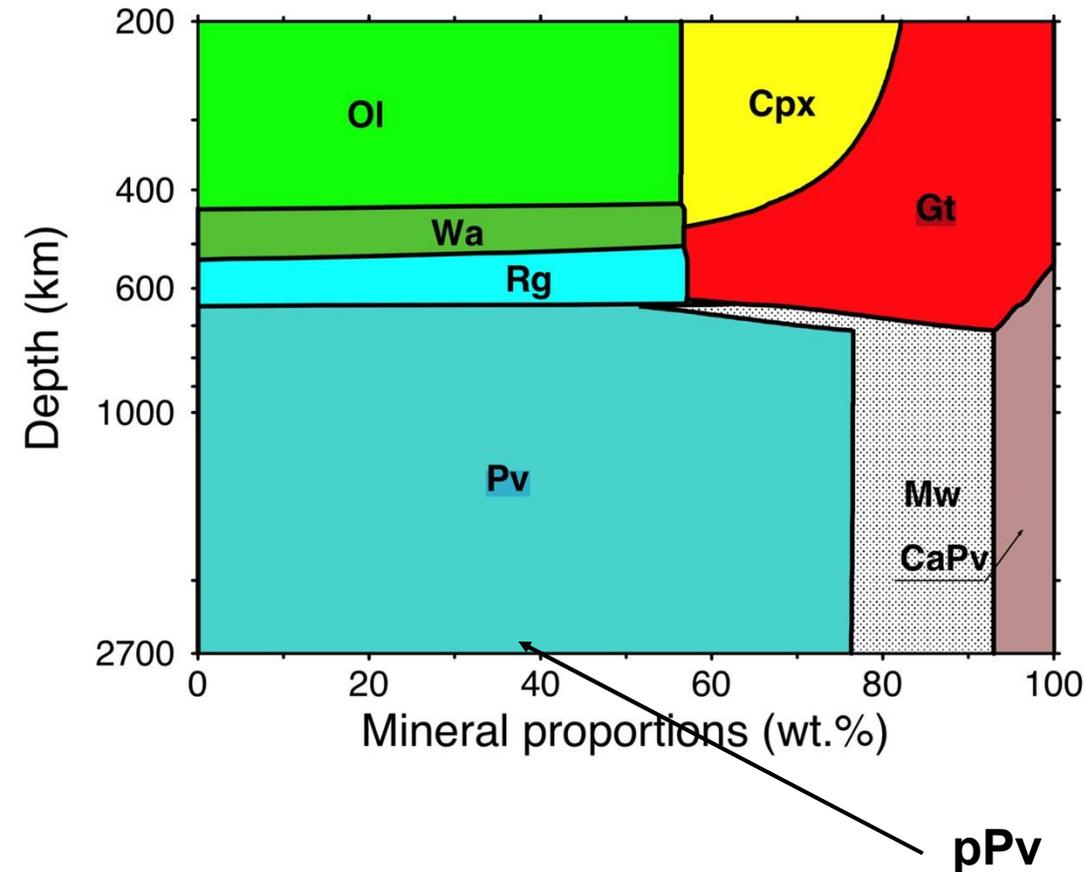
**Octaèdres Si au centre,  
6 O aux sommets  
en vert les Mg**



**Les structures en pression :  
le calcul ab-initio**

**Le transport  
Les calculs en température :  
le calcul de dynamique  
moléculaire**

**Les diagrammes de phase :  
des calculs « classiques »  
de minimum de Gibbs**



Les structures en pression :

La mécanique quantique

$$H\Psi = E\Psi$$

Les calculs en température :

La mécanique classique

$$F = m\gamma$$

Les diagrammes de phase :

La thermodynamique

$$\frac{\partial G}{\partial n_i} = 0$$

**Le manteau :  
Ca ressemble à quoi ?**

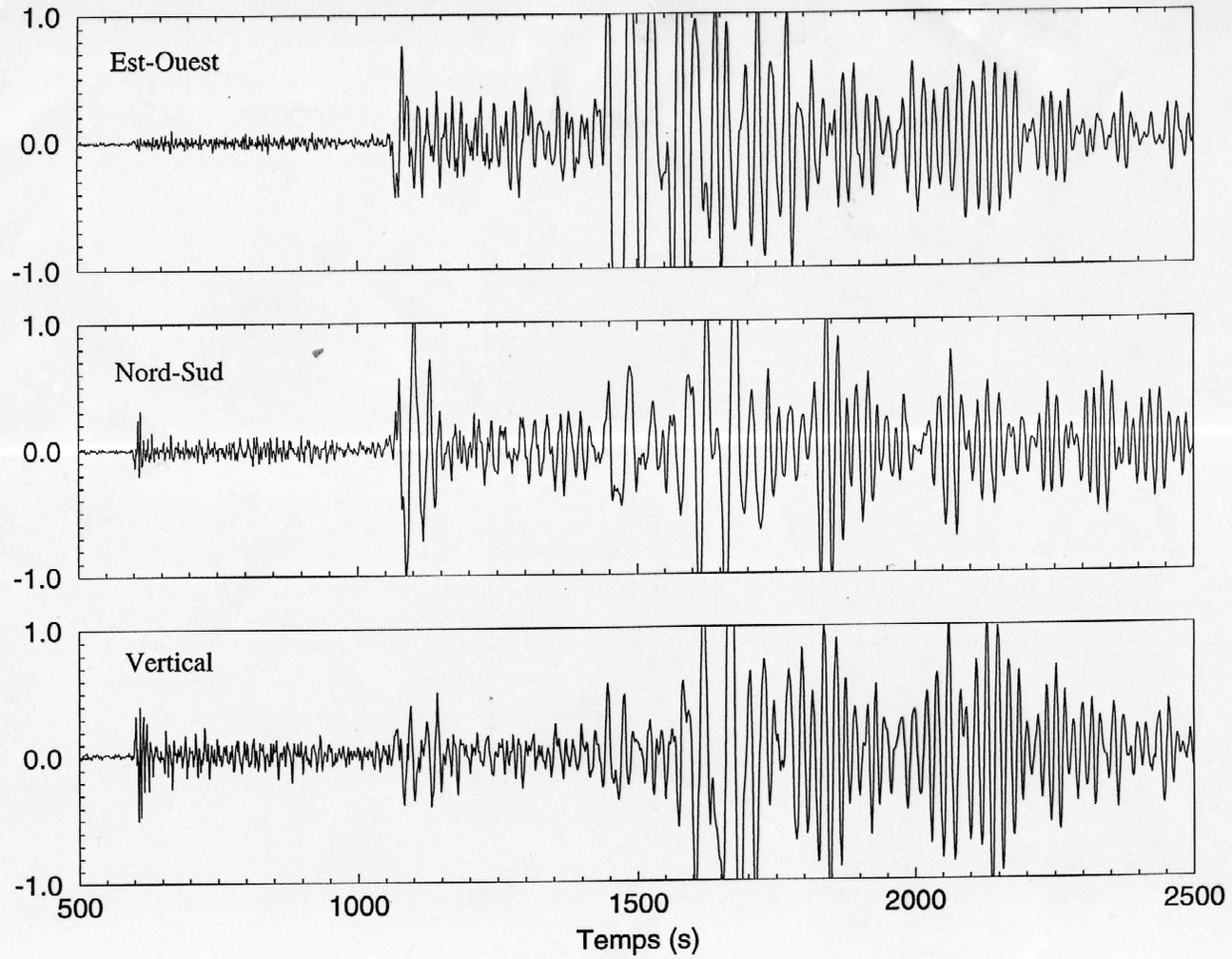
**P**

**S**

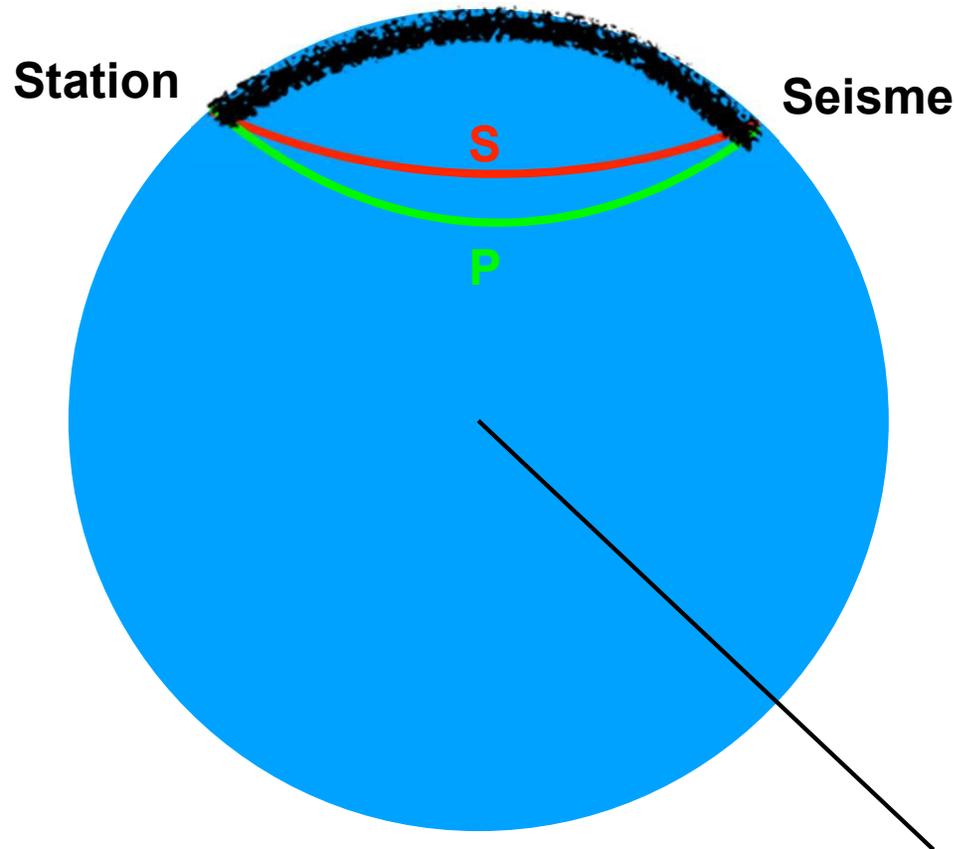
**Ondes de surface**



Charter Towers, Australie



## Ondes de surface



Typiquement

$10^7$   
observations

$$t_i = M_{ij} (1/v)_j$$

$10^7$  vitesses à déterminer  
(une vitesse par  
cube de 50 km de côté)

M = une matrice de  $10^{14}$  éléments à inverser  
Algèbre linéaire, matrices creuses  
(mais aussi transdimensional Markov chains)

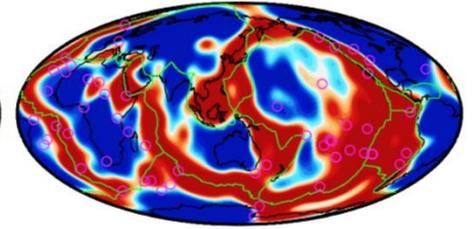
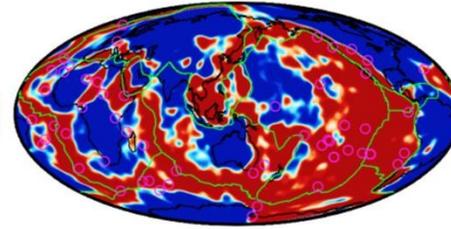
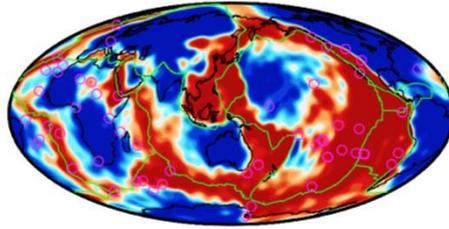
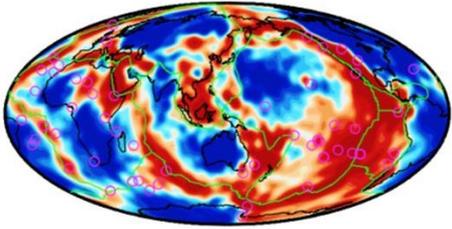
SEISGLOB2  
Durand et al. (2017)

S40RTS  
Ritsema et al. (2011)

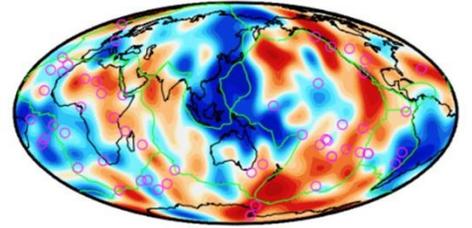
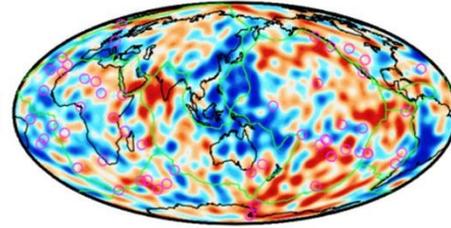
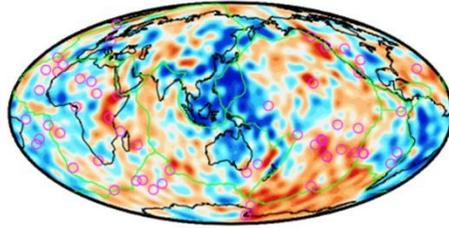
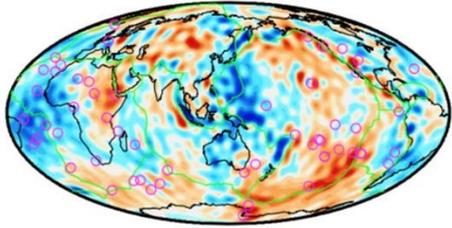
SEMUCB-WM1  
French & Romanowicz (2014)

S362WMANI+M  
Moulik & Ekström (2014)

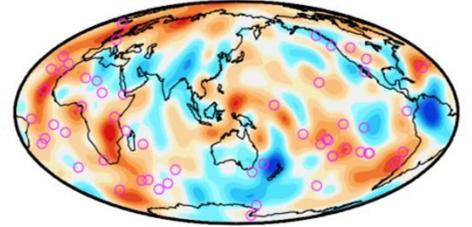
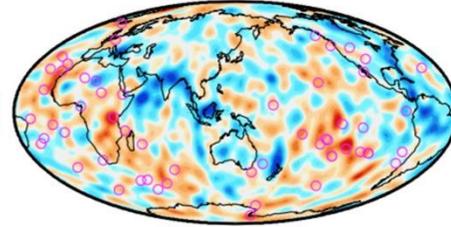
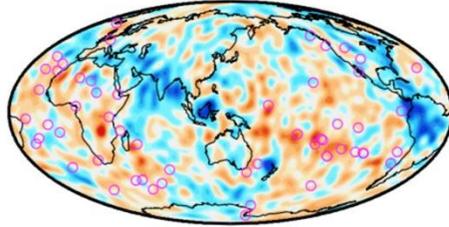
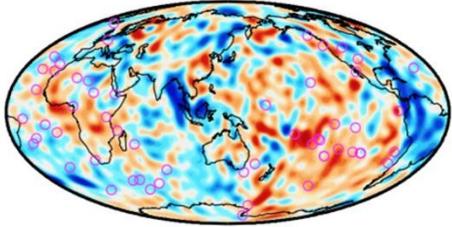
100km



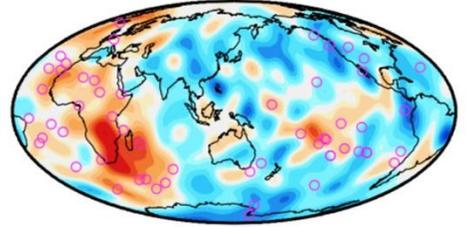
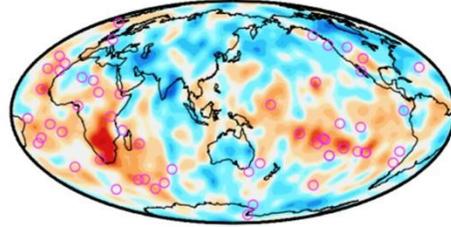
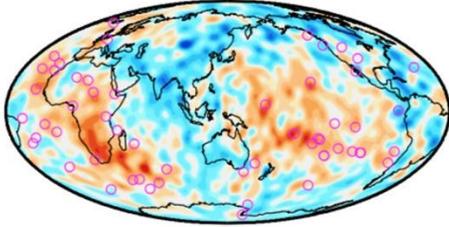
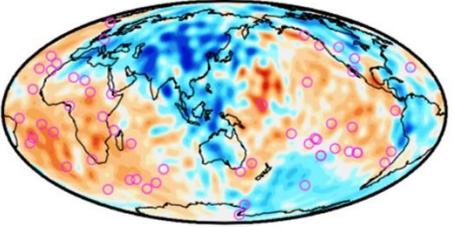
670km



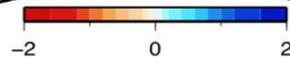
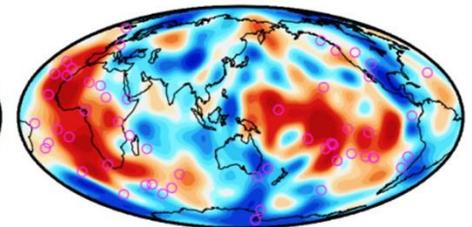
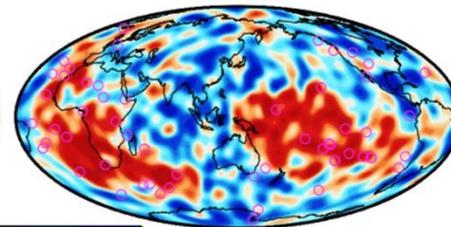
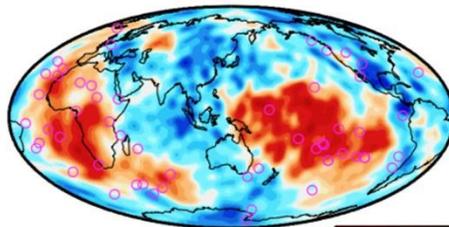
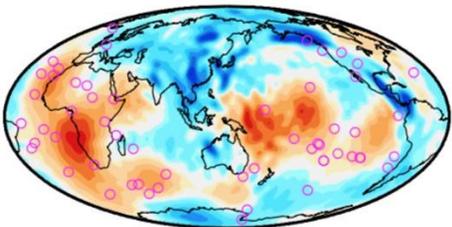
1200km



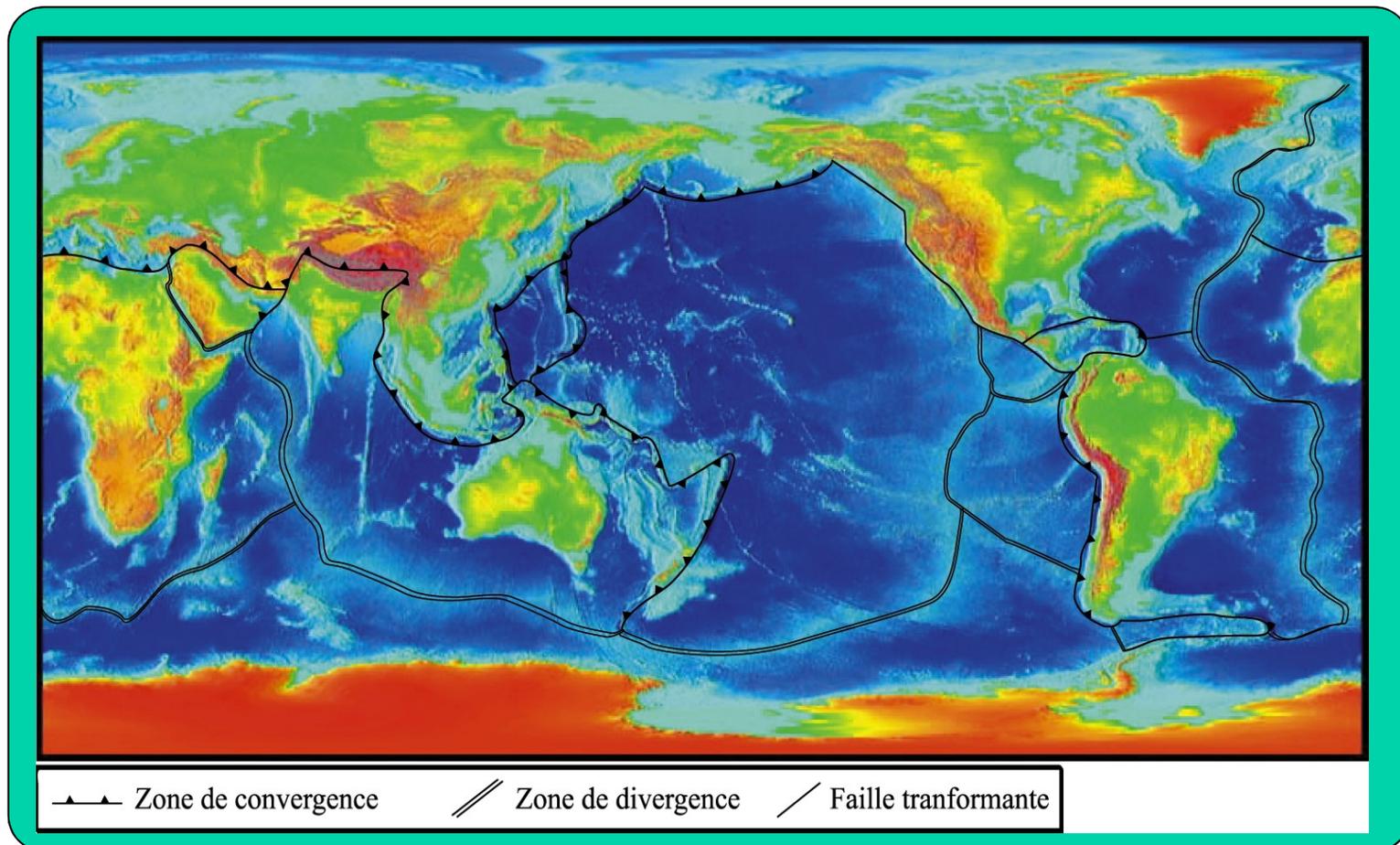
1800km



2800km



**Le manteau :  
Ca bouge comment ?**



**Des plaques « rigides », des déformations aux frontières,  
des vitesses horizontales de 1-10 cm/an**

## Celsius 1731



Dans la Baltique  
(et la baie d'Hudson)  
des vitesses verticales  
de 0.1-1 cm/an

Re-équilibration après  
la déglaciation

Constante de retour  
à l'équilibre d'un fluide  
visqueux

$$\tau = \frac{\eta}{\rho g \lambda}$$

$$\eta \approx 10^{21} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

# Mécanique des Fluides

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = k \nabla^2 T$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \rho g_0$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\eta}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \alpha T \frac{DP}{Dt} + \underline{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{v} + \rho H,$$

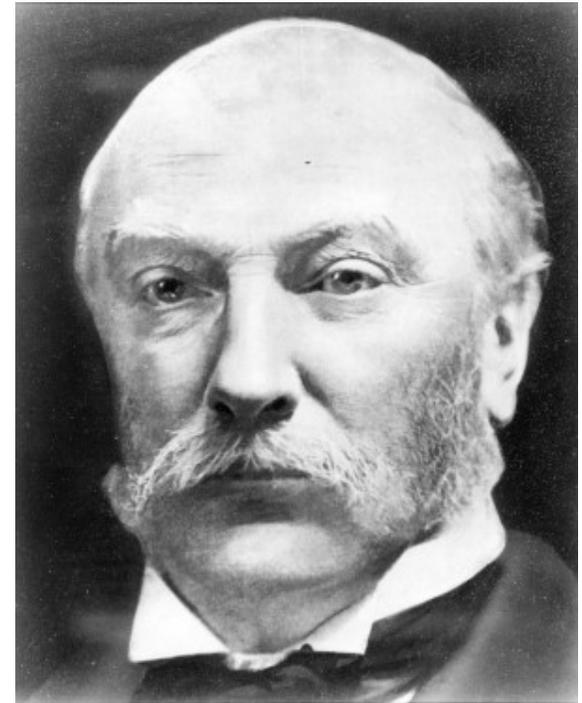
$$f(\rho, P, T) = 0$$

Quelle  
complexité !

# Let's start simple



Henri Claude Benard



John Strutt, baron Rayleigh

# Convection Boussinesque

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = k \nabla^2 T$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \rho g_0$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\eta}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \alpha T \frac{DP}{Dt} + \underline{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{v} + \rho \dot{Q},$$

$$f(\rho, T) = 0 \quad \rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0))$$

# Convection Boussinesque

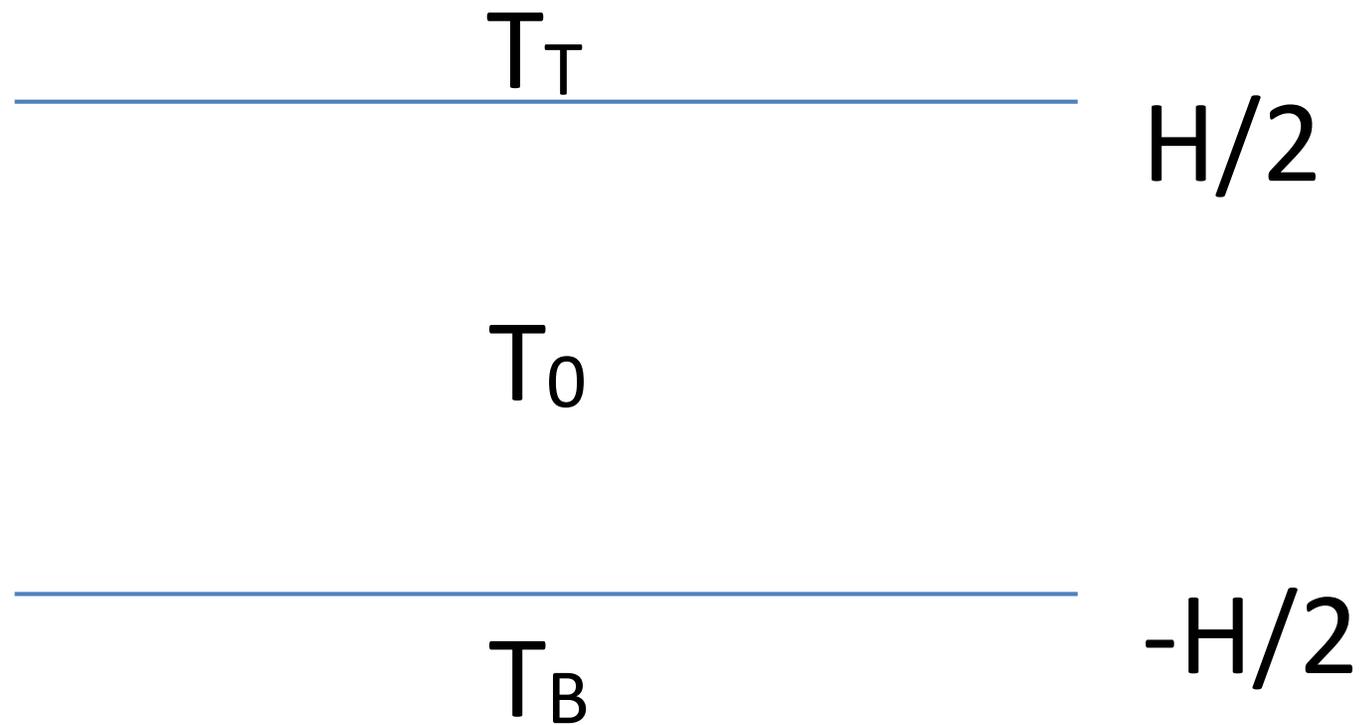
$$\nabla v = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \frac{k}{\rho_0 C} \nabla^2 T$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_z \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_z - \rho_0 g(1 - \alpha(T - T_0))$$

# Convection de Rayleigh-Bénard



# Nouvelles variables

$$T = T_0 - \frac{z}{H}(T_B - T_T) + (T_B - T_T)\tilde{\theta}$$

$$v = v_S \tilde{v} = \frac{\alpha \rho g \Delta T H^2}{\eta} \tilde{v}$$

$$x = H \tilde{x}$$

$$t = \frac{H}{v_S} \tilde{t}$$

$$P = P_h(z) + \Pi \tilde{P}$$

# Equations sans dimension

$$\nabla v = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(-z + \theta) = \frac{1}{\text{Ra}} \nabla^2 \theta$$

$$\text{Re} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nabla^2 v_x$$

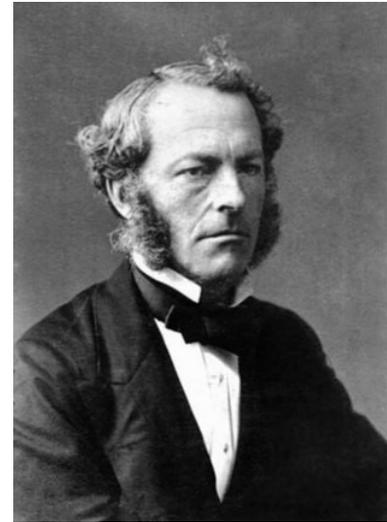
$$\text{Re} \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_z \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nabla^2 v_z + \theta$$

Rayleigh



Il ne reste que deux paramètres,  
le nombre de Rayleigh  
et le nombre de Reynolds

Stokes



Pour le manteau

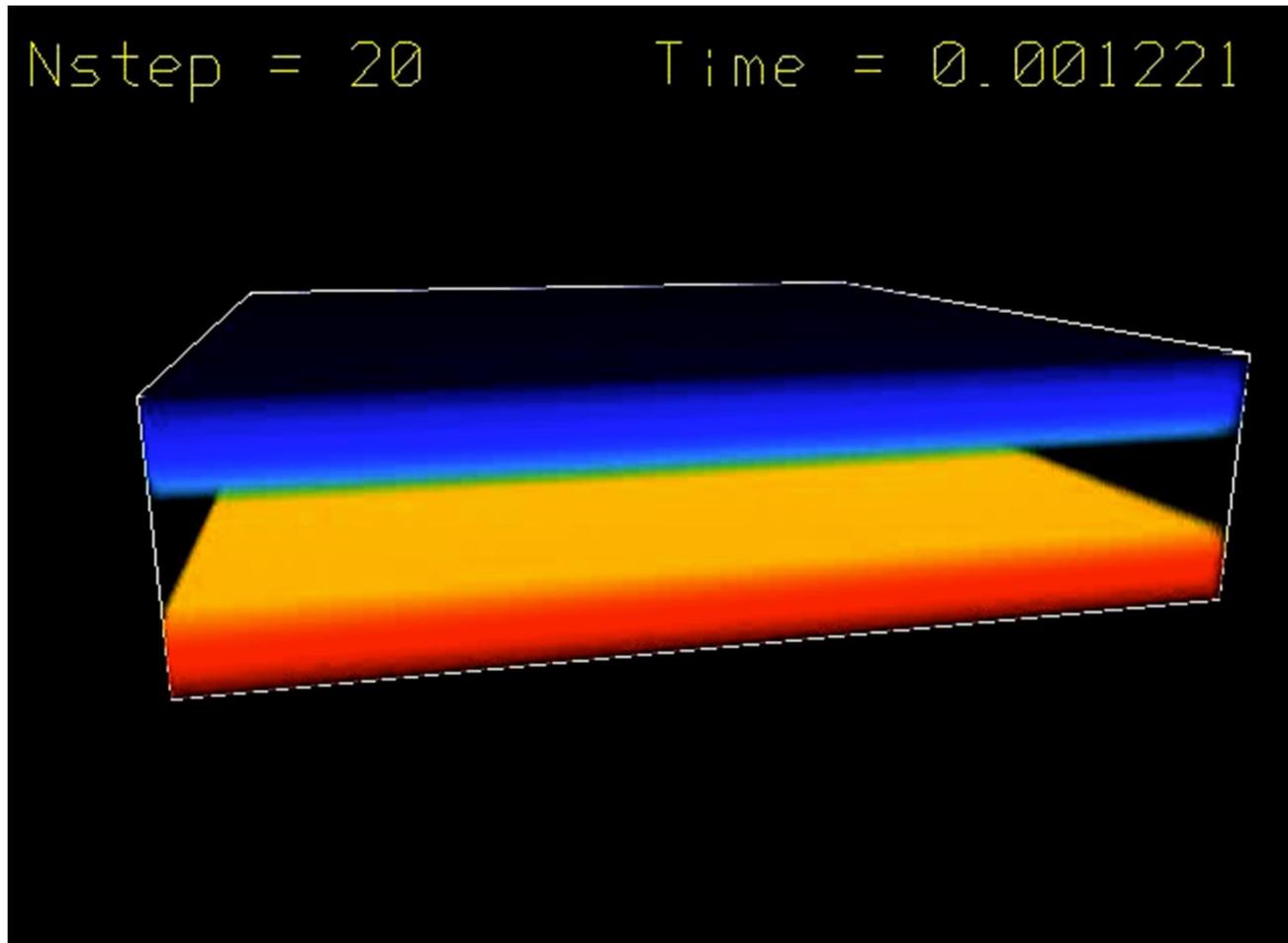
$$\text{Re} = \frac{\rho v_s H}{\eta} \approx 10^{-16}$$

$$\text{Ra} = \frac{\alpha \rho^2 C_p g \Delta T H^3}{k \eta} = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa \nu} \approx 10^8$$

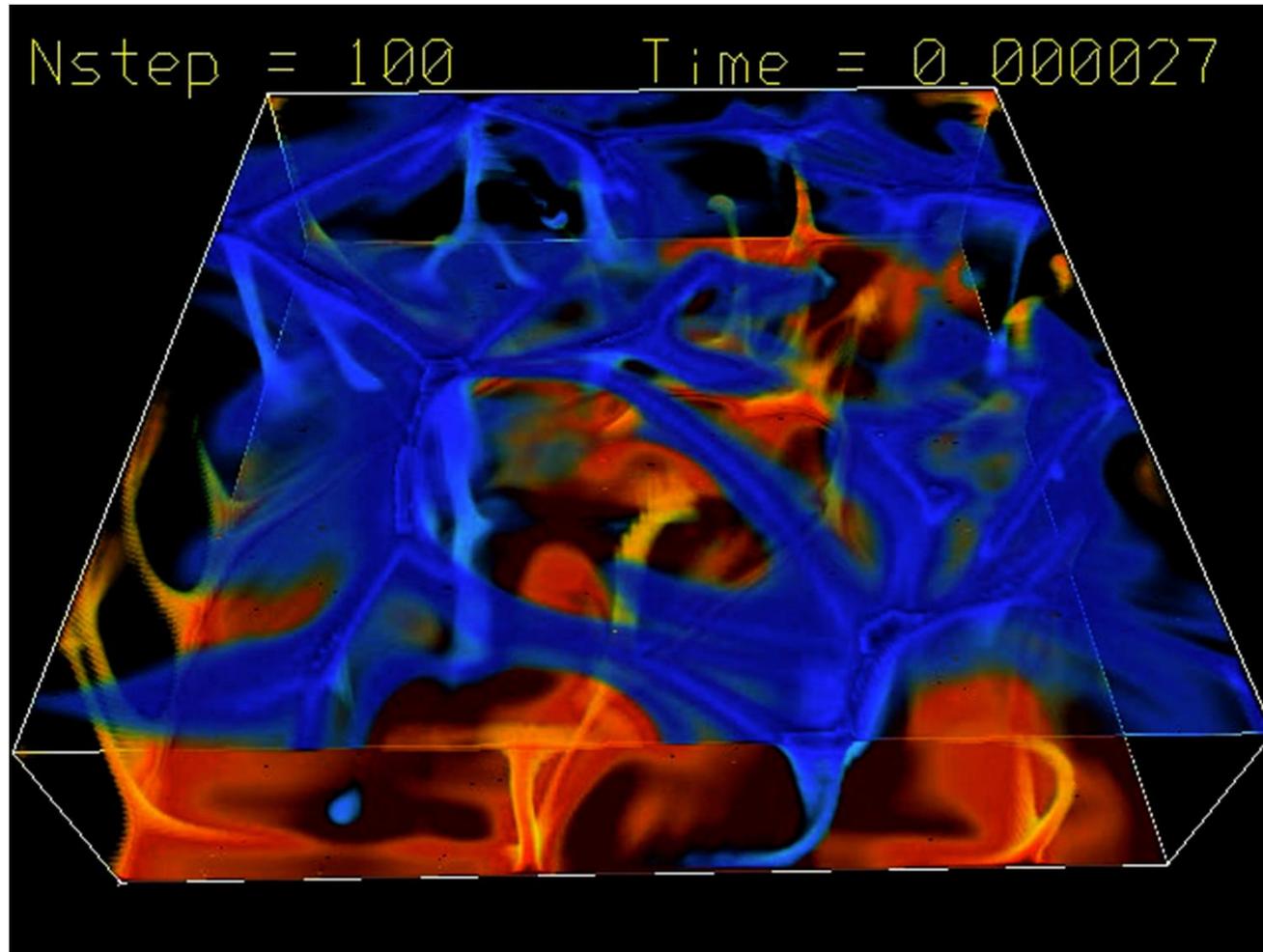


Reynolds

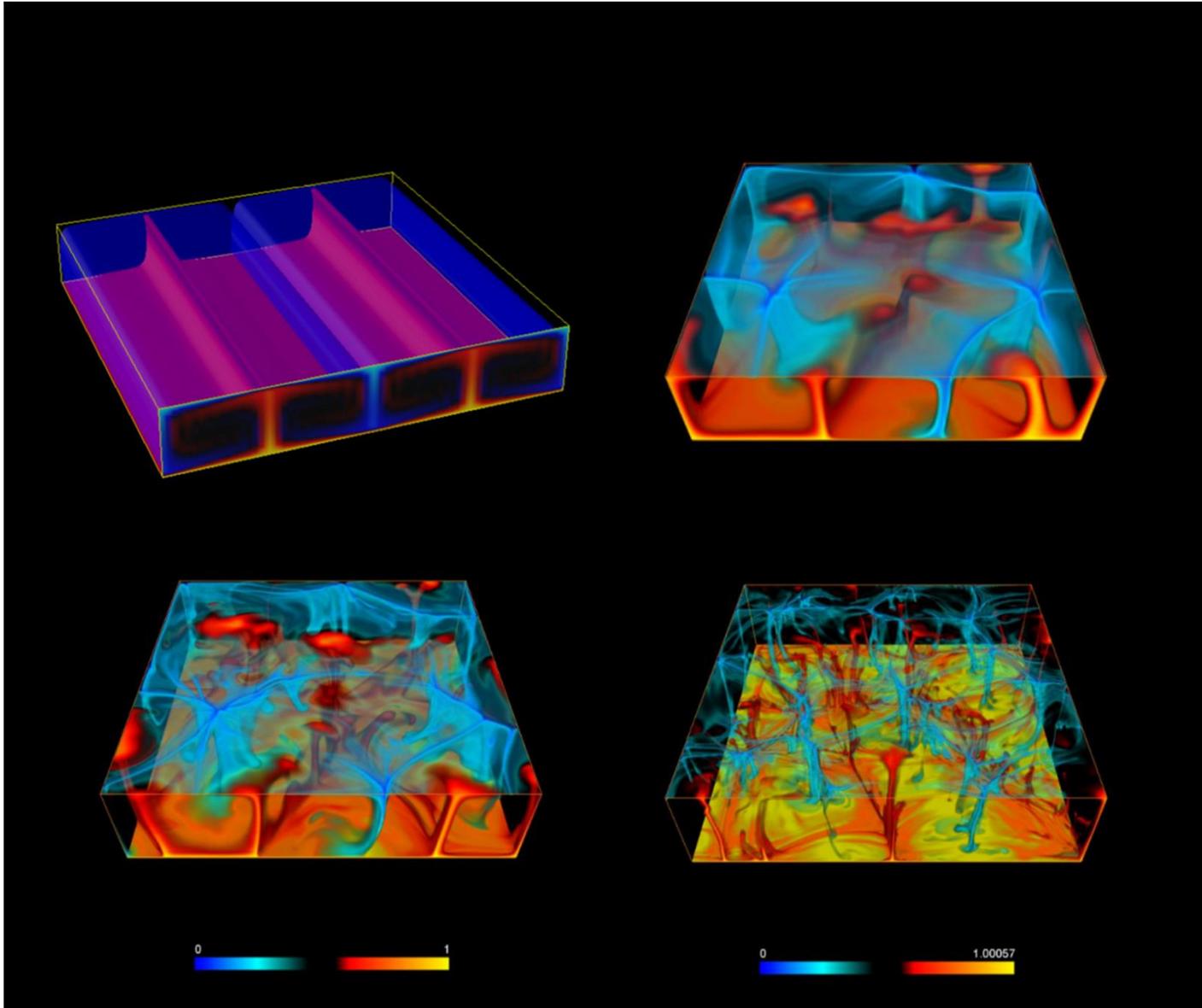
$Ra < 1000$  la convection ne démarre pas  
 $Ra \sim 1000$  des rouleaux stationnaires se forment



$Ra \sim 10^6$   
La convection est chaotique

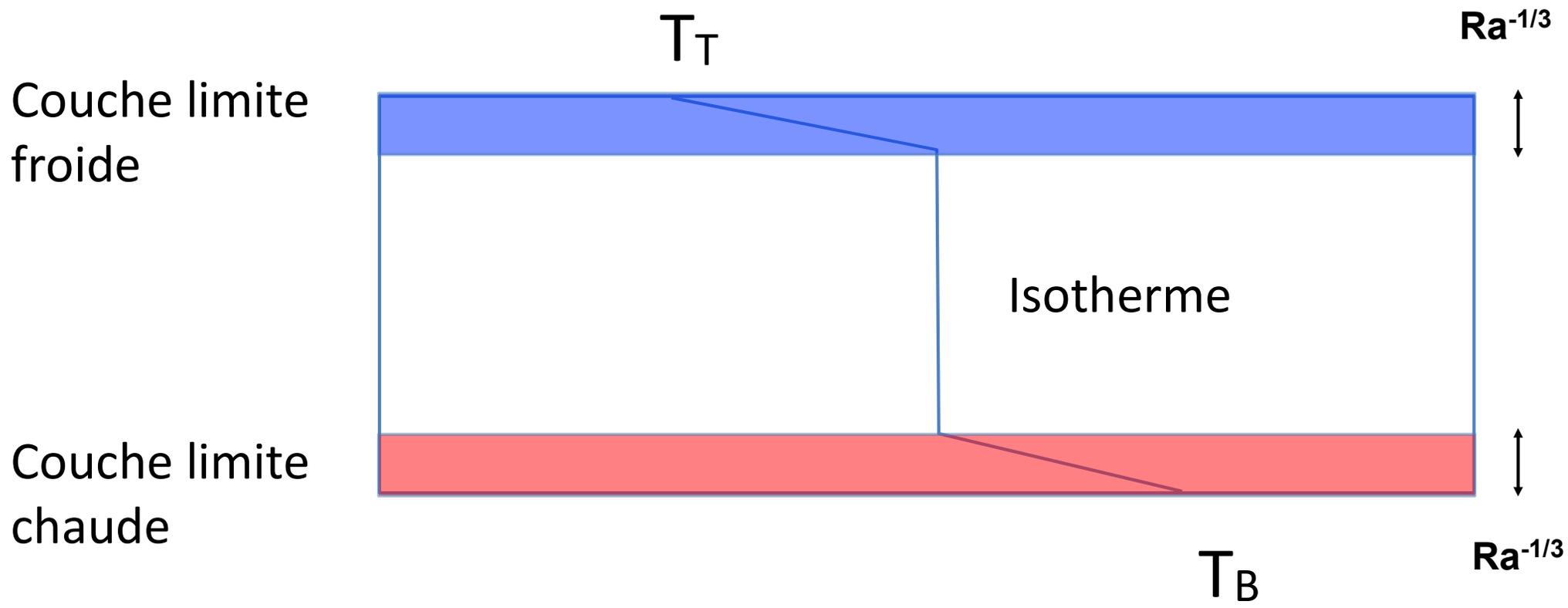


(résolution spectrale, solution périodique, le seul terme non-linéaire est  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) T$ )



$Ra = 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$

taille caractéristique  $Ra^{-1/3}$



Mais dans le manteau, la densité varie bien plus avec la pression qu'avec la température

la densité varie avec la pression comme

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta P}{K_T} \approx 2$$

la densité varie avec la température comme

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \alpha\delta T \approx 0.02$$

l'effet de la température est bien faible...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = k \nabla^2 T$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \rho g_0$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\eta}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \alpha T \frac{DP}{Dt} + \underline{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{v} + \rho H,$$

$$P = \frac{K_T^0}{n} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] + \alpha_0 K_T^0 (T - T_0)$$

**Ces equations ont pour solutions des écoulements convectifs (~5 cm/an)**

**ET**

**des ondes sonores (~5 km/s) !!**

**Des systèmes d'équations approximatives (anélatiques)  
ont été proposés pour filtrer  
les ondes sonores dans les étoiles, l'atmosphère... et utilisés  
pour le manteau, le noyau...**

**mais en fait dans le cas d'un fluide à nombre de Reynolds  
nul comme le manteau, calculer les solutions exactes n'est pas si difficile !**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = k \nabla^2 T$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \rho g_0$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\eta}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \alpha T \frac{DP}{Dt} + \underline{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{v} + \rho H,$$

$$P = \frac{K_T^0}{n} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] + \alpha_0 K_T^0 (T - T_0)$$

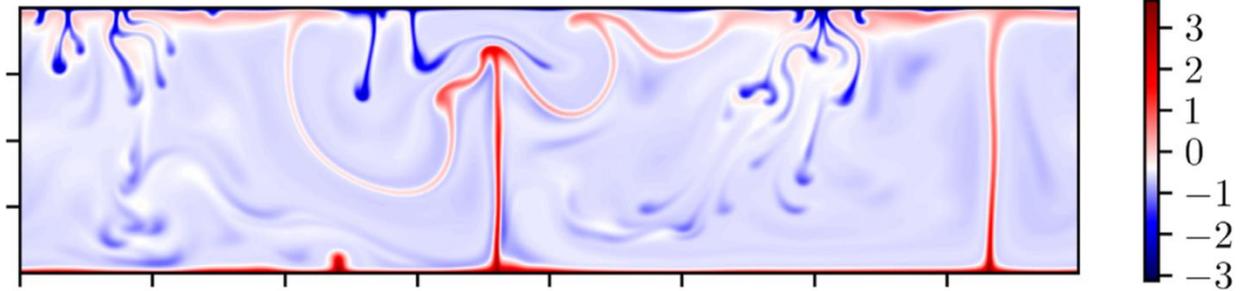
**Résolution utilisant le code Dedalus  
(spectral en x, Chebyshev en z, Runge-Kutta en t, itératif)**

$$M \frac{\partial X}{\partial t} + LX = F - LX$$

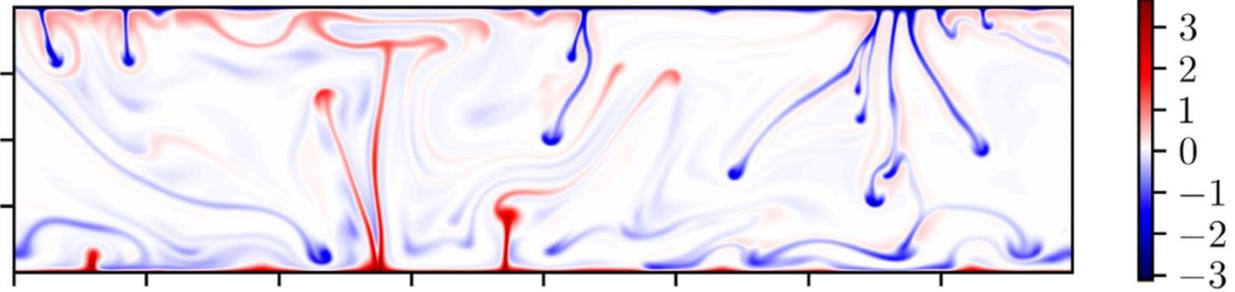

**Approximation linéaire du second membre exact.  
Plusieurs nouveaux nombres sans dimensions  
apparaissent dont**

$$D = \frac{\alpha_0 g H}{C_p^0}$$

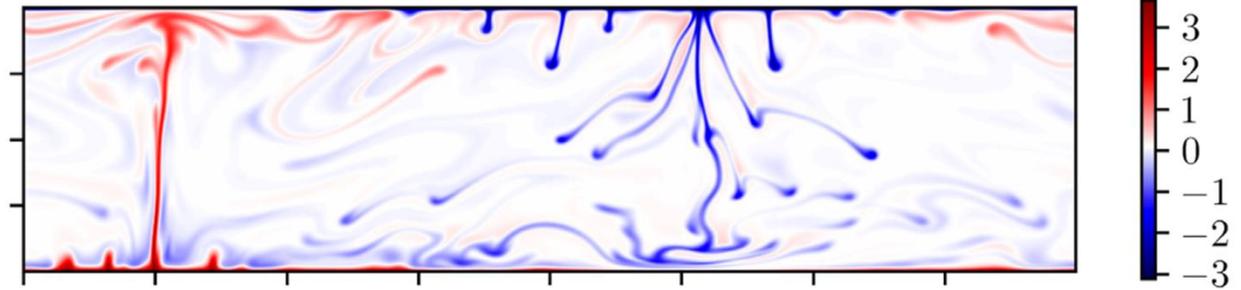
Quasi-Boussinesq

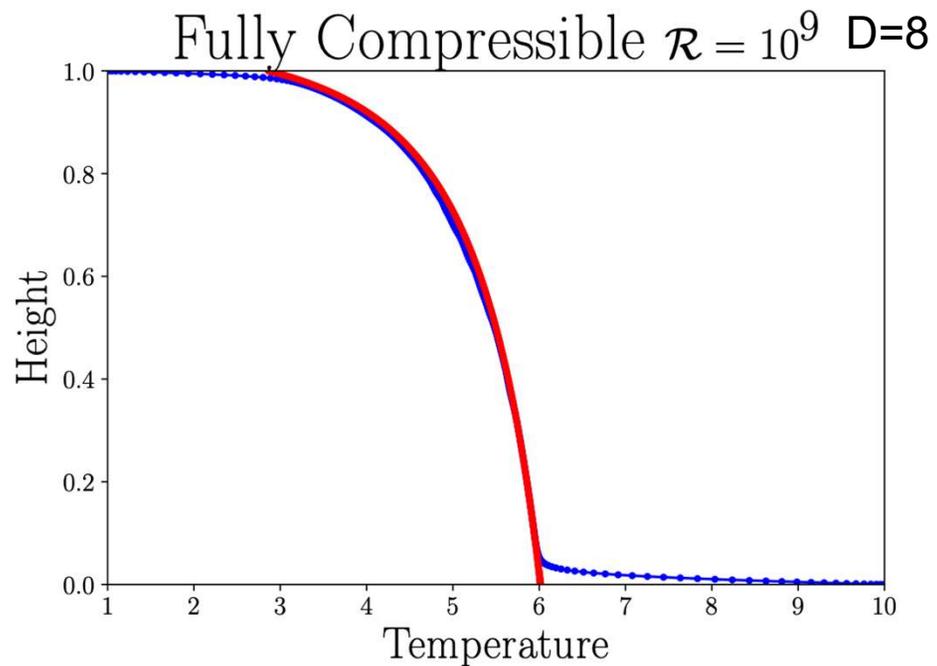
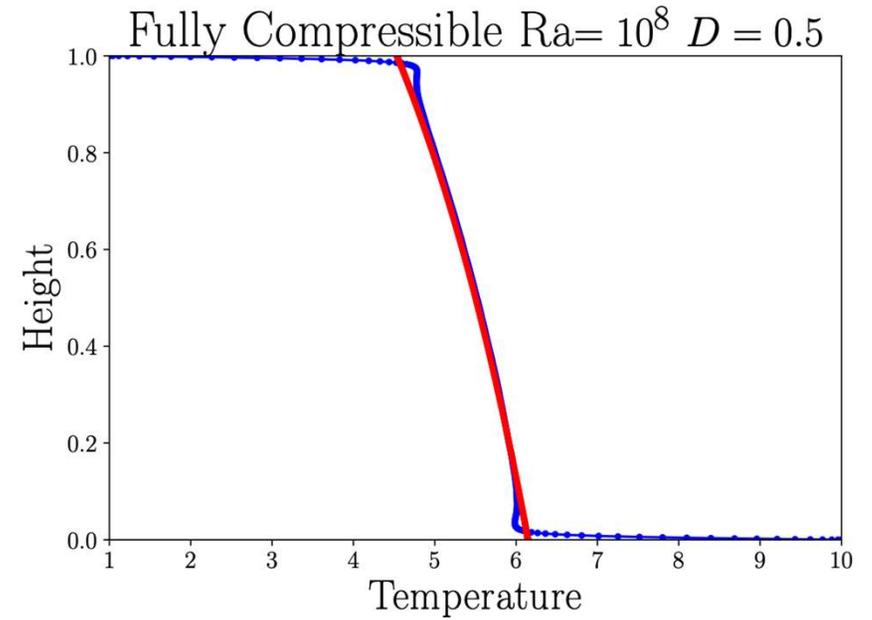
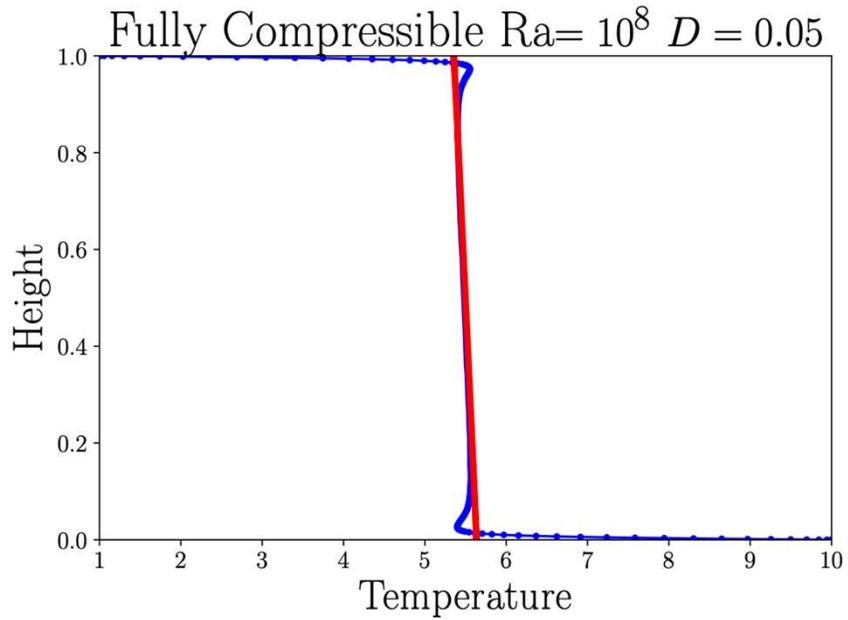


Anelastic Approximation



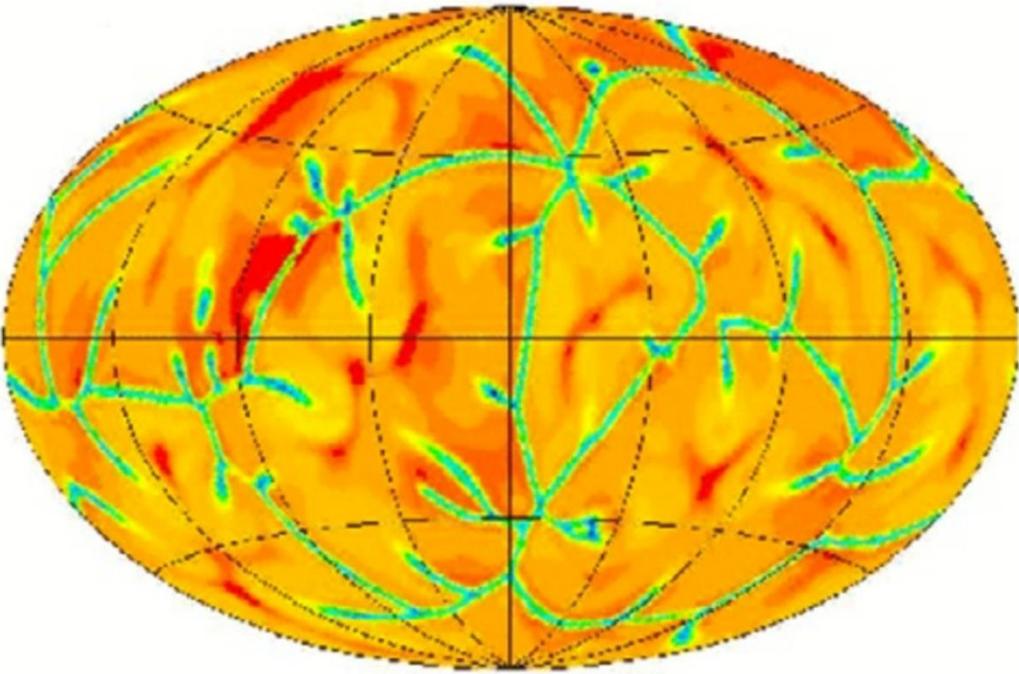
Fully Compressible



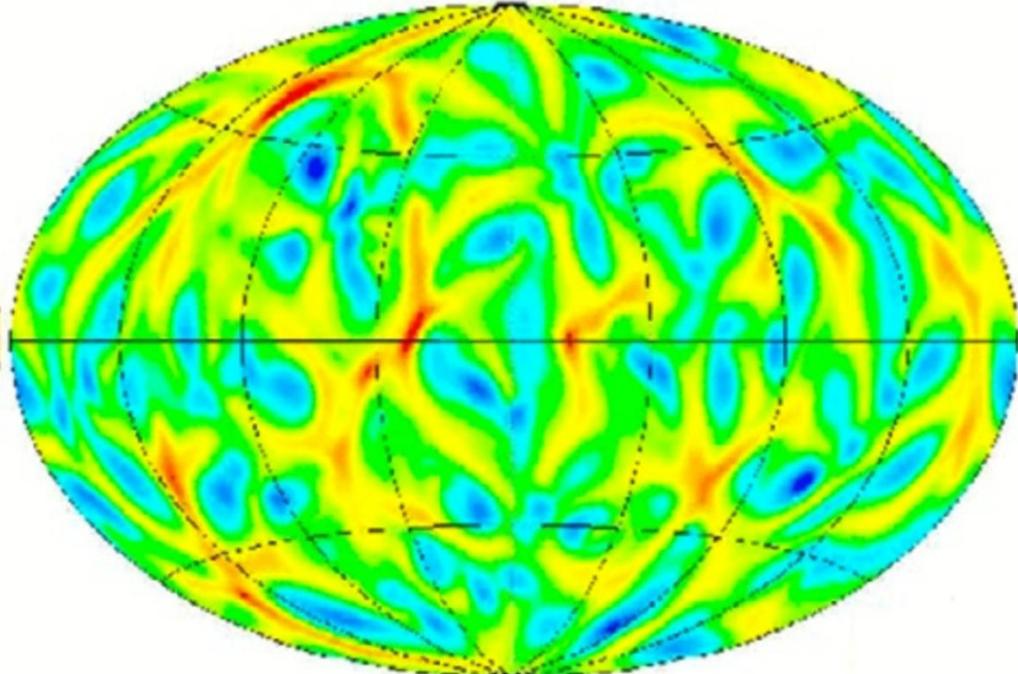


**Profil de température dans une planète de plus en plus compressible ou de plus en plus grosse**

Et bien sur la Terre est ronde

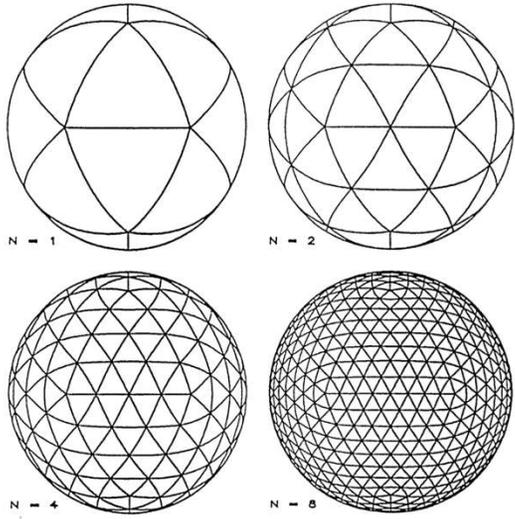


Upper mantle



Lower mantle

Et l'existence de pôles est em..



Décomposition de l'isocaèdre

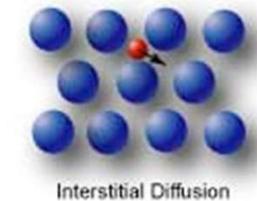
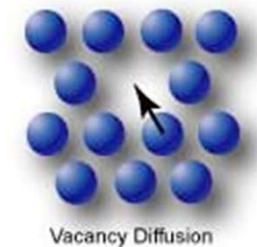
**Mais tout ça ne ressemble pas  
beaucoup à la tectonique des plaques !**

**Et la viscosité n'est pas constante**

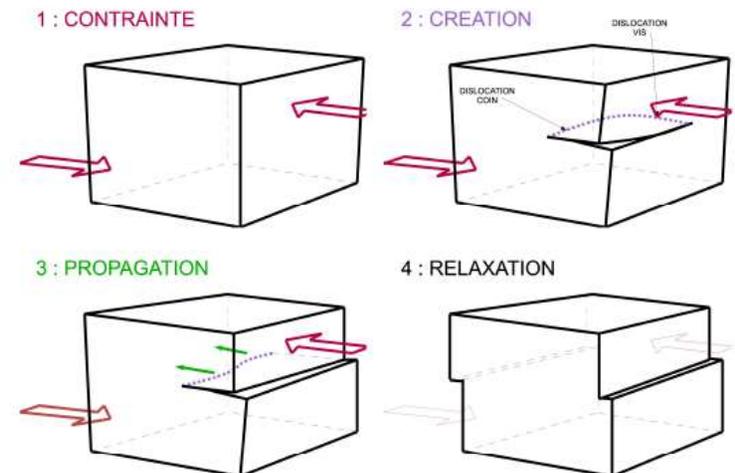
## Et la viscosité n'est pas constante

### Déformation par diffusion et/ou dislocation

Par diffusion :  
mouvement individuel



Par Dislocation :  
mouvement collectif



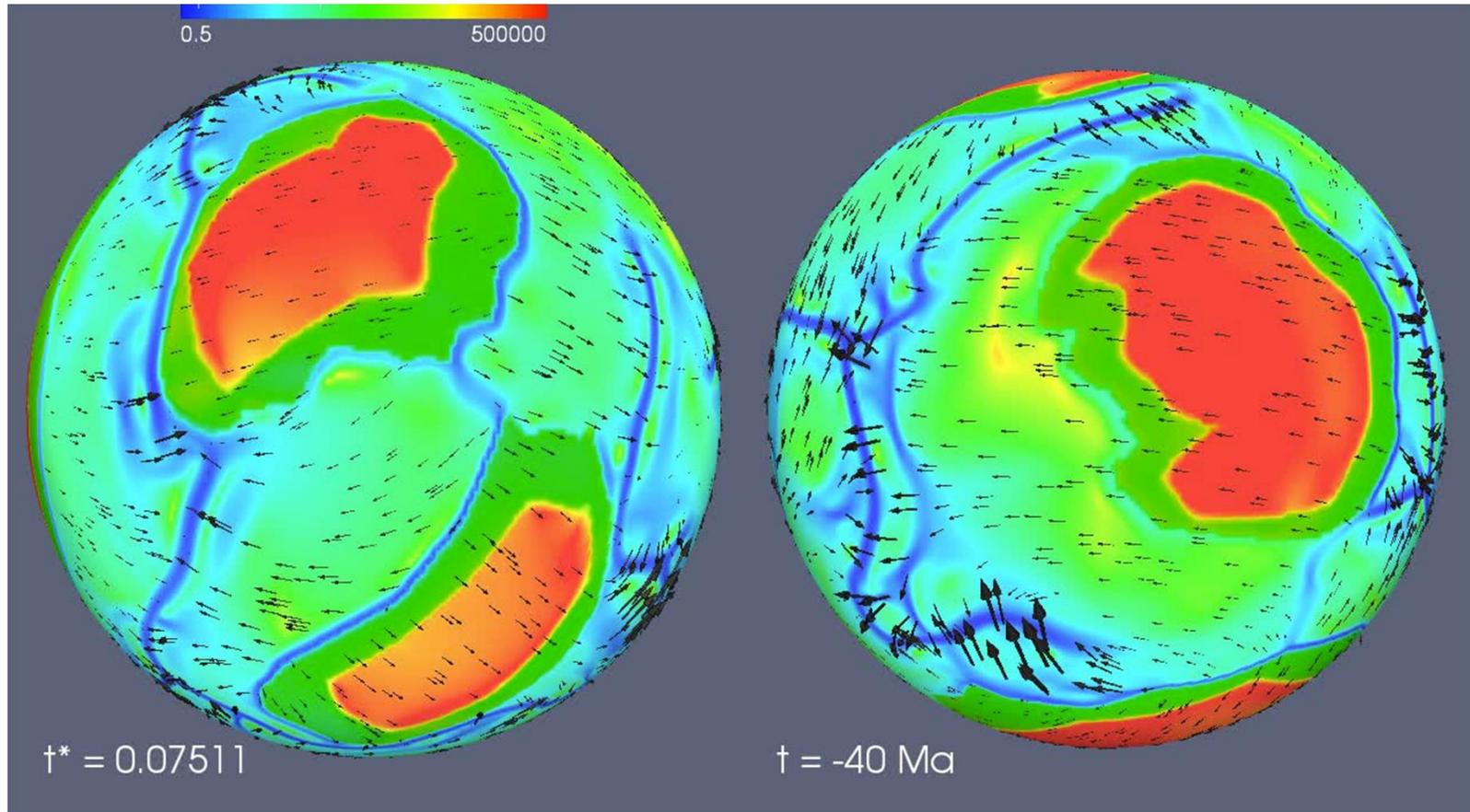
Dislocation	$\underline{\dot{\epsilon}} = BI_{\sigma}^{n-1} \underline{\sigma}$
Diffusion	$\underline{\dot{\epsilon}} = AR^{-m} \underline{\sigma}$
Mixte	$\underline{\dot{\epsilon}} = (AR^{-m} + BI_{\sigma}^{n-1}) \underline{\sigma}$
GBS	$\underline{\dot{\epsilon}} = CR^{-m} I_{\sigma}^{n-1} \underline{\sigma}$

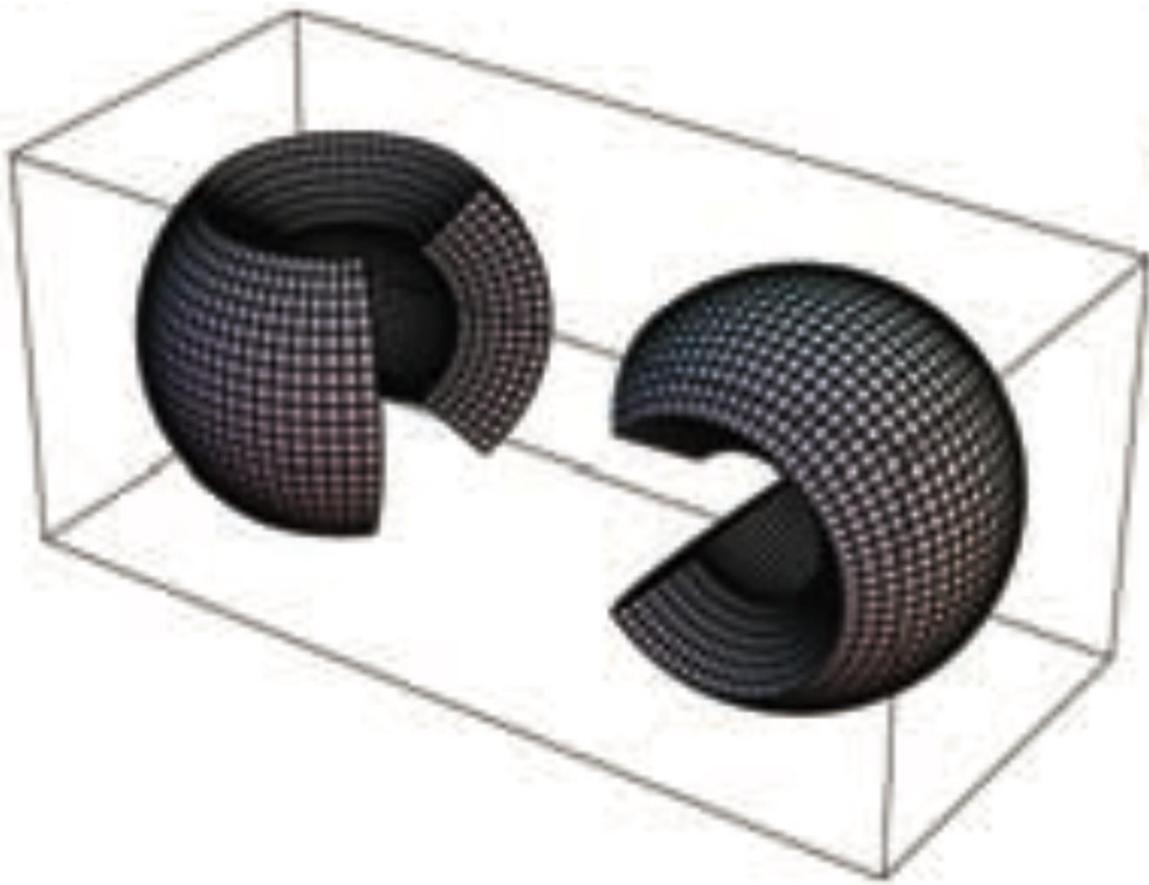
R est la taille des grains

Aucune de ces lois (à R constant) n'explique  
la tectonique des plaques



Ici avec une plasticité de seuil ad-hoc

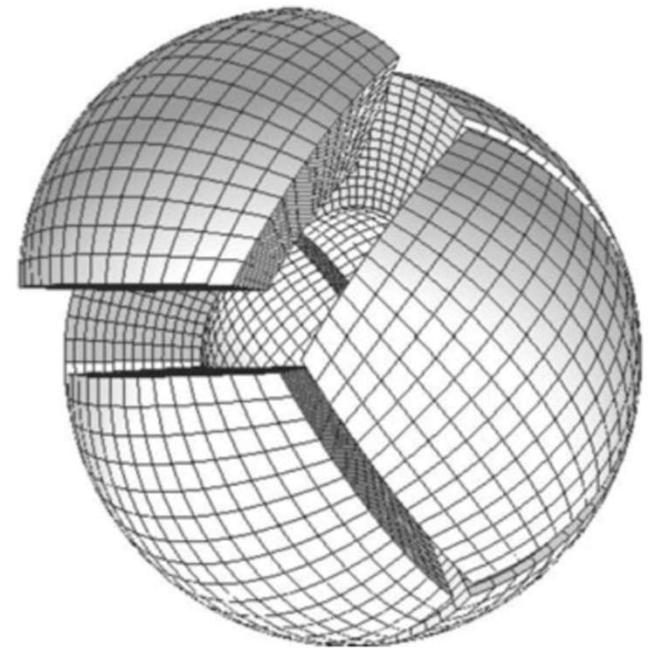




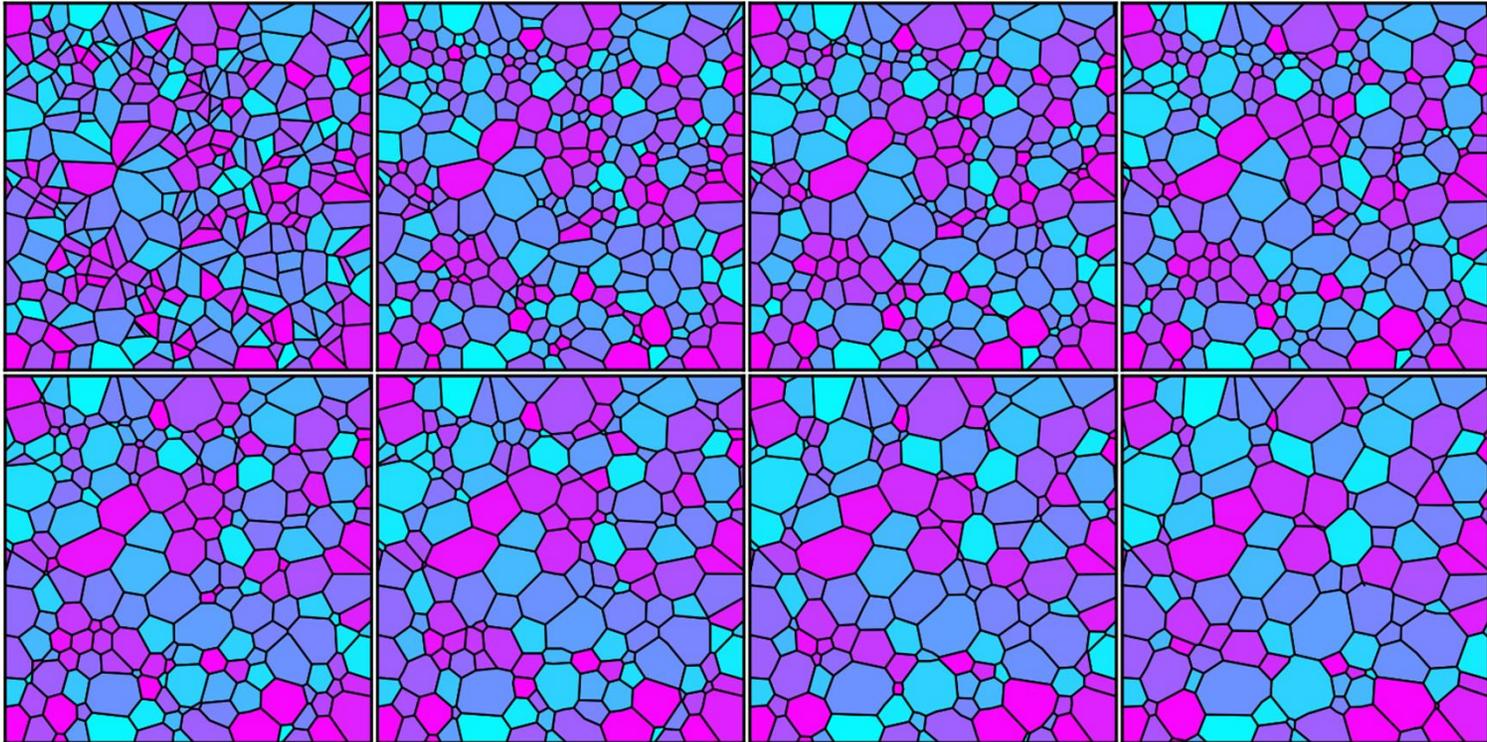
Yin-Yang grid



Sphère cubique



**On peut coupler un modèle de convection  
avec une rhéologie dépendante de la taille des grains minéraux  
ET  
un modèle d'évolution de la taille des grains**

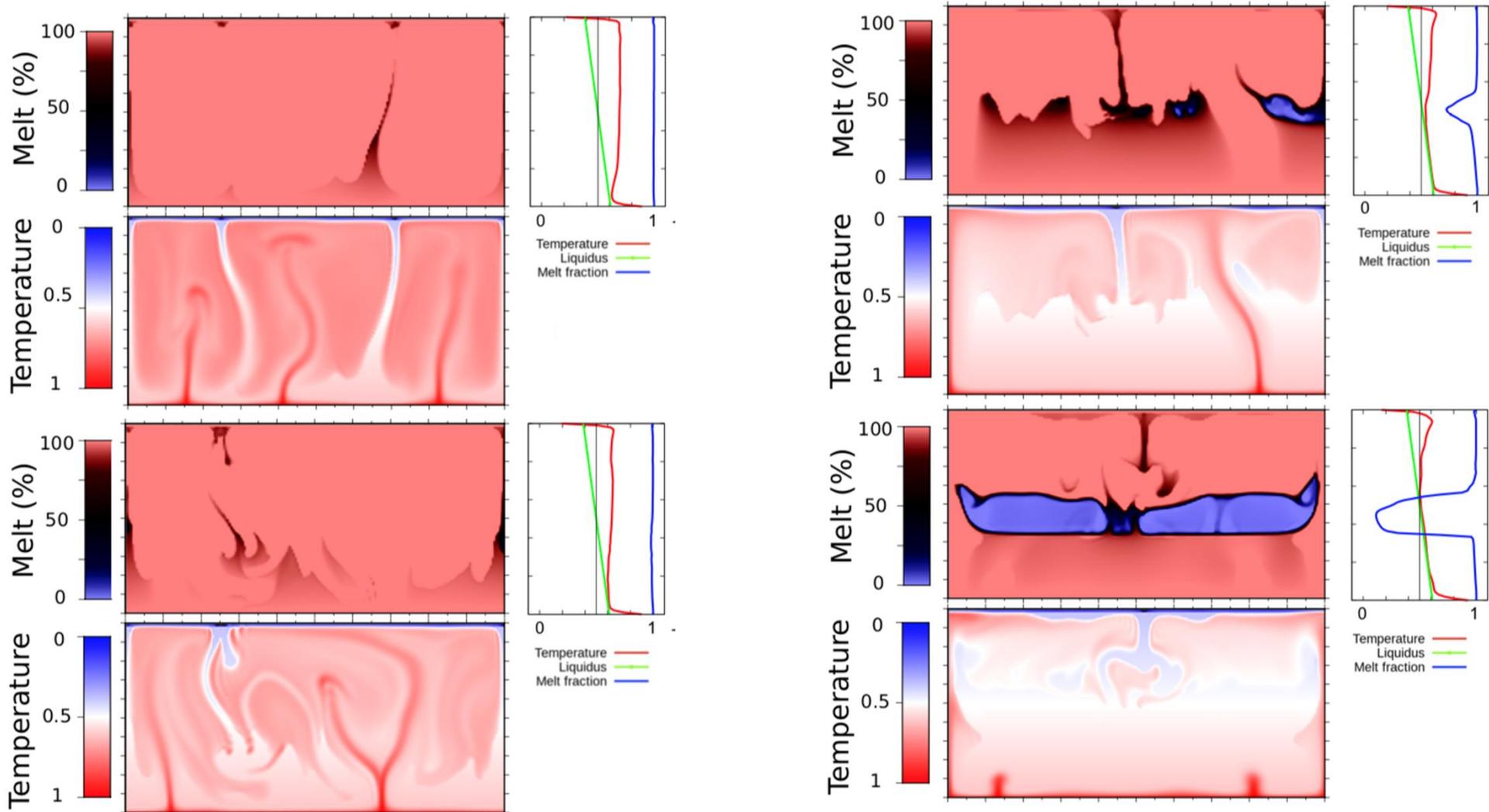


**De nombreux problèmes viennent  
aussi de la présence de fusion partielle dans le manteau**

### **Un exemple**

**Lors de la formation de la Terre, le manteau était fondu, comment a-t-il  
cristallisé?**

**ar le bas, parce que c'est là que la température atteint d'abord la temperature de cristallisa  
-par le milieu, car c'est là que les premiers cristaux ont leur équilibre de flottabilité**



par le milieu, car c'est là que les premiers cristaux ont leur équilibre de flottabilité

**Les sciences de la Terre  
ont besoin de gens formés en  
math, calcul scientifique, physique, chimie...**

**Des sujets variés en  
sismologie,  
minéralogie,  
mécanique des fluides,  
magnétohydrodynamique,  
planétologie,  
IA, data mining...**





